Министерство транспорта РФ

ФВОУ ВПО

«НОВОСИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ ВОДНОГО ТРАНСПОРТА»

КАФЕДРА ТЕОРИИ И УСТРОЙСТВА КОРАБЛЯ

А.Ш. Готман

Элементы теории функций комплексного переменного

Учебное пособие для аспирантов

Новосибирск 2013

УДК 512 5

Готман А.Ш. Элементы теории функций комплексного переменного: учеб. пособие/ А.Ш. Готман.- Новосибирск: Новосиб. гос. акад. вод. трансп. 2012

Настоящее учебное пособие предназначено для аспирантов, студентов – стажёров и преподавателей НГАВТ и составлено по опыту изучения теории функций комплексного переменного в школе – семинаре при кафедре ТУК в 2004 – 2005 и 2011-2012 учебных годах. Пособие может быть полезным для изучения методов использования теории функций комплексного переменного, широко используемых в современной научной и технической литературе по гидромеханике, теории упругости и электротехники

Табл. 1, рис.39, библ. 11 назв.

Рецензенты:
Владимиров Ю.Н. – зав. кафедрой высшей математики Новосибирского государственного университета экономики управления, канд. Физ.-мат. наук, доцент;
Ботвинков В.М. – зав. кафедрой водных путей, гидравлики и гидроэкологии (ВП,ГиГСЭ) ????? Новосибирской государственной академии водного транспорта

ISBN 978-5-8119-0305-1

© Готман А.Ш., 2013
© Новосибирская государственная академия водного транспорта 2012

ВВЕДЕНИЕ

Для понимания методов теории функций комплексного переменного имеет огромное значение понятие комплексного числа, поэтому данное введение посвящено, в основном, истории развития комплексных чисел.

Древнегреческие математики считали "настоящими" только натуральные числа. Постепенно складывалось представление о бесконечности множества натуральных чисел. В III веке Архимед разработал систему обозначения вплоть до такого громадного числа как $10^{8 \cdot 10^{11}}$. Наряду с натуральными числами применяли дроби числа, составленные из целого числа долей единицы. В практических расчетах дроби применялись за две тысячи лет до н. э. в древнем Египте и древнем Вавилоне. Древнегреческий философ и математик Пифагор учил, что «… элементы чисел являются элементами всех вещей, и весь мир в целом является гармонией и числом». Сильнейший удар по этому взгляду был нанесен открытием, сделанным одним из пифагорейцев. Он доказал, что диагональ квадрата несоизмерима со стороной. Отсюда следует, что натуральных чисел и дробей недостаточно, для того чтобы выразить длину диагонали квадрата со стороной 1. Есть основание утверждать, что именно с этого открытия начинается эра теоретической математики, потому что открыть существование несоизмеримых величин с помощью опыта, не прибегая к абстрактному рассуждению, было невозможно.

Следующим важным этапом в развитии понятия о числе было введение отрицательных чисел - это было сделано китайскими математиками за два века до н. э. Отрицательные числа применяли в III веке древнегреческий математик Диофант, знавший уже правила действия над ними, а в VII веке - индийские ученые. В VIII веке было установлено, что квадратный корень из положительного числа имеет два значения - положительное и отрицательное, а из отрицательных чисел квадратный корень извлекать нельзя, потому что нет такого числа x, чтобы $x^2 = -9$.

В XVI веке в связи с изучением кубических уравнений оказалось необходимым извлекать квадратные корни из отрицательных чисел. В формуле для решения кубических уравнений вида $x^3 + px + q = 0$ появляются кубические и квадратные корни:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

Эта формула безотказно действует в случае, когда квадратные корни извлекаются из положительных чисел, например в случае решения уравнения $x^3 + 3x - 4 = 0$, но если под знаком квадратного корня получается отрицательное число, как при решении уравнения $x^3 - 7x + 6 = 0$, то возникает невозможная операция извлечения квадратного корня из отрицательного числа.

Вслед за тем, как были решены уравнения 4-й степени, математики усиленно искали формулу для решения уравнения 5-й степени. Но П. Руффини (1765 – 1829, Италия) доказал, что буквенное уравнение пятой степени $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ нельзя решить алгебраически; а точнее, нельзя выразить его корень через буквенные величины a, b, c, d, e с помощью шести алгебраических действий (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень, извлечение корня).

В 1830 году Галуа (Франция) доказал, что никакое общее уравнение, степень которого больше чем 4, нельзя решить алгебраически. Тем не менее, всякое уравнение n-й степени имеет (если рассматривать и комплексные числа) n корней, среди которых могут быть и равные. В этом математики были убеждены еще в XVII веке, основываясь на разборе многочисленных частных случаев, но только позже такая теорема была доказана Гауссом (1777-1855). Итальянский алгебраист Дж. Кардано в 1545 г. предложил ввести числа новой природы. Он показал, что система уравнений $x + y = 10, \quad x \cdot y = 40$, не имеющая решений во множестве действительных чисел, но имеет решения вида $x = 5 \pm \sqrt{-15}, \quad y = 5 \mp \sqrt{-15}$, поэтому нужно только условиться действовать над такими выражениями по правилам обычной алгебры и считать что $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a} = -a$. Дж. Кардано называл такие величины "чисто отрицательными" и даже "софистически отрицательными", считал их бесполезными и старался их не употреблять. В самом деле, с помощью таких чисел нельзя выразить ни результат, ни изменение какой-нибудь величины. Но уже в 1572 году вышла книга итальянского алгебраиста Р. Бомбелли, в которой были установлены первые правила арифметических операций над такими числами, вплоть до извлечения из них кубических корней. Название "мнимые числа" ввел в 1637 году французский математик и философ Р. Декарт, а в 1777 году один из крупнейших математиков XVIII века Л. Эйлер (1777, опубликована в 1794) предложил использовать первую букву французского слова imaginaire (мнимый) для обозначения числа $\sqrt{-1}$ (мнимой единицы).

Л. Эйлер в 1751 году также высказал мысль об алгебраической замкнутости поля комплексных чисел. К такому же выводу пришел Д'Аламбер (1747), но первое строгое доказательство этого факта принадлежит Гауссу (1799). Термин "комплексные числа" также был введен Гауссом в 1831 году, хотя этот термин ранее использовал в том же смысле французский математик Л. Карно в 1803 году

На рубеже XVII и XVIII веков была построена общая теория корней n-ых степеней сначала из отрицательных, а затем из любых комплексных чисел, основанная на следующей формуле английского математика А. Муавра (1707): $e^{in\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. С помощью этой формулы можно было также вывести формулы для косинусов и синусов кратных дуг.

Л. Эйлер вывел в 1748 году формулу $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, которая связывала воедино показательную функцию с тригонометрическими. С помощью формулы Л. Эйлера можно было возводить число e в любую комплексную степень. Любопытно, например, что $e^{i\pi} = -1$. Появилась возможность находить синусы и косинусы от комплексных чисел, вычислять логарифмы таких чисел, то есть строить общую теорию функций комплексного переменного.

В конце XVIII века французский математик Ж. Лагранж смог сказать, что математический анализ уже не затрудняют мнимые величины. С помощью мнимых чисел научились выражать решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Еще раньше швейцарский математик Я. Бернулли применял комплексные числа для решения интегралов. Хотя в течение XVIII века с помощью комплексных чисел были решены многие вопросы, в том числе и прикладные задачи, связанные с картографией, гидродинамикой и т. д., однако еще не было строго логического обоснования теории этих чисел. Поэтому французский ученый П. Лаплас считал, что результаты, полученные с помощью мнимых чисел, - только наведение, приобретающее характер настоящих истин лишь после подтверждения прямыми доказательствами.

"Никто ведь не сомневается в точности результатов, получаемых при вычислениях с мнимыми количествами, хотя они представляют собой только алгебраические формы, иероглифы нелепых количеств" - писал Л. Карно.

В конце XVIII века, в начале XIX века было получено геометрическое истолкование комплексных чисел. Датчанин-землемер К. Вессель (1799), француз Ж. Арган (1806 – 1814) и немец К. Гаусс независимо друг от друга предложили изобразить комплексное число $z = x + iy$ точкой $M(a,b)$ на координатной плоскости. Позднее оказалось, что еще удобнее изображать число не самой точкой M, а вектором $\overline{OM}$, идущим в эту точку из начала координат. При таком истолковании сложению и вычитанию комплексных чисел соответствуют эти же операции над векторами. Вектор $\overline{OM}$ можно задавать не только его координатами a и b, но также длиной r и углом φ, который он образует с положительным направлением оси абсцисс. При этом $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, и число z принимает вид $z = r\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, который называется тригонометрической формой комплексного числа. Число r называют модулем комплексного числа z и обозначают $|z|$. Число φ называют аргументом z и обозначают Arg z. Заметим, что если $z = 0$, значение Arg z не определено, а при $z \neq 0$ оно определено с точностью до кратного 2π. Упомянутая ранее формула Эйлера позволяет записать число z в виде $z = r\,e^{i\varphi}$ (показательная форма комплексного числа).

Арифметическая модель комплексных чисел как пар вещественных чисел была построена Гамильтоном (1837). Геометрическое истолкование комплексных чисел позволило определить многие понятия, связанные с функцией комплексного переменного, расширило область их применения. Стало ясно, что комплексные числа полезны во многих вопросах, где имеют дело с величинами, которые изображаются векторами на плоскости. Большой вклад в развитие теории функций комплексного переменного внесли русские и советские ученые Н. И. Мусхелишвили занимался ее применениями к теории упругости, М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев - к аэро- и гидродинамике, Н. Н. Богомолов и В. С. Владимиров - к проблемам квантовой теории поля.

.

В данном учебном пособии рассмотрены только самые важные вопросы теории функций комплексного переменного, их интегрирование и дифференцирование, а также применение для решения прикладных задач гидромеханики.

ГЛАВА 1. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§ 1. Алгебра комплексных чисел

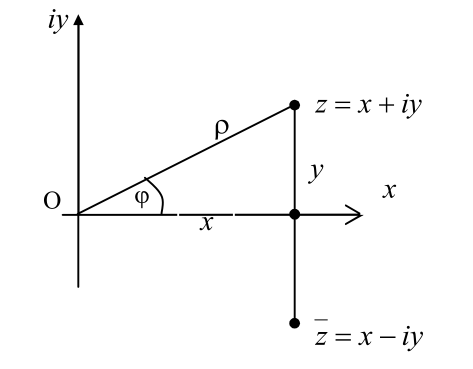


Рисунок 1.1

Определение 1.1. *Комплексным числом* называется выражение вида

$$z = x + i\,y \qquad (1.1)$$

где x и y - любые действительные числа, а i - мнимая единица, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$, x – *действительная часть*, а y – *мнимая часть* комплексного числа z, что можно записать в виде

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z \qquad (1.2)$$

Определение 1.2. *Модулем* комплексного числа называется величина

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.3)$$

Определение 1.3. *Аргументом* комплексного числа называется угол между ρ и осью x (рис. 1.1)

$$\varphi = \mathrm{A}rg\, z, \quad \mathrm{A}rg\, z = \arg z + 2k\pi, \ (k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ldots), \qquad (1.4)$$

где $\arg z$ есть *главное значение* $\operatorname{Arg} z$, которое определяется условиями

$$-\pi < \arg z \le \pi \qquad (1.5)$$

Положительным направлением изменения угла φ является движение против часовой стрелки.

Замечание 1. Аргумент комплексного числа $\varphi = \mathrm{A}rg\, z$ определяется в разных квадрантах по следующим формулам

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & \text{åñëè} \ x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}(y/x), & \text{åñëè} \ x < 0, \ y \ge 0, \\ -\pi + \operatorname{arctg}(y/x), & \text{åñëè} \ x < 0, \ y < 0, \\ \pi/2, & \text{åñëè} \ x = 0, \ y > 0, \\ -\pi/2, & \text{åñëè} \ x = 0, \ y < 0, \end{cases} \qquad (1.6)$$

где $$\operatorname{tg}(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{x}; \quad \sin(\operatorname{Arg} z) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \cos(\operatorname{Arg} z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (1.7)$$

Из (1.4) и (1.6) видно, что аргумент комплексного числа является многозначной функцией.

Замечание 2. Существует только одна точка на плоскости z, в которой комплексное число равно нулю, то есть,

$$z = x + iy = 0, \ \text{когда} \ x = 0, \quad y = 0 \qquad (1.8)$$

- это начало координат.

Следствие 1. Для того чтобы комплексное число равнялось нулю, необходимо, чтобы равнялись нулю его *действительная* и *мнимая* части, то есть $z = x + i\,y = 0$, если $x = 0, \quad y = 0$.

Определение 1.4. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряжённым* комплексному числу $z = x + i\,y$. Сопряжённое число $\bar{z}$ имеет модуль числа z, а его аргумент отличается знаком, то есть справедливо равенство

$$|z| = |\bar{z}|, \ \arg \bar{z} = -\arg z.$$

Определение 1.5. Два комплексные числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда их модули равны, а их аргументы отличаются на величину, кратную 2π:

$$|z_1| = |z_2|, \quad \operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (1.9)$$

или

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \qquad (1.10)$$

Определение 1.6. Суммой $z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \tag{1.11}$$

Определение 1.7. Разностью z_1 - z_2 комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \tag{1.12}$$

Определение 1.8. Произведением $z_1 \cdot z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \tag{1.13}$$

Следствие 2. Произведение числа z на сопряжённое $\bar{z}$ равно квадрату его модуля

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \tag{1.14}$$

Определение 1.9. Частным $\frac{z_1}{z_2}$ от деления комплексного числа z_1 на $z_2 \neq 0$ называется такое комплексное число z, которое удовлетворяет уравнению $z \cdot z_2 = z_1$. Для частного имеет место формула

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}, \tag{1.15}$$

Здесь использована формула $\frac{1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2}{|z_2|^2}$. Формулу (1.15) можно записать в виде

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \tag{1.15'}$$

1) Тригонометрическая и показательные формы комплексного числа

Если рассматривать комплексное число в декартовых и полярных координатах, то (см. рис.1.1) декартовы координаты получатся как проекции ρ. Связь между координатами получается в виде

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi. \tag{1.16}$$

Отсюда в *тригонометрическая форма* комплексного числа записывается так:

$$z = \rho\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{1.17}$$

Тригонометрическую форму легко получить из формулы Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,. \tag{1.18}$$

По этой же формуле получается *показательная форма комплексного числа*:

$$z = \rho \cdot e^{i\varphi} \tag{1.19}$$

Таким образом модуль комплексного числа $|z| = \rho$, а аргумент $\varphi = \arg e^{i\varphi}$. Если ρ = 1, то модуль показательной функции такого вида равен единице, то есть,

$$\left|e^{i\varphi}\right| = 1 \tag{1.20}$$

2) Важные примеры

1) $e^{2\pi i} = 1, \quad e^{\pi i} = -1, \quad e^{\frac{\pi}{2}i} = i, \quad e^{-\frac{\pi}{2}i} = -i.$

2) $\left.\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi \\ e^{-i\varphi} &= \cos\varphi - i\sin\varphi \end{aligned}\right\}$ или $e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$ - формула Эйлера.

Отсюда получаются известные формулы

3) $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}; \quad \sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}\,.$

3) Основные свойства $z=\rho\cdot e^{i\varphi}$

4) Показательная функция с мнимым аргументом $e^{i\varphi}$ обладает всеми свойствами показательной функции с действительным аргументом, то есть справедливы следующие формулы:

$e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$,

$e^{i\varphi_1}/e^{i\varphi_2}=e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$,

$(e^{i\varphi})^n=e^{in\varphi}$.

Отсюда легко получаются формулы умножения и деления комплексных чисел

5) $z_1\cdot z_2=\rho_1\,e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2\,e^{i\varphi_2}=\rho_1\rho_2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$,

6) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

4) Формула Муавра

Из формулы Эйлера получается формула Муавра следующим образом: с одной стороны $\left(e^{i\varphi}\right)^n=e^{in\varphi}=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$, а с другой - $\left(e^{i\varphi}\right)^n=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$. Так как левые части равны, то равны и правые, что приводит к формуле Муавра

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi \tag{1.21}$$

5) Извлечение корня

Введём обозначение $z^n=a$. Решим это уравнение при условии, что $a\neq 0$ - комплексное число, а n – натуральное число. Пусть $a=\rho\,e^{i\theta}$ тогда $r^n\,e^{in\varphi}=\rho\,e^{i\theta}$, отсюда $r^n=\rho$, $n\varphi=\theta+2k\pi$, Для извлечения корня n –ой степени нужно извлечь корень из модуля ρ, а аргумент разделить на n, то есть

$$\varphi_k=\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n},\quad r=\sqrt[n]{\rho}\qquad z_k=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i(\theta+2k\pi)/n},\ \ k=0,\pm1,\pm2,... \tag{1.22}$$

Отсюда видно, что среди всех чисел z_k получается ровно n различных значений.

Замечание 3. Геометрически полученные при извлечении корня значения z_k могут быть изображены точками на окружности радиуса r, потому что они все имеют один и тот же модуль, но отличаются углом φ_k, где $0<k<n-1$. Можно также рассматривать полученные значения z_k как вершины правильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса $r=\sqrt[n]{\rho}$.

6) Геометрическая интерпретация произведения двух комплексных чисел $w=z_1\cdot z_2$ **и инверсии** $w=\dfrac{1}{z}$

$$z_1\cdot z_2=\rho_1 e^{i\varphi_1}\cdot\rho_2 e^{i\varphi_2}=\rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

При умножении комплексного числа z_1 на z_2 вектор z_1 растягивается в $|z_2|$ раз и, кроме того, поворачивается (против часовой стрелки) на угол $\arg z_2$.

Замечание 4. Умножение комплексного числа z на i сводится к повороту (без растяжения) вектора z на прямой угол против часовой стрелки.

На рис.1.2 *а*) изображено построение произведения $w=z_1\cdot z_2$: чтобы получить z достаточно на отрезке Oz_1, как на основании, построить треугольник Oz_1z, подобный треугольнику $O1z_2$.

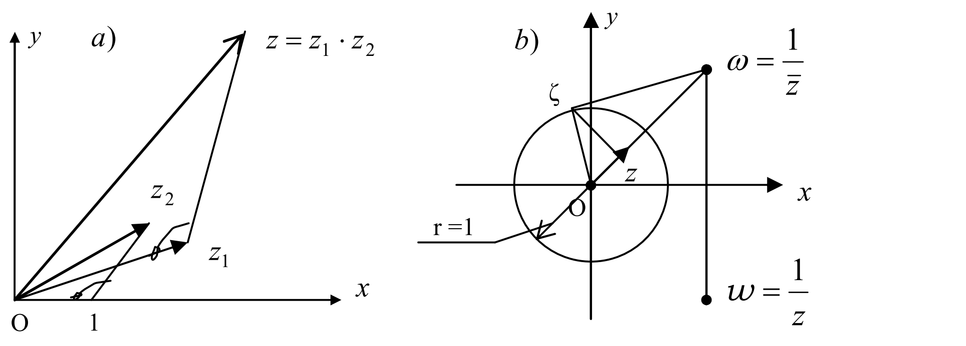


Рисунок 1.2

Для понимания деления рассмотрим функцию $w = \frac{1}{z}$, потому что деление комплексного числа z_1 на z_2 сводится к умножению z_1 на $\frac{1}{z_2}$, поэтому можно ограничится выяснением геометрического смысла $w = \frac{1}{z}$.

Рассмотрим случай когда $|z| < 1$ (рис.1.2 b).

Восстановим из точки z перпендикуляр к лучу Oz и через точку ζ пересечения перпендикуляра с окружностью $|z| = 1$ проведём касательную к этой окружности. Для точки ω пересечения построенной касательной с лучом Oz имеем, очевидно,

$$\operatorname{Arg}\omega = \operatorname{Arg} z,$$

а из подобия треугольников $Oz\zeta$ и $Ow\zeta$ следует, что $\left|\frac{\omega}{\varsigma}\right| = \left|\frac{\varsigma}{z}\right|$, откуда с учётом того, что $|\varsigma| = 1$ получается отношение $|\omega| = \frac{1}{|z|}$. Таким образом, число ω является сопряжённым с $\frac{1}{z}$, $\omega = \frac{1}{\bar{z}}$, (т.к. $\omega = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{z}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}$, $w = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$, сопряжённые числа). Для получения точки $w = \frac{1}{z}$ остаётся построить точку, сопряженную с ω относительно действительной оси.

Замечание 5. Переход от точки z к точке $\omega = \frac{1}{\bar{z}}$ называется *инверсией*, или *симметрией относительно единичной окружности* $|z| = 1$.

Замечание 6. Операция $w = \frac{1}{z}$ геометрически сводится к выполнению двух последовательных симметрий – инверсии и симметрии относительно действительной оси.

Замечание 7. Если $|z| > 1$, то описание построения следует вести в обратном порядке.

Замечание 8. Если $|z| = 1$, то точка $\omega = \frac{1}{\bar{z}}$ совпадает с z и построение $w = \frac{1}{z}$ сводится к симметрии относительно действительной оси.

§ 2. Функции комплексного переменного

1) Понятие окрестности точки на комплексной плоскости

Определение 2.1. *Окрестностью* точки z_o плоскости комплексной переменной z называется всякая область, содержащая эту точку.

Определение 2.2. δ – *окрестностью* точки z_o называется множество всех точек z, лежащих внутри круга радиуса δ с центром в точке z_o, т. е. множество всех точек z, удовлетворяющих неравенству $|z - z_o| < \delta$.

Определение 2.3. Точка z называется *внутренней* точкой множества E, если существует ε – окрестность точки z, все точки которой принадлежат множеству E.

Определение 2.4. Множество E называется *областью*, если выполняются следующие условия: 1) каждая точка множества E - *внутренняя* точка этого множества; 2) любые две точки множества E можно соединить кривой, все точки которой *принадлежат* E.

Замечание 1. В определении 2.4 второе требование является условием *связности* области. Например, $|z| < 1$ является областью, а $|z| \le 1$ не является областью, так как не все его точки являются *внутренними*.

Замечание 2. Для обозначения области обычно применяют буквы D, E, G и.т.п.

Определение 2.5. Точка z называется *внешней* точкой области D, если существует такая ε – окрестность точки z, все точки которой не принадлежат области D.

Определение 2.6. Точка z называется *граничной* точкой области D, если в любой ε – окрестности содержатся как точки, принадлежащие области D, так и точки, не принадлежащие области D. Например, точка $z = 1$ является граничной точкой круга $|z| < 1$.

Замечание 3. Совокупность всех граничных точек образует *границу области*.

Замечание 4. Граница может состоять из отдельных точек. Например, множество точек $z \ne 0$ образует на комплексной плоскости область, границей которой является одна точка $z = 0$.

Определение 2.7. Множество, полученное присоединением к области D всех её граничных точек, называется *замкнутой* областью и обозначается чертой, например, $\overline{D}$ или $\overline{G}$.

Замечание 5. Обычно рассматриваются области с кусочно – гладкой границей, которая, в частности, может вырождаться в отдельные точки. Такая область может быть как *односвязной*, так и *многосвязной*. Например, область $|z - i| < 2$ является односвязной с границей $|z - i| = 2$, а круговое кольцо $1 < |z| < 2$ представляет собой двусвязную область.

Определение 2.8. Если область D целиком лежит внутри некоторого круга конечного радиуса, то она называется *ограниченной*. В противном случае – *неограниченной*.

Определение 2.9. Говорят, что в области D определена функция $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно (*однозначная* функция) или несколько (*многозначная* функция) значений w.

Пусть $z = x + iy$ и $w = u + i\upsilon$. Тогда зависимость $w = f(z)$ между комплексной функцией w и комплексной переменной z может быть описана с помощью *двух действительных функций* u и υ *действительных* переменных x и y

$$f(z) = u(x, y) + i\upsilon(x, y) \tag{2.1}$$

Пусть в плоскости z кривая задана уравнением $F(x, y) = 0$. Чтобы найти уравнение образа $\Phi(u, \upsilon) = 0$ этой кривой в плоскости w при отображении с помощью функции $w = f(z) = u + i\upsilon$, нужно исключить x и y из уравнений

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ \upsilon = \upsilon(x, y), \\ F(x, y) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Если кривая задана параметрическими уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x = x(t) \\ y = y(t) \end{aligned}\right\},$$

то есть

$$z(t) = x(t) + iy(t), \tag{2.3}$$

то параметрические уравнения её образа при отображении $w = f(z) = u + i\upsilon$ будут

$$\left.\begin{aligned} u = u[x(t), y(t)] = U(t) \\ \upsilon = \upsilon[x(t), y(t)] = V(t) \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

2. Предел последовательности комплексных чисел.

Дана последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел

$$z_1, z_2, \ldots . z_n, \ldots . \tag{2.5}$$

Определение 2.10. Комплексное *число a* называется *пределом последовательности* $\{z_n\}$, если для любого положительного числа ε можно указать такой номер $N = N(\varepsilon)$, начиная с которого все элементы z_n этой последовательности удовлетворяют неравенству

$$|z_n - a| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geq N(\varepsilon)$$

Определение 2.11. Последовательность $\{z_n\}$, имеющая предел *a*, называется *сходящейся к числу a*, что записывается в виде

$$\lim_{n \to \infty} z_n = a \tag{2.6}$$

Замечание 6. *Каждой* последовательности комплексных чисел $\{z_n\}$ соответствуют *две* последовательности действительных чисел $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, где $z_n = x_n + iy_n$, $n = 1, 2, \ldots .$

Замечание 7. *Последовательность* $\{z_n = x_n + iy_n\}$ *сходится к числу* $a = \alpha + i\beta$ *тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \alpha, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = \beta. \tag{2.7}$$

Определение 2.12. Последовательность $\{z_n\}$ называется *ограниченной*, если существует положительное число *M* такое, что для всех элементов z_n этой последовательности выполняется неравенство $|z_n| \leq M$.

Следствие 1. Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

3) Свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел.

Если $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \tau_n = b$, то

1) Предел суммы последовательностей z_k и τ_k равен сумме их пределов

$$\lim_{n \to \infty} (z_n \pm \tau_n) = a \pm b. \tag{2.8}$$

2) Предел произведения двух последовательностей равен произведению их пределов

$$\lim_{n \to \infty} (z_n \tau_n) = ab. \tag{2.9}$$

3) Предел частного двух последовательностей равен частному их пределов, если их переделы не равны нулю

$$\lim_{n \to \infty} \frac{z_n}{\tau_n} = \frac{a}{b} \quad (\tau \neq 0; b \neq 0). \tag{2.10}$$

4) Бесконечно удалённая точка комплексной плоскости

Пусть имеем последовательность $\{z_n\}$ комплексных чисел

$$z_1, z_2, \ldots . z_n, \ldots .$$

Определение 2.13. Если для любого сколь угодно большого числа M > 0 существует натуральное число N такое, что все члены z_n последовательности с номерами n > N удовлетворяют неравенству $|z_n| > M$, то говорят, что последовательность $\{z_n\}$ *сходится к бесконечно удалённой точке* или, просто, к бесконечности[1], и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Замечание 8. Пополняя плоскость комплексного переменного бесконечно удалённой точкой $z = \infty$, получают *расширенную* плоскость комплексного переменного.

Окрестностью бесконечно удалённой точки называется совокупность всех точек z, удовлетворяющих неравенству $|z| > R$ (с присоединением бесконечно удалённой точки), т.е. совокупность всех точек z, лежащих вне круга достаточно большого радиуса *R*. с центром в начале координат.

Для удобства вводится понятие *комплексного числа* $z = \infty$. Практически *полная* (или *расширенная) комплексная плоскость* – это *обычная* комплексная плоскость плюс *бесконечно удалённая точка* $z = \infty$.

5) Предел функции в точке

Пусть функция *f(z)* определена в некоторой окрестности Ω точки z_o кроме, может быть, самой точки z_o.

Определение 2.14 (по Коши). Число *A* называется *пределом функции f*(z) *в точке* z_o, если для любого наперёд заданного сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $z \in \Omega$, удовлетворяющих условию $0 < |z - z_o| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{z\to z_o} f(z) = A$.

Здесь предполагается, что z_o и *A* – конечные точки комплексной плоскости.

Используют ещё одно определение предела функции в точке.

Определение 2.15 (по Гейне). Если для любой последовательности $\{z_n\}$, $z_n \neq z_o$, сходящейся к точке z_o, соответствующая ей последовательность значений функции $\{f(z_n)\}$ сходится к одному и тому же комплексному числу *A*, то число *A* называют *пределом функции* $f(z)$ *в точке* z_o

$$\lim_{z\to z_o} f(z) = A.$$

Здесь конечность z_o и *A* не предполагается. Существование предела $\lim\limits_{z\to z_o} f(z)$, где

$$f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y), \quad z_o = x_o + iy_o \tag{2.11}$$

равносильно существованию двух пределов

$$\lim_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}} u(x,y) \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}} \upsilon(x,y), \tag{2.12}$$

причем,

$$\lim_{z\to z_o} f(z) = \lim_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}} u(x,y) + i \lim_{\substack{x\to x_o\\ y\to y_o}} \upsilon(x,y). \tag{2.13}$$

6) Непрерывность функции комплексного переменного

Определение 2.16. Функция $f(z)$, заданная в области *D*, называется *непрерывной* в точке z_o, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех точек $z \in D$,

[1] Точки данной последовательности стремятся к точке $z = \infty$ независимо от направления на полной комплексной плоскости.

удовлетворяющих условию $|z - z_o| < \delta$, имеет место неравенство $|f(z) - f(z_o)| < \varepsilon.$, то есть, существует предел функции $f(z)$ в точке z_o и этот предел равнялся $f(z_o)$:

$$\lim_{z \to z_o} f(z) = f(z_o).$$

Замечание 9. Для непрерывности функции комплексной переменной

$$f(z) = u(x, y) + i\upsilon(x, y)$$

в точке $z_o = x_o + iy_o$ необходимо и достаточно, чтобы её действительная и мнимая части, т.е. функции $u(x, y)$ и $\upsilon(x, y)$, были непрерывны в точке (x_o, y_o) по совокупности переменных x и y.

Определение 2.17. Функция $f(z)$ комплексного переменного называется *непрерывной в области D*, если она непрерывна в каждой точке этой области.

7) Основные элементарные функции комплексного переменного

1) **Дробно – рациональная функция**

$$w = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_o}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_o}; \qquad (2.14)$$

в частности, рациональной функцией является многочлен

$$w = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_o.$$

2) **Показательная функция** e^z определяется как сумма абсолютно сходящегося во всей комплексной плоскости степенного ряда

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... \qquad (2.15)$$

Показательная функция обладает следующими свойствами:

а) $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, где z_1, z_2 - любые комплексные величины.;

б) $e^{z + 2k\pi i} = e^z \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, т.е. e^z является периодической функцией с периодом $2\pi i$.

3) **Тригонометрические функции** $\sin z$ и $\cos z$ определяются степенными рядами

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + ... + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + ..., \qquad (2.16)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ..., \qquad (2.17)$$

абсолютно сходящимися при любом комплексном значении z. Функции $\sin z$ и $\cos z$ периодические с действительным периодом 2π и имеют только действительные нули $z = k\pi, \quad z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ соответственно, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$

Для функций e^z, $\sin z$ и $\cos z$ имеют место формулы Эйлера

$$e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z, \qquad (2.18)$$

откуда

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \qquad (2.19)$$

Функции $\mathrm{tg}\, z$ и $\mathrm{ctg}\, z$ определяются равенствами

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z}..$$

Замечание 10. Для тригонометрических функций остаются в силе все формулы тригонометрии.

4) Гиперболические функции $\operatorname{sh} z, \operatorname{ch} z, \operatorname{th} z, \operatorname{cth} z$ определяются равенствами

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \tag{2.20}$$

$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \tag{2.21}$$

Гиперболические и *тригонометрические* функции связаны между собой $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} &\sin z = -i \operatorname{sh} iz, \quad \operatorname{sh} z = -i \sin iz, \\ &\cos z = \operatorname{ch} iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz, \\ &\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz, \quad \operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \\ &\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth} iz, \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz. \end{aligned} \tag{2.22}$$

5) Логарифмическая функция $\operatorname{Ln} z$, где $z \neq 0$, определяется как функция, обратная показательной, причём

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i \tag{2.23}$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Эта функция является *многозначной*. Главным значением $\operatorname{Ln} z$ называется то значение, которое получается при $k = 0$; оно обозначается $\ln z$:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Очевидно, что

$$\operatorname{Ln} z = \ln z + 2k\pi i. \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2, \\ &\operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

6) Обратные тригонометрические функции

$\operatorname{Arcsin} z$, $\operatorname{Arccos} z$, $\operatorname{Arctg} z$, $\operatorname{Arcctg} z$ определяются как функции, обратные соответственно функциям $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$. Например, если $z = \sin w$, то w называется арксинусом числа z и обозначается $w = \operatorname{Arcsin} z$.

Замечание 11. Все эти функции являются многозначными и выражаются через логарифмические функции следующим образом:

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}); \tag{2.24а}$$

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}); \tag{2.24б}$$

$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}; \tag{2.24в}$$

$$\operatorname{Arcctg} z = -\frac{1}{2} \operatorname{Ln} \frac{z + i}{z - i}. \tag{2.24г}$$

Замечание 12. Главные значения обратных тригонометрических функций получаются, если брать главные значения соответствующих логарифмических функций.

7) Общая степенная функция $w = z^a$, где $a = \varepsilon + i\beta$ - любое комплексное число, определяемое равенством

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}. \tag{2.25}$$

Эта функция, вообще говоря, многозначна, её главное значение равно $z^a = e^{a \ln z}$.

8) Общая показательная функция $w = a^z$ ($a \neq 0$ - любое комплексное число) определяется равенством

$$a^z = e^{z\,Ln\,a}. \qquad (2.26)$$

Главное значение этой многозначной функции $a^z = e^{z \ln a}$ или $a^z = \ln a \cdot e^z$.

§ 3. Дифференцирование функций комплексного переменного. Условия Коши – Римана

Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой области D комплексного переменного z. Пусть точки z и $z + \Delta z$ принадлежат области D. Обозначим приращение функции

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y. \qquad (3.1)$$

Определение 3.1. Функция $w = f(z)$ называется *дифференцируемой в точке* $z \in D$, если отношение $\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ имеет конечный предел при Δz, стремящемся к нулю произвольным образом. Этот предел называется производной функции $f(z)$ в данной точке z и обозначается символом $f'(z)$ (или w' или $\dfrac{dw}{dz}$), так что по определению

$$w' = f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \qquad (3.2)$$

Так как функция $w = f(z)$ в общем случае записывается в виде суммы двух функций действительных переменных x, y в виде

$$f(z) = u(x, y) + i\upsilon(x, y), \qquad (3.3)$$

то следует выяснить, какими свойствами должны обладать функции $u(x, y)$ и $\upsilon(x, y)$, чтобы производная $f'(z)$ существовала и не зависела от направления, по которому Δz стремится к нулю (то есть Δz должна стремиться к нулю *произвольным образом*).

Приращение функции можно записать в виде:

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta\upsilon.$$

Рассмотрим пределы отношений приращений Δw, Δu и $\Delta\upsilon$ к приращениям независимых переменных Δx и $i\Delta y$, то есть

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}, \qquad (3.4)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta w}{i\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta u}{i\Delta y} + i \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta\upsilon}{i\Delta y}. \qquad (3.5)$$

Отсюда по определению производной запишем соответственно

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial\upsilon}{\partial x}, \qquad (3.6)$$

$$\frac{\partial w}{i\partial y} = \frac{\partial u}{i\partial y} + i\frac{\partial\upsilon}{i\partial y} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial\upsilon}{\partial y}. \qquad (3.7)$$

Для того, чтобы производная не зависела от направления Δx и $i\Delta y$ и при этом $\Delta z \to 0$, необходимо, чтобы левые части выражений (3.6) и (3.7) были равны между собой, то есть выполнялось равенство

$$\frac{\partial w}{i\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

С учётом того, что две комплексных функции равны между собой только, когда равны между собой их действительные и мнимые части, должны выполняться равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial\upsilon}{\partial y}, \quad \frac{\partial\upsilon}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (3.8)$$

Это и есть условия существования производной комплексной функции $\omega = f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y)$, в любой точке $z = x + iy$ ($z \in D$), которые называются *условиями Коши – Римана.*

Условия Коши – Римана. *Для существования производной комплексной функции* $f(z)$ *в каждой точке* $z = x + iy$ *области* $z \in D$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (3.8).

Обратно, если в некоторой точке (*x,y*) функции $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ дифференцируемы как функции действительных переменных x и y и, кроме того удовлетворяют соотношениям Коши_Римана, то функция $f(z) = u + i\upsilon$ является *дифференцируемой в точке* $z = x + iy$ *как функции комплексного переменного* z.

Для любой *дифференцируемой* функции $f(z)$, благодаря независимости от направления $\Delta z \to 0$, справедливы равенства

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial \upsilon}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y} + i\frac{\partial \upsilon}{\partial x}. \qquad (3.9)$$

Определение 3.2. Функция $\varphi(x,y)$ называется *гармонической в области* D, если она имеет в этой области непрерывные частные производные до второго порядка включительно и удовлетворяет в этой области уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0. \qquad (3.10)$$

Проверим, являются ли гармоническими функции $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$, образующие комплексную функцию $\omega = f(z)$. Для этого продифференцируем равенства условий Коши – Римана первое по x и второе по y. Тогда

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Так как смешанные производные не зависят от порядка дифференцирования и в данных выражениях, естественно, равны между собой, то получается, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \text{ или } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (3.11)$$

Следовательно, функция $u(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то есть является *гармонической* функцией. Аналогично, дифференцируя равенства условий Коши – Римана по y и по x, получим

$$\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}.$$

Откуда, при равенстве смешанных производных получается

$$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2} = 0, \qquad (3.12)$$

то есть функция $\upsilon(x,y)$ тоже является гармонической.

Следствие 1. Если функции $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ удовлетворяют условиям Коши – Римана, то каждая из них обязательно удовлетворяет уравнению Лапласа, то есть является *гармонической функцией.*

Определение 3.3. Функция $\omega = f(z)$ называется *аналитической в данной точке* $a \in D$ открытой области D, если она дифференцируема как в самой точке a, так и в некоторой её окрестности.

Определение 3.4. Точка a в этом случае называется *правильной точкой* данной функции, а всякая неправильная точка называется *особой точкой*. Например, у функции $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ все точки правильные, за исключением точки $z = 1$.

Замечание 1. Термины *дифференцируемая, аналитическая, регулярная, голоморфная* применяются разными авторами в одном и том же смысле.
Определение 3.5. Функции $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$, удовлетворяющие условиям Коши – Римана, называются *сопряжёнными* функциями.

Свойства аналитических функций

Вспомним определение аналитической функции одной действительной переменной: если функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(-r,r)$ в степенной ряд, то она называется *аналитической функцией* переменной x на этом интервале.
Определение 3.6. Если функция $f(z)$ *дифференцируема* во всех точках области G, а её производная непрерывна в этой области, то функция $f(z)$ называется *аналитической функцией в области* G.
Замечание 2. Это выражение отличается дополнительным требованием *непрерывности производной.*
Замечание 3. Непрерывность частных производных является достаточным условием существования первого дифференциала (дифференцируемости) функции многих переменных.
Замечание 4. *Необходимым и достаточным условием аналитичности* функции $f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$ в области G является существование в этой области непрерывных частных производных функций $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$, связанных соотношением Коши – Римана.
Замечание 5. Если функция $f(z)=u+i\upsilon$ *аналитична* в некоторой области *D,* то её действительная часть $u(x,y)$ и мнимая часть $\upsilon(x,y)$ являются *сопряжёнными гармоническими* в этой области функциями.
Замечание 6. Однако, если $u_1(x,y)$ и $\upsilon_1(x,y)$ - любые две *гармонические* функции $f_1(z)=u_1(x,y)+i\upsilon_1(x,y)$, то она вовсе не обязана быть аналитической функцией. Для аналитичности функции $f_1(z)$ нужно, чтобы функции u_1 и υ_1 дополнительно удовлетворяли условиям Коши – Римана.
Замечание 7. Если функция $w=f(z)$ *аналитична в области* D и $|f'(z)|\neq 0$ в окрестности некоторой точки $z_o\in D$, то в окрестности точки $w_o=f(z_o)$ области G значений функции $f(z)$ определена *обратная функция* $z=\varphi(w)$, являющаяся *аналитической функцией* комплексной переменной w. При этом имеет место соотношение $f'(z_o)=\dfrac{1}{\varphi'(w_o)}$.
Замечание 8. Если функции $W=F(w)$ и $w=f(z)$ - обе *аналитические,* то сложная функция $W=F[f(z)]$ есть *аналитическая* функция от z.
Теорема Вейерштрасса (без доказательства). *Если последовательность (или ряд) функций $f_k(z)$, аналитических в открытой области D, сходится равномерно*[2] *к пределу $f(z)$ всюду в D, то $f(z)$ - аналитическая функция и последовательность (или ряд) производных $f_k'(z)$ тоже сходится равномерно к $f'(z)$ всюду в D.*

Замечание 9. В условии теоремы Вейерштрасса можно принять, что последовательность (или ряд) контурных интегралов $\int\limits_C f_k(z)\,dz$, где контур C – конечной длины и целиком лежит в D, сходится равномерно к $\int\limits_C f(z)\,dz$.

[2] Последовательность функций $f_o(x)$, $f_1(x), f_2(x),\ldots, f_k(z)\ldots$ называется *равномерно* сходящейся к функции $f(z)$, если для любого положительного числа $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что при $k>N$ и при всех $z\in D$ выполняется неравенство $|f_k(z)-f(z)|<\varepsilon$.

Принцип максимума и лемма Шварца

Лемма. *Если в некоторой области* D: 1) *постоянна действительная часть аналитической функции* $f(z)$ *или* 2) *постоянен её модуль, то и сама эта функция постоянна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $u(x,y)=C$, то $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$, но по условию Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0$, а отсюда $\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=0$. Отсюда доказано первое утверждение. Для доказательства второго рассмотрим $|f(z)|=M$. Если $M=0$, то доказательство очевидно. Если $M\neq 0$, $\ln f(z)=\ln|f(z)|+i\arg f(z)$, тогда при $\ln|f(z)|=const$ и $\arg f(z)=const$ по условию 1 этой леммы. Отсюда постоянен логарифм, а значит и сама функция $f(z)$.

Теорема о максимуме модуля *Если функция* $f(z)$ *не равна тождественно постоянной, аналитична в области* D *и непрерывна в* $\overline{D}$*, то её модуль не может достигать максимального значения во внутренней точке области* D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим от противного, что $|f(z)|$ достигает максимума M внутри D и E есть множество точек D, для которых $|f(z)|=M$. Если $\mathrm{E}=D$, то всюду в D имеем $|f(z)|=M$ и тогда из леммы следует, что $f(z)$ постоянна в D, что противоречит условию теоремы. Если E охватывает границу D, то существует точка z_o этого множества, которая является внутренней точкой D. В силу непрерывности $f(z)$ имеется $|f(z_o)|=M$, потому что в любой окрестности z_o есть точки E. Построим окружность C $|z-z_o|=r$, принадлежащую области D, так чтобы на ней имелась хотя бы одна точка z_1, не принадлежащая множеству E (т.к. z_o - граничная точка E). Тогда $|f(z_1)|<M$ и для любого достаточно малого $\varepsilon>0$, в силу непрерывности $|f(z)|$ всегда можно указать такую содержащую точку z_1 часть C_1 окружности C, на которой

$$|f(z)|<M-\varepsilon. \tag{3.13}$$

Обозначим через C_2 оставшуюся часть окружности. На ней, очевидно,

$$|f(z)|\le M\ . \tag{3.14}$$

Из формулы $f(z_o)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z)d\varphi$, имеем

$$f(z_o)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z)\,d\varphi=\frac{1}{2\pi r}\left\{\int\limits_{C_1} f(z)ds+\int\limits_{C_2} f(z)ds\right\}, \tag{3.15}$$

где $ds=r\,d\varphi$ - элемент длины окружности C. Переходя в (3.15) к абсолютным величинам и учитывая неравенства (3.13 и (3.14), получим: $M=|f(z_o)|\le\frac{1}{2\pi r}\{(M-\varepsilon)\,l_1+M\,l_2\}=M-\frac{\varepsilon\,l_1}{2\pi r}$, где соответственно l_1 и l_2 - длины C_1 и C_2 ($l_1+l_2=2\pi r$). Но последнее неравенство невозможно, чем и доказывается этот принцип.

Замечание 9. Эта теорема справедлива и для *минимума функции* $f(z)$.

Лемма Шварца (1843 – 1921) *Если функция* $f(z)$ *аналитична в круге* $|z|<1$ *и непрерывна в замкнутом круге, причём* $f(0)=0$*, и если всюду в круге* $|f(z)|\le 1$*, то в том же круге* $|f(z)|\le|z|$. *При этом, если хотя бы в одной внутренней точке круга* $|f(z)|=|z|$*, то последнее равенство имеет место во всём круге и* $f(z)=e^{i\alpha}z$*, где* α *- действительная постоянная.*

§ 4. Интегрирование функций комплексного переменного

Пусть однозначная функция $f(z)$ определена и непрерывна в области *D*, а C – кусочно-гладкая замкнутая или незамкнутая ориентируемая кривая, лежащая в *D*.

Определение 4.1. Интегралом от $f(z)$ вдоль контура C называют предел последовательности интегральных сумм вида $\sum_{k=0}^{n} f(\varsigma_k)(z_{k+1}-z_k)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)(z_k - z_{k-1}) = \int_C f(z)\,dz, \tag{4.1}$$

где $z_o = a,\ z_1,...,z_n = b$ - последовательные точки, разбивающие контур *C* на n участков; через a и b обозначены концы контура С, ς_k - произвольная точка, лежащая на участке $[z_{k-1}, z_k]$ кривой *C*, и предел берётся в предположении, что $\max|z_k - z_{k-1}| \to 0.$

Теорема 4.1. *Если C – кусочно – гладкая кривая, а* $f(z)$ *- кусочно – непрерывная функция, то интеграл* (4.1) *существует.*

В самом деле, положив

$$\begin{gathered} f(z) = u(x,y) + i\upsilon(x,y),\quad z_k = x_k + iy_k,\quad x_k - x_{k-1} = \Delta x_k,\quad y_k - y_{k-1} = \Delta y_k, \\ \varsigma_k = \xi_k + i\eta_k,\quad u(\xi_k,\eta_k) = u_k,\quad \upsilon(\xi_k,\eta_k) = \upsilon_k, \end{gathered} \tag{4.2}$$

получим

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)(z_{k+1} - z_k) = \sum_{k=1}^{n}\{u_k\Delta x_k - \upsilon_k\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}\{u_k\Delta y_k + \upsilon_k\Delta x_k). \tag{4.3}$$

Суммы в правой части (4.3) являются интегральными суммами для соответствующих криволинейных интегралов. При описанных выше условиях эти интегралы существуют и, следовательно, существует интеграл

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C u\,dx - \upsilon\,dy + i\int_C \upsilon\,dx + u\,dy \tag{4.4}$$

Определение 4.2. Замкнутым контуром называют кусочно – гладкую кривую, *не имеющую точек самопересечения, когда концы кривой* a *и* b *совпадают*.

Замечание 1. С помощью формулы (4.4) вычисление интеграла от функции комплексного переменного *сводится* к вычислению действительных криволинейных интегралов.

Применяя введённые определения, легко видеть, что производная и интеграл от комплексной функции действительного переменного $w(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$ представляются следующими линейными комбинациями:

$$w'(t) = \varphi'(t) + i\psi'(t), \tag{4.5}$$

$$\int_\alpha^\beta w(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta \psi(t)\,dt. \tag{4.6}$$

Пусть $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ даёт параметрическое представление кривой *C*, причём $z(\alpha) = a, z(\beta) = b;$ тогда, пользуясь формулой (4.4), мы сведём вычисление интеграла от $f(z)$ вдоль *C* к вычислению интеграла от комплексной функции действительного переменного:

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,dt. \tag{4.7}$$

Из формулы (4.4) вытекает также, что на интегралы от функций комплексного переменного распространяются обычные свойства *криволинейных* интегралов:

1. $\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz\,,$ (4.8)

2. $\int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1+C_2} f(z)\,dz\,,$ (4.9)

Через C_1+C_2 обозначена кривая, состоящая из C_1 и C_2. Иногда используют равенство

$$\int_C f(z)\,dz = -\int_{C^-} f(z)\,dz, \tag{4.10}$$

где через C^- обозначена кривая, совпадающая с C, но проходимая в противоположном направлении.

3. Если a - комплексная постоянная, то $\int_C a\,f(z)\,dz = a\int_C f(z)\,dz$.

Замечание 2. Обобщая свойства **2** и **3**, можно записать так:

$$\int_C \{af(z)+bg(z)\}\,dz = a\int_C f(z)\,dz + b\int_C g(z)\,dz, \tag{4.11}$$

где a и b - комплексные постоянные,

4. $\int_C [f_1(z)+f_2(z)]dz = \int_C f_1(z)\,dz + \int_C f_2(z)\,dz$, (4.12)

5. $\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le \int_C |f(z)|\,ds$, где ds - дифференциал длины дуги кривой C, и интеграл, стоящий справа, является криволинейным интегралом первого рода. Действительно, в силу неравенства треугольника можно записать

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| = \left|\lim_{\max|\Delta\zeta_i|}\sum_{i=1}^n f(\zeta_i)\Delta\zeta_i\right| \le \lim_{\max|\Delta\zeta_i|}\sum_{i=1}^n |f(\zeta_i)||\Delta\zeta_i| = \int_C |f(z)|\,ds.$$

Если $\max\limits_{\zeta\in C}|f(\zeta)| = M$ и L - длина дуги кривой C, то получают верхнюю оценку интеграла

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \le M\cdot L. \tag{4.13}$$

6. Имеет место следующая формула замены переменной интегрирования

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\Gamma f[\varphi(\zeta)]\varphi'(\zeta)\,d\zeta, \tag{4.14}$$

где $z=\varphi(\zeta)$ - аналитическая функция, устанавливающая взаимно-однозначное соответствие между кривыми C и Γ. (Ср. (4.7), где $z = z(t)$ есть параметрическое задание кривой C, $z(\alpha)$ и $z(\beta)$ суть начальная и конечная точки этой кривой).

П р и м е р (важен для дальнейшего). Вычислить интеграл по комплексной переменной

$$I = \int_{C_\rho} \frac{d\zeta}{\zeta - z_o},$$

где кривая C_ρ представляет собой окружность радиуса ρ с центром в точке z_o, обходимую против часовой стрелки. Воспользовавшись параметрической формой задания окружности C_ρ: $\zeta = z_o + \rho e^{i\varphi}$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$, получим

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi}d\varphi}{\rho e^{i\varphi}} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \tag{4.15}$$

Замечание 3. Интеграл I не зависит ни от радиуса окружности ρ, ни от положения её центра z_o.

В общем случае $\int_C f(z)\,dz$ зависит как от подынтегральной функции, так и от кривой C. Однако, если функция *аналитична* в некоторой области, содержащей кривую C, то интеграл полностью определяется положением концов кривой C и не зависит от вида этой кривой. Имеет место следующая теорема:

Первая теорема Коши (1825 г.) *Если функция* $f(z)$ *аналитична в односвязной области D, то для всех кривых C, лежащих в этой области и имеющих общие концы, интеграл* $\int\limits_C f(z)\,dz$ *имеет одно и то же значение* (т.е. интеграл не зависит от пути интегрирования).

Замечание 4. Мы докажем эту теорему при дополнительном предположении непрерывности производной $f'(z)$ (в определении *аналитичности* требуется лишь существование этой производной).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, как всегда, $f(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$; в силу соотношения

$$\int\limits_C f(z)\,dz=\int\limits_C u\,dx-\upsilon\,dy+i\int\limits_C \upsilon\,dx+u\,dy \tag{4.16}$$

вопрос о независимости интеграла $\int\limits_C f(z)\,dz$ от пути сводится к вопросу о независимости от пути криволинейных интегралов

$$\int\limits_C u\,dx-\upsilon\,dy,\quad \int\limits_C \upsilon\,dx+u\,dy \tag{4.17}$$

Но, как известно из анализа, в односвязной области для независимости от пути криволинейного интеграла $\int\limits_C P\,dx+Q\,dy,$ где P и Q – функции, обладающие непрерывными частными производными, необходимо и достаточно, чтобы выражение, стоящее под знаком этого интеграла было полным дифференциалом, т.е. чтобы в каждой точке области D имело место соотношение $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

Для интегралов (4.13) эти соотношения записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x};\quad \frac{\partial \upsilon}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{4.18}$$

непрерывность же частных производных вытекает из предположения о непрерывности $f'(z)$. Уравнения (4.18) совпадают с условиями Коши – Римана и удовлетворяются, так как $f(z)$ *аналитическая* функция. Что и доказывает теорему.

Замечание 5. В силу этой теоремы Коши для функций, аналитических в односвязных областях, вместо $\int\limits_C f(z)\,dz$ можно писать $\int\limits_{z_o}^{z} f(\varsigma)\,d\varsigma,$ где через z_o и z обозначены концы кривой C.

Замечание 6. Основываясь на теореме Коши, можно доказать ряд предложений, аналогичных предложениям интегрального исчисления.

Теорема 4.2. *Если функция* $f(z)$ *аналитична в односвязной области D, то интеграл*

$$\int\limits_{z_o}^{z} f(\varsigma)\,d\varsigma=F(z), \tag{4.19}$$

рассматриваемый в зависимости от своего верхнего предела, также является аналитической в D функцией, причём

$$F'(z)=\frac{d}{dz}\int\limits_{z_o}^{z} f(\varsigma)\,d\varsigma=f(z), \tag{4.20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, по определению производной и свойствам интеграла (4.19) и (4.20) имеем:

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\left\{\int\limits_{z_o}^{z+\Delta z} f(\varsigma)d\varsigma-\int\limits_{z_o}^{z} f(\varsigma)d\varsigma\right\}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int\limits_{z}^{z+\Delta z} f(\varsigma)d\varsigma \tag{4.21}$$

В силу непрерывности $f(z)$ в точке z можно записать: $f(\varsigma)=f(z)+\eta(\varsigma)$, где $\eta(\varsigma)\to 0$ при $\varsigma\to z$; подставляя это в (4.20), получим:

$$F'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\varsigma+\lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\eta(\varsigma)d\varsigma \qquad (4.22)$$

Так как $f(z)$ - постоянная величина при интегрировании по ζ, то

$$\int_{z}^{z+\Delta z} f(z)d\varsigma=f(z)\int_{z}^{z+\Delta z} d\varsigma=f(z)\cdot\Delta z,$$

ибо из определения непосредственно следует, что $\int_{z}^{z+\Delta z} d\varsigma=\Delta z.$ Далее из неравенства (4.13) имеем:

$$\left|\int_{z}^{z+\Delta z}\eta(\varsigma)d\varsigma\right|\le \max|\eta(\varsigma)|\cdot|\Delta z|$$

(путь интегрирования от точки z до точки $z+\Delta z$ по теореме 1 можно считать прямолинейным, поэтому его длина равна $|\Delta z|$). Таким образом, в (4.22) первый предел равен $f(z)$, а второй – нулю, т.е. $F'(z)=f(z)$, ч.т.д.

Замечание 7. Следует учесть, что функция, производная которой равна заданной функции $f(z)$, называется *первообразной* этой функции. Доказанная теорема утверждает, что интеграл от $f(z)$, рассматриваемый как функция своего верхнего предела, является *одной из первообразных функции* $f(z)$.

Теорема 4.3. *Любые две первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга не более чем на постоянное слагаемое.*

Пусть $F_1(z)$ и $F_2(z)$ - эти первообразные и

$$\Phi(z)=F_1(z)-F_2(z)=u(x,y)+i\upsilon(x,y)$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что функция $\Phi(z)$ постоянна. Так как по нашему условию

$$\Phi'(z)=F_1'(z)-F_2'(z)=f(z)-f(z)=0.$$

Учитывая равенство (3.9), можно записать, что $\Phi'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0$, а тогда $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=0,\ \ \frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0,$ следовательно, $u(x,y)$ и $\upsilon(x,y)$ постоянны. Таким образом, теорема доказана.

Замечание 8. Следующая теорема позволяет вычислять интегралы с помощью первообразной (Аналог формулы Ньютона – Лейбница)

Теорема 4.4. *Если* $F(z)$ *- произвольная первообразная аналитической функции* $f(z)$*, то*

$$\int_{z_o}^{z} f(\varsigma)\,d\varsigma=F(z)-F(z_o). \qquad (4.23)$$

В самом деле, по теореме 4.3 функция

$$F_1(z)=\int_{z_o}^{z} f(\varsigma)\,d\varsigma$$

является одной из первообразных для $f(z)$, функция $F(z)$ по условию тоже первообразная, следовательно, можно положить

$$\int_{z_o}^{z} f(\varsigma)\,d\varsigma=F(z)+C,$$

где C – некоторая постоянная. Полагая в этом равенстве $z=z_o$, найдём $F(z_o)+C=0,$ откуда $C=-F(z_o),$ что и даёт искомую формулу (4.23).

Вторая теорема Коши. *Если функция* $f(z)$ *аналитична в односвязной области D, то её интеграл вдоль любого замкнутого контура C, лежащего в D, равен нулю*

$$\int_C f(z)\,d\,z = 0\,.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замкнутый контур C можно разделить на два контура A и B, с общим началом и концом в точках C_1 и C_2. По свойству интегралов менять знак при изменении направления обхода можно записать

$$\oint_C f(z)\,d\,z = \int_{C_1AC_2} f(z)\,d\,z + \int_{C_2BC_1} f(z)\,d\,z = \int_{C_1AC_2} f(z)\,d\,z - \int_{C_1BC_2} f(z)\,d\,z$$

но в силу независимости интегралов от аналитической функции от пути интегралы $\int_{C_1AC_2} f(z)\,d\,z$ и $\int_{C_1BC_2} f(z)\,d\,z$ равны между собой, так как имеют общее начало и общий конец, следовательно, их разность равна нулю. Отсюда, равенство между собой интегралов вдоль A и B равносильно равенству нулю интеграла по замкнутому контуру С. *Что и требовалось доказать.*

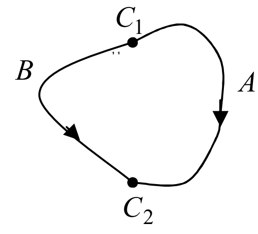


Рисунок 4.1

Теорема Г. Морера (1886) *Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл $\int_C f(z)\,d\,z$ по любому замкнутому контуру, лежащему в области D, равен 0, то $f(z)$ аналитична в этой области.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы следует, что в области D интеграл по второй теореме Коши $\int_{z_o}^{z} f(z)\,d\,z$ не зависит от пути интегрирования, т.е. при фиксированном z_o определяет некоторую функцию z:

$$F(z) = \int_{z_o}^{z} f\,(z)\,d\,z.$$

Из теоремы (4.2) о производной от интеграла с переменным верхним пределом известно, что производная от этого интеграла равна подынтегральной функции $F'(z) = f(z)$, т.е. аналитична. Но тогда по теореме 4.2 функция $f(z)$ как производная аналитической функции в свою очередь является аналитической. *Теорема Морера доказана.*

Теорема Коши – Лиувилля. *Если функция $f(z)$ аналитична во всей плоскости и ограничена, то она постоянна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть всюду $|f(z)| \le M$. Для произвольной точки z плоскости и для любого R справедливо неравенство (это неравенство выводится из формулы 5.10 при $n=1$):

$$|f'(z)| \le \frac{M}{R}$$

Так как здесь левая часть не зависит от R, а правая при увеличении R может быть сделана сколь угодно малой, то $|f'(z)| \equiv 0$. Отсюда, по формуле $\int_{z_o}^{z} f(\varsigma)\,d\varsigma = F(z) - F(z_o)$ для комплексных функций получается $f(z) - f(z_o) = \int_{z_o}^{z} f'(z)\,d\,z \equiv 0$, т.е. функция постоянна. *Теорема Коши – Лиувилля доказана.*

Замечание 9. Теорема впервые доказана О. Коши (1844), но существенно использовалась в работах французского математика Жозефа Лиувилля (1809 – 1882).

Замечание 10. Формула (4.4), в силу которой интеграл по комплексной переменной представляет собой комплексное число, действительная и мнимая части которого являются криволинейными интегралами второго рода, а также соотношение (4.15) позволяют непосредственно перенести понятие несобственного интеграла от функции действительной переменной на случай комплексной переменной.

Определение 4.3. *Несобственный интеграл первого рода* по бесконечной кривой C называется *сходящимся*, если существует предел последовательности интегралов $\int\limits_{C_n} f(\zeta)d\zeta$ по любой последовательности конечных кривых C_n, составляющих часть C при C_n, стремящихся к C, причём этот предел не зависит от выбора последовательности $\{C_n\}$.

Определение 4.4. Если существует предел последовательности интегралов $\int\limits_{C_n} f(\zeta)d\zeta$ лишь при вполне определённом выборе последовательности $\{C_n\}$, то несобственный интеграл называется сходящимся **в смысле главного значения**.

§ 5. Интегральные формулы Коши

Интегральная теорема Коши. *Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и непрерывна в $\overline{D}$. Покажем, что для любой внутренней точки z в этой области имеет место формула Коши (1831 г.)*:

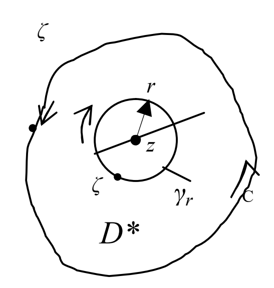


Рисунок 5.1

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} \tag{5.1}$$

где C – граница области D, проходимая так, что область D остаётся всё время слева.

Замечание 1. Отметим, что в правую часть формулы Коши входят лишь значения $f(z)$ *на границе C этой области D.* Таким образом, в принятых условиях значения функции внутри области *вполне определяются её значениями на границе*: формула Коши позволяет вычислить значение функции в любой точке области, коль скоро известны граничные значения этой функции.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство состоит из трёх этапов.

Этап 1. Для вывода формулы Коши мы выбросим из области D кружок радиуса r с центром в точке z и заметим, что в полученной $(n+1)-$связной области D^* числитель и знаменатель подынтегральной функции аналитичны относительно переменной ζ, причём знаменатель не обращается в нуль. Следовательно, подынтегральная функция аналитична относительно ζ в D^*. Так как она непрерывна в $\overline{D}^*$, то по первой теореме Коши и с учётом формулы $\int\limits_{C^*} f(z)\,dz = \int\limits_{C_O} f(z)\,dz + \sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{C_k} f(z)\,dz = 0$ можно написать

$$\oint\limits_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} + \oint\limits_{\gamma_r^-} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} = 0$$

где окружность γ_r^- проходится по часовой стрелке. Отсюда следует, что

$$\oint\limits_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} = \oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z}, \tag{5.2}$$

где γ_r проходится против часовой стрелки.

Этап 2. Рассмотрим интеграл $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)d\varsigma}{\varsigma - z}$. На окружности γ_r имеем $\varsigma - z = re^{i\varphi}$, поэтому, вынося за знак интеграла постоянный относительно ζ множитель $f(z)$, найдём

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r} \frac{f(z)d\varsigma}{\varsigma - z} = \frac{f(z)}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \frac{r\,i\,e^{i\varphi}d\varphi}{r\,e^{i\varphi}} = \frac{f(z)}{2\pi i}\cdot i\cdot\int\limits_0^{2\pi} d\,\varphi = \frac{f(z)}{2\pi i}\cdot i\cdot \varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{f(z)}{2\pi i}\,i\,2\,\pi = f(z). \tag{5.3}$$

Отсюда $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{f(z)d\varsigma}{\varsigma-z}$.

На основании формул (5.2) и (5.3) имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(\varsigma)\,d\varsigma}{\varsigma-z}-f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r}\frac{f(\varsigma)-f(z)}{\varsigma-z}\,d\varsigma \qquad (5.4)$$

Этап 3. Оценим разность в числителе правой части. Согласно неравенству

$$\left|\int\limits_C f(z)\,dz\right|\le\int\limits_C|f(z)||dz|\le M\,l$$

(см. в предыдущем параграфе формулу (4.13)) и с учётом (5.3), имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{d\varsigma}{\varsigma-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{r\,i\,e^{i\varphi}d\varphi}{r\,e^{i\varphi}}=\frac{1}{2\pi i}\cdot i\cdot\int\limits_0^{2\pi}d\,\varphi=\frac{1}{2\pi i}\cdot i\cdot 2\pi=1$$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma_r}\frac{f(\varsigma)-f(z)}{\varsigma-z}\,d\varsigma\right|\le\frac{1}{2\pi}\max_{\gamma_r}|f(\varsigma)-f(z)|\frac{2\pi r}{r}=\max_{\gamma_r}|f(\varsigma)-f(z)|;$$

откуда видно, что наша разность при уменьшении r может быть сделана сколь угодно малой. С другой стороны, как видно из левой части (5.4), эта разность не зависит от r. Следовательно, рассматриваемая разность *равна нулю* и **формула Коши**

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z} \qquad (5.5)$$

таким образом, *доказана*.

Замечание 2. Эта формула очень важна, и будет использоваться далее для вычисления интегралов.

Теорема о среднем. *Если функция $f(z)$ непрерывна в замкнутом круге и аналитична внутри этого круга, то её значение в центре круга равно среднему арифметическому значений на окружности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если кривая С представляет собой окружность $|\varsigma-z|=R$, то полагая $\varsigma-z=\mathrm{Re}^{i\varphi}$, а отсюда $\varsigma=z+\mathrm{Re}^{i\varphi}$ из формулы Коши $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C\dfrac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}$ получается

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi}\frac{f(z+\mathrm{Re}^{i\varphi})}{\mathrm{Re}^{i\varphi}}\mathrm{Re}^{i\varphi}\,id\,\varphi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(z+\mathrm{Re}^{i\varphi})d\varphi.$$

Откуда справедливо равенство

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}f(z+\mathrm{Re}^{i\varphi})\,d\,\varphi. \qquad (5.6)$$

Последняя формула выражает так называемую **теорему о среднем** для аналитических функций.

По определению, аналитическая функция - это функция комплексного переменного, обладающая производной в каждой точке некоторой области D. Покажем, что из аналитичности функции вытекает существование и аналитичность всех её последовательных производных.

Интегральная теорема Коши о производной (1842) *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и непрерывна в $\overline{D}$, то она обладает в каждой точке D производными всех порядков, причём n-ая производная представляется формулой*

$$f^{(n)}(z_o)=\frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C\frac{f(\zeta)d\,\zeta}{(\zeta-z_o)^{n+1}}, \qquad (5.7)$$

где C – граница области D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть z - произвольная внутренняя точка области *D*. По определению производной

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

и представлению стоящих в числителе функций в виде формул Коши, т. е.

$$f(z+h)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z-h},\qquad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}$$

получим

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_C\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z-h}d\varsigma-\frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_C\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_C f(\varsigma)\left\{\frac{1}{\varsigma-z-h}-\frac{1}{\varsigma-z}\right\}d\varsigma$$

Для того, чтобы привести это выражение к формуле Коши для производной второго порядка, преобразуем стоящую в скобках разность дробей к виду

$$\frac{1}{\varsigma-z-h}-\frac{1}{\varsigma-z}=\frac{\varsigma-z-(\varsigma-z-h)}{(\varsigma-z-h)\cdot(\varsigma-z)}=\frac{h}{(\varsigma-z-h)\cdot(\varsigma-z)}$$

и получим

$$f'(z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_C\frac{f(\varsigma)\cdot h}{(\varsigma-z-h)(\varsigma-z)}d\varsigma=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\lim_{h\to 0}\int_C\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma-z-h)(\varsigma-z)}d\varsigma.$$

Но, очевидно, при $h\to 0$ функция $\dfrac{1}{\varsigma-z-h}$ равномерна и для всех ζ на С стремится к $\dfrac{1}{\varsigma-z}$, а, следовательно, по теореме о равномерной сходимости (которую мы здесь не рассматриваем) предел существует, причём,

$$f'(z_o)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_o)^2} \qquad (5.8)$$

Таким образом, теорема для $n=1$ доказана. Предполагая её верной для какого-либо $n-1$, точно так же можно доказать её справедливость для n и тем самым полностью доказать теорему.

Замечание 3. Как видно из доказательства, теорему можно сформулировать ещё следующим образом: *если функция $f(\varsigma)$ непрерывна на границе С области D, то функция*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma-z}$$

представленная формулой Коши, аналитична в этой области.

Замечание 4. Формулой (5.5) можно пользоваться для вычисления некоторых интегралов.

Из формулы (5.8) вытекают *важные неравенства Коши.*

Выводы неравенств Коши.

Обозначим через М максимум функции $f(z)$ в области D, через R - расстояние точки z до границы D и через l - длину этой границы. Имеем из (5.7)

$$\left|f^{(n)}(z)\right|\le\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\left|\frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-z)^{n+1}}\right|\le\frac{n!Ml}{2\pi R^{n+1}} \qquad (5.9)$$

Если, в частности, $f(z)$ аналитична в круге $|\zeta - z| < R$, то, принимая в качестве D этот круг, получим

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{n!M}{R^n}, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{5.10}$$

Это и есть неравенства Коши. Они используются для доказательства важных теорем теории аналитических функций, а также было использовано для доказательства теоремы Коши-Лиувилля в предыдущем параграфе.

Упражнения к главе 1.

Алгебраические действия с комплексными числами

П р и м е р 1. Найти логарифмы следующих чисел

1) $e = e^{1+i\cdot 0}$ Ответ: $\operatorname{Ln} e^{1+i\cdot 0} = 1 + 2k\pi i$ или $\operatorname{Ln} e = 1 + 2k\pi i$

2) $-i$ Ответ: $Ln(-i) = (2k - \frac{1}{2})\pi i.$

3) i Ответ: $ln\, i = (2k + \frac{1}{2})\pi i.$

4) $-1 - i$ Ответ: $\mathrm{Ln(-1 - i)} = ln\sqrt{2} + (2k - \frac{3}{4})\pi i.$

5) $3 - 2i$ Ответ: $\mathrm{Ln(3 - 2i)} = ln\sqrt{13} + (2k\pi - arctg\frac{2}{3})\, i.$

6) i^i Ответ: $\mathrm{Ln}(i^i) = -(2k + \frac{1}{2})\pi + 2m\pi \cdot i \quad (k, m = 0, \pm 1, \pm 2. ...)$

Получение комплексных чисел в показательной форме

П р и м е р 2. Получить в показательной форме следующие комплексные числа:

a) i^i.

Р е ш е н и е. Зная, что $Lni^i = -(2k + \frac{1}{2})\pi + 2m\pi \cdot i \quad (k, m = 0, \pm 1, \pm 2. ...)$, получим $i^i = e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi}$.

b) Найти: $i^{\frac{1}{i}}$

Р е ш е н и е. Учитывая, что $i^{\frac{1}{i}} = i^{-i}$ и также $i^i = e^{-(2k+\frac{1}{2})\pi}$, получим $i^{-i} = e^{(2k+\frac{1}{2})\pi}$

Примеры для самостоятельного решения

c) 1^{i}; Ответ: $1^i = e^{-2k\pi}$

d) $(-1)^{\sqrt{2}}$ Ответ: $(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}(2k+1)\pi i}$

e) $\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$ Ответ: $e^{-(4k+\frac{1}{2})\pi}$

f) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$ Ответ: $e^{(i-1)(2k+\frac{1}{6})\pi}$

g) $(1 - i)^{3-3i}$ Ответ: $2^{3/2} e^{3(2k\pi - \frac{\pi}{4}) - 3(\frac{\pi}{4} + \ln\sqrt{2} - 2k\pi)i}$.

П р и м е р 3. Записать в алгебраической форме $\operatorname{Arcsin}\frac{\pi}{3} i.$

Р е ш е н и е. Используем формулу

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz \pm \sqrt{1 - z^2})$$

Полагая $z=\frac{\pi}{3}i$, получим

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\pi}{3}i=-i\operatorname{Ln}\left(-\frac{\pi}{3}\pm\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right)$$

Отсюда

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\pi}{3}i=-i\operatorname{Ln}\left[-\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right)\right]=-i\left[\ln\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right)+\pi i+2k\pi i\right]=$$

$$=(2k+1)\pi-i\ln\left(\frac{\pi}{3}+\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}\right)\qquad(k=0,\pm1.\pm2,...)$$

Тогда

$$\operatorname{Arcsin}\frac{\pi}{3}i=-i\operatorname{Ln}\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=-i\left[\ln\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi i\right]=2k\pi-i\ln\left(\sqrt{1+\frac{\pi^2}{9}}-\frac{\pi}{3}\right)\quad(k=0,\pm1.\pm2,...)$$

П р и м е р 4. Записать в алгебраической форме $\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(1+i)$.
Р е ш е н и е: Используется формула

$$\operatorname{Arctg}z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+\mathrm{iz}}{1-\mathrm{iz}};$$

Подставляя $z=1+i$ в эту формулу , получим

$$\operatorname{Arctg}z=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{1+\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{1-\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{5}=-\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\frac{-1+2\mathrm{i}}{5}.$$

Далее $\operatorname{Ln}\left(-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right)=\operatorname{Ln}\left|-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i\right|=-l\,n\sqrt{5}+(2k+1)\pi i-i\operatorname{arctg}2$

Окончательно

$$\operatorname{Arctg}(1+i)=\frac{i}{2}ln\sqrt{5}-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2+(2k+1)\frac{\pi}{2}.\qquad(k=0,\pm1.\pm2,...)$$

Примеры для самостоятельного решения.

Записать в алгебраической форме следующие комплексные числа:

1) $e^{\frac{\pi}{4}i}$ Ответ: $e^{\frac{\pi}{4}i}=\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2) $\ln(1-i)$ Ответ: $\ln(1-i)=\frac{1}{2}\ln2-\frac{1}{4}\pi i$.

3) $\sin\pi i$ Ответ: $\sin\pi i=i\,sh\,\pi$.

(Замечание: Здесь следует учесть, что $\operatorname{sh}z=-i\sin iz$ и $sh\,z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$).

4) $\cos\pi i$ Ответ: $\cos\pi i=ch\pi$.

5) $tg\frac{\pi}{2}i$ Ответ: $tg\frac{\pi}{2}i=i\,th\frac{\pi}{2}$.

6) $\operatorname{ctg}\pi i$ Ответ: $-i\operatorname{cth}\pi$.

7) $\operatorname{Arcsin}i$ Ответ $2k\pi-i\,ln(\sqrt{2}-1)$, $(2k+1)\pi-i\,ln(\sqrt{2}+1)$.

8) $\operatorname{Arctg}\frac{i}{3}$ Ответ: $k\pi+i\frac{ln\sqrt{2}}{2}$ $(k=0,\pm1.\pm2,...)$.

9) $\operatorname{Arccos}i$ Ответ: $(2k+\frac{1}{2})\pi-i\,ln(\sqrt{2}+1)$, $(2k-\frac{1}{2})\pi-i\,ln(\sqrt{2}-1)$.

10) $sh\frac{\pi i}{2}$ Ответ: i

11) $th\,\pi i$ Ответ: 0.

Решение уравнений

П р и м е р 5. Решить уравнение $\sin z = 3$

Р е ш е н и е. Задача сводится к нахождению величины

$$z = Arc\sin 3$$

Воспользуемся формулой $\mathrm{Arc}\sin z = -i\,\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2})$. Тогда будем иметь

$$z = Arc\sin 3 = -iLn(3i + \sqrt{-8})$$

или, учитывая, что $\sqrt{-8} = \pm\sqrt{8}\,i$, получим

$$z = -i[Ln(3+\sqrt{8})i],$$

$$z = -i[Ln(3-\sqrt{8})i].$$

Так как

$$\arg[(3+\sqrt{8})i] = \arg[(3-\sqrt{8})i] = \frac{\pi}{2},$$

$$\left|(3+\sqrt{8})i\right| = (3+\sqrt{8}), \quad \left|(3-\sqrt{8})i\right| = (3-\sqrt{8}),$$

то

$$Ln[(3\pm\sqrt{8})i] = ln(3\pm\sqrt{8})i + \frac{\pi}{2}i + 2k\pi i \text{ ,где} \qquad (k = 0, \pm 1. \pm 2, ...)$$

Следовательно,

$$z = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\,ln(3\pm\sqrt{8})i \qquad (k = 0, \pm 1. \pm 2, ...) .$$

Примеры для самостоятельного решения

Решить следующие алгебраические уравнения

a) $e^{-z} + 1 = 0$ Ответ $z_k = (2k+1)\pi i \quad (k = 0, \pm 1. \pm 2, ...)$

b) $e^{z} + i = 0$ Ответ $z_k = (2k - \frac{1}{2})\pi i \quad (k = 0, \pm 1. \pm 2, ...)$

c) $4\cos z + 5 = 0$ Ответ $z_k = (2k+1)\pi \pm i\ln 2 \quad (k = 0, \pm 1. \pm 2, ...)$

d) $e^{ix} = \cos\pi x$ (x – действительное число) Ответ $x = 0$.

Примеры к § 2.

П р и м е р 1. Найти действительную и мнимую части функции $\omega = z^3 - iz$

Р е ш е н и е. Полагая $z = x + i\,y$, а $\omega = u + i\upsilon$ получим

$$\omega = (x+iy)^3 - -(x+iy) = (x^3 - 3xy^2 - y) + i(3x^2y - y^3 - x)$$

Следовательно, равенство $\omega = z^3 - iz$ равносильно следующим двум равенствам

$$\begin{cases} u = x^3 - 3xy^2 - y \\ \upsilon = 3x^2y - y^3 - x \end{cases}$$

Для следующих функций найти действительную и мнимую части:

a) $\omega = \bar{z} - iz^2$, b) $\omega = z^2 + i$, c) $\omega = i - z^2$, d) $\omega = \frac{1}{z}$, e) $\omega = \frac{iz+1}{1+z}$, f) $\omega = \frac{\bar{z}}{z}$

П р и м е р 2. В какую кривую отображается следующая единичная окружность $|z| = 1$ с помощью функции $\omega = z^2$?

Р е ш е н и е. Так как по условию $|z| = 1$, то

$$|\omega| = |z|^2 = 1$$

Итак, образом окружности $|z|=1$ в плоскости z является окружность $|w|=1$ в плоскости w, проходимая дважды. Это следует из того, что, поскольку $w=z^2$, то $\mathrm{Arg}w=2\,\mathrm{Arg}z+2k\pi$, так что когда точка z описывает полную окружность $|z|=1$, то её образ описывает окружность $|w|=1$ дважды.

Напоминание: $\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi,\quad k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots$, где $\arg z$ есть *главное значение* $\mathrm{Arg}\,z$ и определяется условиями $-\pi<\arg z\le\pi$

П р и м е р 3. Найти образ окружности

$$z=R\cos t+iR\sin t \qquad (0\le t<2\pi)$$

при отображении $w=\dfrac{z}{\bar z}$.

Р е ш е н и е. Пусть $z=x+iy$. Данное уравнение окружности можно написать в параметрическом виде

$$x=R\cos t,\quad y=R\sin t \qquad (0\le t<2\pi).$$

Отделим действительную и мнимую части функции $w=u+i\upsilon$. Имеем

$$u+i\upsilon=\frac{z}{\bar z}=\frac{z^2}{z\bar z}=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+i\frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Отсюда $u=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad \upsilon=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$. Подставляя $x=R\cos t$ и $y=R\sin t$ в u и υ, получим параметрические уравнения образа окружности

$$\begin{cases} u=\dfrac{\cos^2 t-\sin^2 t}{\cos^2 t+\sin^2 t}=\cos 2t,\\ \upsilon=\dfrac{2\cos t\cdot\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}=\sin 2t,\end{cases}$$

или $u^2+\upsilon^2=1$.

Итак, образ есть единичная окружность, проходимая дважды, что следует из того, что $0\le t<2\pi$ и из формулы (2.13).

П р и м е р 4. Установить, на какие линии плоскости w отображаются с помощью функции $w=\dfrac{1}{z}$ следующие линии плоскости z:

a) $|z|=\dfrac{1}{2}$; b) Re z =0; c) arg z = 3 π / 4; d) $\arg z^2=-\dfrac{\pi}{2}$; $e)$ $\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Im}\,z$; $f)$ $|z|=z$.

П р и м е р 5. Найти образы координатных осей при следующих отображениях:

a) $w=\dfrac{z+1}{z-1}$; *b)* $w=1+\dfrac{1}{z}$.

П р и м е р 6. Доказать, что последовательность

$$z_n=\frac{n-i}{n+1},\quad n=1,2,\ldots$$

имеет пределом число $a=1$

Р е ш е н и е. Пусть задано произвольное число $\varepsilon>0$ Покажем, что существует такой номер N, что $|z_n-1|<\varepsilon$ как только $n\ge N$. Так как

$$|z_n-1|=\left|\frac{n-i}{n+1}-1\right|=\left|\frac{1+i}{n+1}\right|=\frac{\sqrt2}{n+1},$$

то неравенство $|z_n-1|<\varepsilon$ будет выполнено, если $\dfrac{\sqrt2}{n+1}<\varepsilon$, то есть при $n>\dfrac{\sqrt2}{\varepsilon}-1$. Значит, в качестве N можно взять

$$N = N(\varepsilon) = \left[\frac{\sqrt{2}}{\varepsilon} - 1\right] + 1.$$

Здесь квадратные скобки означают, что берётся целая часть разности. Таким образом, доказано, что при любом сколь угодно малом числе ε можно указать такое большое число N, что модуль разности между z_n и пределом (в данном случае $a = 1$) станет меньше любого сколь угодно малого числа ε .

Примеры к § 3

П р и м е р 1. Проверить, удовлетворяет ли *условиям Коши – Римана* $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x},$

функция $f(z) = z^2$.

Р е ш е н и е. $z^2 = (x^2 - y^2) + i2xy$. Следовательно, $u(x,y) = (x^2 - y^2), \quad \upsilon(x,y) = 2xy$

Производные

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial \upsilon(x,y)}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial \upsilon(x,y)}{\partial y} = 2x.$$

Отсюда видно, что условия $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$ удовлетворяются.

П р и м е р 2**.** Показать, что функция e^z является *аналитической* во всей комплексной плоскости.

Р е ш е н и е. Функция $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, так что

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad \upsilon(x,y) = e^x \sin y .$$

Функции $u(x,y), \quad \upsilon(x,y)$, как функции действительных переменных x и y, дифференцируемы в любой точке (x, y), так как они имеют непрерывные частные производные любого порядка. Кроме того, они удовлетворяют условиям Коши – Римана, что легко видеть из их производных

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial x} = e^x \cos y .$$

Следовательно, функция $w = e^z$ всюду аналитическая. Её производная получается в соответствии с формулой (3) в виде $(e^z)' = (e^x \cos y)'_x + i(e^x \sin y)'_x = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$. Отсюда $(e^z)' = e^z$

П р и м е р 3. Является ли функция $w = z \cdot \bar{z}$ аналитической хотя бы в одной точке?

Р е ш е н и е. Имеем $w = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, так что

$$u(x,y) = x^2 + y^2, \quad \upsilon(x,y) \equiv 0$$

Условия Коши – Римана в этом случае имеют вид $2x = 0, \quad 2y = 0$ и удовлетворяются только в точке (0,0). Следовательно, функция $w = z \cdot \bar{z}$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не аналитична.

Покажем, пользуясь определением (1), что функция $f(z) = z \cdot \bar{z}$ дифференцируема в точке $z = 0$. Функция $f(0) = 0$, поэтому

$$\Delta f = f(z + \Delta z) - f(z) = (z + \Delta z)(\bar{z} + \overline{\Delta z}) = z \cdot \bar{z} + z \cdot \overline{\Delta z} + \bar{z} \cdot \Delta z + \Delta z \cdot \overline{\Delta z} - z \cdot \bar{z} =$$
$$= 0 + 0 \cdot \overline{\Delta z} + 0 \cdot \Delta z + \Delta z \cdot \overline{\Delta z} - 0 = \Delta z \cdot \overline{\Delta z}$$

Откуда $\Delta f = \Delta z \cdot \overline{\Delta z}$ и $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z \cdot \overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (\Delta x - i\Delta y) = 0$

Таким образом, производная $f'(0)$ существует и равна нулю.

П р и м е р 4. Показать, что при переходе от декартовых координат (x, y) к полярным (ρ, φ) условия Коши – Римана принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

Р е ш е н и е. Используем показательный вид функции $z=\rho e^{i\varphi}=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, откуда функции u и υ соответственно равны $u=\rho\cos\varphi, \quad \upsilon=\rho\sin\varphi$ и их производные выражаются в виде

$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\cos\varphi, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial \rho}=\sin\varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\rho\sin\varphi, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi}=\rho\cos\varphi$. Откуда легко видеть, что

$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$, ч.т.д

П р и м е р 5. Восстановить аналитическую в окрестности точки π функцию $f(z)$ по известной действительной части $u(x,y)$ или мнимой $\upsilon(x,y)$ и значению $f(z_o)$:

$a)\ u=\frac{x}{x^2+y^2}$, $f(\pi)=\frac{1}{\pi}$ Ответ: $f(z)=\frac{1}{z}$

Р е ш е н и е. Используя условия Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial \upsilon}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$, получим

производные в виде $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

Отсюда $\frac{\partial \upsilon}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ и $\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$

Интегрируя (1) по y с учётом рекуррентной формулы

$$\int\frac{du}{\left(a^2+u^2\right)^n}=\frac{u}{2a^2(n-1)\left(a^2+u^2\right)^{n-1}}+\frac{3-2n}{2a^2(1-n)}\int\frac{du}{\left(a^2+u^2\right)^{n-1}},$$

получаем интеграл в виде

$$\upsilon=\int\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}dy=\int\frac{dy}{\left(x^2+y^2\right)}dy-2x^2\int\frac{dy}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-$$

$$-2x^2\left(\frac{1}{2x^2}\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}+\frac{1}{2x^3}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C\right)=\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}-\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C=-\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}+C$$

Учитывая, что $\upsilon=f(x)-\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)}$, получаем её производную по x $\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=f'(x)+\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)}$.

Сравнивая с полученной выше производной $\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$,получаем, что $f'(x)=0$.

Следовательно $f(x)=const$. Откуда получаем искомую функцию в виде

$$\omega=u+i\upsilon=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}+C.$$

Определим C по условию $f(\pi)=\frac{1}{\pi}$;

$f(\pi)=\frac{\pi}{\pi^2+0^2}-i\frac{0}{\pi^2+0^2}+C=\frac{1}{\pi}+C$, откуда C = 0.

Преобразуем полученную функцию следующим образом:

$$\omega=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)}=\frac{1}{(x+iy)}=\frac{1}{z}.$$

Ответ: $f(z)=\frac{1}{z}$.

Примеры для самостоятельного решения

П р и м е р 6. Является ли функция $w = \bar{z} = x - iy$ аналитической?

П р и м е р 7. Показать, что в области $\operatorname{Re} z > 0$ $w = \ln z$ - аналитическая функция.

Главное значение

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z .$$

$$w = \ln z = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

П р и м е р 8. Показать непосредственным вычислением, что при натуральном n

$$(z^n)' = n z^{n-1} .$$

Во-первых, использовать определение производной,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$$

во-вторых, использовать формулу *бинома Ньютона*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

или в развёрнутом виде

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + ... + C_n^2 a^2 b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n$$

где формула *сочетаний* $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$

П р и м е р 9. Пользуясь условиями Коши – Римана, выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке, а какие нет.

a) $w = z \cdot \bar{z}$; b) $w = z \cdot e^z$; c) $w = |z| \cdot \bar{z}$; d) $w = e^{z^2}$; e) $w = |z| \cdot \operatorname{Re} z$; f) $w = \sin 3z - i$;

g) $w = \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z$, h) $w = \bar{z} \cdot \operatorname{Im} z$; k) $w = |z| \cdot \operatorname{Im} z$

П р и м е р 10. Показать, что в области $\operatorname{Re} z > 0$ $w = \ln z$ - аналитическая функция.

Примеры к § 4

П р и м е р 1. Вычислить интеграл

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})\, dz$$

по линиям, соединяющим точки $z_1 = 0,\quad z_2 = 1 + i$

1) по прямой,
2) по параболе $y = x^2$,
3) по ломаной $z_1 z_3 z_2$, где $z_3 = 1$.

Р е ш е н и е. Перепишем подынтегральную функцию в виде

$$1 + i - 2\bar{z} = (1 - 2x) + i(1 + 2y) ,$$

где $u = 1 - 2x,\quad \upsilon = 1 + 2y$.

По формуле (4.4) получим

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})\, dz = \int_C (1 - 2x)dx - (1 + 2y)\, dy + i\int_C (1 + 2y)\, dx + (1 - 2x)\, dy$$

1. Уравнение прямой, соединяющей точки $z_1 = 0,\quad z_2 = 1 + i$, будет $y = x$, а следовательно $dy = dx$. Отсюда получаются интегралы

$$\int_C (1 + i - 2\bar{z})\, dz = \int_C (1 - 2x)dx - (1 + 2x)\, dx + i\int_C (1 + 2x)\, dx + (1 - 2x)\, dx =$$

$$= -\int_C 4x\, dx + i\int_C 2\, dx = \left[-2x^2 + 2xi\right]_0^1 = 2i - 2$$

2. Для параболы имеем $dy = 2xdx \quad (0 \le x \le 1)$. Следовательно,

$$\int_C (1+i-2\bar{z})\,dz = \int_C (1-2x)dx - (1+2x^2)\,2xdx + i\int_C (1+2x^2)\,dx + (1-2x)\,2xdx =$$

$$= \int_C (1-4x-4x^3)dx + i\int_C (1+2x-2x^2)\,dx = \left\{[-2x^2 - x^4] + i[x + x^2 - \frac{2}{3}x^3]\right\}_0^1 = -3 + \frac{4}{3}i$$

3. На отрезке $z_1 z_3 \quad y = 0, \quad dy = 0$, $0 \le x \le 1$, на отрезке $z_3 z_2 \quad x = 1, \quad dx = 0$.

$$\int_C (1+i-2\bar{z})\,dz = \int_C (1-2x)dx - (1+2y)\,dy + i\int_C (1+2y)\,dx + (1-2x)\,dy$$

$$= \int_0^1 (1-2x)dx + i\int_0^1 dx - \int_0^1 (1+2y)dy - i\int_0^1 dy =$$

$$= [x - x^2]_0^1 + ix\Big|_0^1 - [y + y^2]_0^1 - iy\Big|_0^1 = i - 2 - i = -2$$

П р и м е р 2. Вычислить интеграл

$$\int_C (z^2 + z\bar{z})\,dz\,,$$

где C - дуга окружности $|z| = 1, \quad 0 \le \arg z \le \pi$.

Р е ш е н и е. Так как окружность единичного радиуса, то можно положить $z = e^{i\varphi}$. Тогда $dz = ie^{i\varphi}d\varphi$

$$\int_C (z^2 + z\bar{z})\,dz = \int_0^\pi i\,e^{i\varphi}(e^{i2\varphi} + 1)d\varphi = i\int_0^\pi (e^{i3\varphi} + e^{i\varphi})d\varphi = \left[\frac{1}{3}e^{i3\varphi} + e^{i\varphi}\right]_0^\pi = -\frac{8}{3}\,.$$

П р и м е р 3. Вычислить интеграл

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)\,dz\,.$$

Р е ш е н и е. Так как функция $f(z) = 3z^2 + 2z$ аналитична всюду , то, применяя формулу Ньютона – Лейбница, найдём

$$\int_{1-i}^{2+i} (3z^2 + 2z)\,dz = \left[z^3 + z^2\right]_{1-i}^{2+i} = (2+i)^3 + (2+i)^2 - (1-i)^3 - (1-i)^2 =$$

$$= (8 + 12i - 6 - i) + (4 + 4i - 1) - (1 - 3i - 3 + i) - (1 - 2i - 1) = 7 + 19i$$

П р и м е р 4. Вычислить интеграл $\int_C e^z dz$, где C - отрезок прямой $y = -x$, соединяющей точки $z_1 = 0, \quad z_2 = \pi - i\pi$.

Р е ш е н и е. Параметрические уравнения линии C есть $x = t, \quad y = -t$ или в комплексной форме

$$z = t - it\,,$$

где действительное переменное t изменяется от 0 до π.

$$\int_C e^z dz = \int_0^\pi e^{t+it}(1-i)\,dt = (1-i)\int_0^\pi e^{t+it}\,dt = \frac{1-i}{1+i}e^{(1+i)t}\Big|_0^\pi = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}[e^\pi e^{i\pi} - 1] = (e^\pi + 1)i\,.$$

Примеры к § 5.

П р и м е р 1. Вычислить интеграл $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{ch\,i\,z}{z^2 + 4z + 3}\,dz$

Р е ш е н е и е. Внутри окружности $|z| = 2$ знаменатель дроби обращается в нуль в точке $z_o = -1$. Для применения формулы (5.1) перепишем интеграл в следующем

виде $\oint\limits_{|z|=2} \frac{ch\,i\,z}{z^2+4z+3}\,dz = \oint\limits_{|z|=2} \frac{ch\,i\,z}{(z+1)\cdot(z+3)}\,dz = \oint\limits_{|z|=2} \frac{\frac{ch\,i\,z}{z+3}}{z-(-1)}\,dz.$Здесь $z_o = -1$ и

функция $f(z) = \frac{ch\,i\,z}{z+3}$. является аналитической в круге $|z| \le 2$. Поэтому

$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{ch\,i\,z}{z^2+4z+3}\,dz = 2\pi i\,f(-1) = 2\pi i \frac{ch(-i)}{-1+3} = 2\pi i \frac{ch(-i)}{2} = \pi i\; ch(-i) = \pi i \cos 1.$$

Ответ: $\oint\limits_{|z|=2} \frac{ch\,i\,z}{z^2+4z+3}\,dz = \pi i \cos 1.$

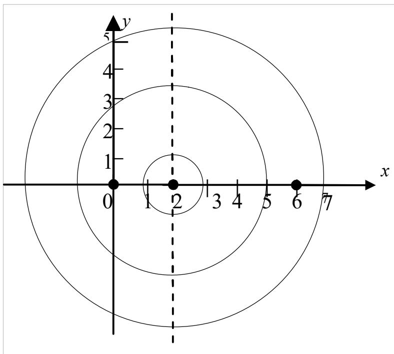


Рисунок 1

П р и м е р 2. Пользуясь интегральной формулой Коши, вычислить интеграл $\oint\limits_{C} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz$, если: 1) C: $|z-2| = 1;$ 2) C: $|z-2| = 3;$ 3) C: $|z-2| = 5.$

Р е ш е н и е. 1) (Рис. 1) В замкнутой области, ограниченной окружностью $|z-2| = 1;$ подынтегральная функция аналитическая, поэтому в силу теоремы Коши $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = \oint\limits_{|z-2|=1} \frac{e^{z^2}}{z(z-6)}\,dz = 0.$ Внутри области, ограниченной окружностью $|z-2| = 3;$ находится одна точка $z = 0$, в которой знаменатель обращается в нуль. Перепишем интеграл в виде $\oint\limits_{C} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = .\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\frac{e^{z^2}}{z-6}}{z}\,dz$. 2) Формула $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z-6}$ является аналитической в данной области. Применяя интегральную формулу Коши ($z_o = 0$), получим $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = 2\pi i.\left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0} = 2\pi i\,(-\frac{1}{6}) = -\frac{\pi i}{3}.$

Ответ: $\oint\limits_{|z-2|=3} \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz = -\frac{\pi i}{3}.$

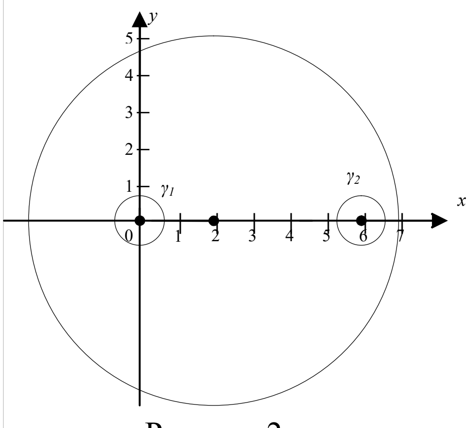


Рисунок 2

3) Внутри области, ограниченной окружностью $|z-2| = 5;$ находится две точки $z = 0$ и $z = 6$, в которых знаменатель обращается в нуль. Непосредственно формулу (5.1) применить нельзя. В этом случае для вычисления интеграла можно поступить так.

П е р в ы й с п о с об. Разложим дробь $\frac{1}{z^2-6z}$ на простейшие

$$\frac{1}{z^2-6z}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-6}=\frac{A\cdot(z-6)+B\cdot z}{z(z-6)}=\frac{(A+B)\cdot z-6\cdot A}{z(z-6)}$$

Получаем систему алгебраических уравнений для определении А и В в виде $\begin{cases} A+B=0 \\ -6A=1 \end{cases}$

Отсюда получаем $A=-\frac{1}{6}, B=-A=\frac{1}{6}$. Тогда $\frac{1}{z^2-6z}=\frac{1}{6}\frac{1}{z-6}-\frac{1}{6}\frac{1}{z}$

Таким образом, данный интеграл раскладывается на два

$$\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz=$$

$$=\frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z-6}\,dz-\frac{1}{6}\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z}\,dz=$$

$$=\frac{1}{6}2\pi i\,e^{36}-\frac{1}{6}2\pi i\,e^{0}=\frac{e^{36}-1}{3}\pi i.$$

В т о р о й с п о с о б. (Рис. 2) Построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках $z=0$ и $z=6$ достаточно малых радиусов таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в круге. В трёхсвязной области, ограниченной окружностями $|z-2|=5$, γ_1 и γ_2, подынтегральная функция всюду аналитична. По теореме Коши для многосвязной области

$$\oint\limits_{C}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz.$$

К каждому интегралу в правой части можно применить интегральную формулу Коши (5.1). В результате получим

$$\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz=2\pi i\left.\frac{e^{z^2}}{z-6}\right|_{z=0}+2\pi i\left.\frac{e^{z^2}}{z}\right|_{z=6}=\frac{e^{36}-1}{3}\pi i.$$ Ответ: $\oint\limits_{|z-2|=5}\frac{e^{z^2}}{z^2-6z}\,dz=\frac{e^{36}-1}{3}\pi i.$

П р и м е р 3. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}\,dz.$

Р е ш е н и е. Подынтегральная функция $\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}$ является аналитической в области $|z-1|\le 1$ всюду, кроме точки $z_o=1$. Выделим под знаком интеграла функцию $f(z)$, являющуюся аналитической в круге $|z-1|\le 1$. Для этого перепишем подынтегральную функцию в виде $\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}=\frac{\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}$, и в качестве $f(z)$ возьмём $\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}$. Полагая в формуле (5.7) $n=1$, получим $\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}}{(z-1)^2}\,dz=2\pi i\,f'(z).$

Находим производную

$$f'(z)=\left(\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}\right)'=\frac{\pi\cos\pi z\cdot(z+1)^2-2(z+1)\cdot\sin\pi z}{(z+1)^4}=\frac{\pi\cos\pi z\cdot(z+1)-2\cdot\sin\pi z}{(z+1)^3}.$$

Отсюда при $z=1$

$$f'(1)=\left(\frac{\sin\pi z}{(z+1)^2}\right)'=\frac{\pi\cos\pi\cdot(1+1)-2\cdot\sin\pi}{2^3}=-\frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, ответ: $\oint\limits_{|z-1|=1}\frac{\sin\pi z}{(z^2-1)^2}\,dz=-\frac{\pi^2}{2}i$.

П р и м е р 4. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2}\frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^3(z-1)}$.

Р е ш е н и е. *Первый способ.*

Знаменатель $(z+1)^3(z-1)$ подынтегральной функции обращается в нуль в двух точках $z_1=-1$ и $z_2=1$, лежащих внутри круга $|z|\le 2$. Разложив на простейшие множители функцию

$$\frac{1}{(z+1)^3(z-1)}=\frac{1}{8}\frac{1}{z-1}+\frac{1}{8}\frac{1}{z+1}-\frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)^3},$$ (проверить самостоятельно)

Используя линейность интеграла, получим

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^3(z-1)}=\frac{1}{8}\oint\limits_{|z|=2}\frac{ch\,z\,dz}{z-1}-\frac{1}{8}\oint\limits_{|z|=2}\frac{ch\,z\,dz}{z+1}-\frac{1}{4}\oint\limits_{|z|=2}\frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^2}-\frac{1}{2}\oint\limits_{|z|=2}\frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^3}.$$

К первым двум интегралам применяется интегральная формула Коши (5.1)

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{ch\,z\,dz}{z-1}=2\pi i\,ch1,\qquad \oint\limits_{|z|=2}\frac{ch\,z\,dz}{z+1}=2\pi i\,ch1.$$

Третий и четвёртый интегралы вычисляются с помощью формулы (5.7):

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^2}=2\pi i\,(ch\,z)'\big|_{z=-1}=-2\pi i\,sh1,\qquad \oint\limits_{|z|=2}\frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^3}=\frac{2\pi i}{2!}(ch\,z)''\big|_{z=-1}=\pi i\,ch1.$$

Окончательно получим

$$\oint\limits_{|z|=2}\frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^3(z-1)}=\frac{2\pi i\,ch1}{8}-\frac{2\pi i\,ch1}{8}-\frac{1}{4}2\pi i\,sh1-\frac{1}{2}\pi i\,ch1=\frac{sh1-ch1}{2}\pi i=-\frac{\pi i}{2e}.$$

Р е ш е н и е. *Второй способ.*

Построим окружности γ_1 и γ_2 с центрами в точках $z_1=-1$ и $z_2=1$ достаточно малых радиусов таких, чтобы окружности не пересекались и целиком лежали в круге $|z|\le 2$. В трёхсвязной области, ограниченной окружностями $|z|=2$, γ_1 и γ_2, подынтегральная функция всюду аналитична. По теореме Коши для многосвязной области имеем

$$\oint\limits_{C}\frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^3(z-1)}=\oint\limits_{\gamma_1}\frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^3(z-1)}+\oint\limits_{\gamma_2}\frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^3(z-1)}.$$

К первому интегралу правой части этого выражения применим формулу (5.7) , предварительно представив подынтегральную функцию в виде

$$\frac{ch\,z}{(z+1)^3(z-1)}=\frac{\frac{ch\,z}{z-1}}{(z+1)^3}.$$

Функция $\frac{ch\,z}{z-1}$ является аналитической внутри γ_1, поэтому в силу формулы (5.7)

$$\oint\limits_{\gamma_1} \frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^3(z-1)} = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\frac{ch\,z}{z-1}}{(z+1)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{ch\,z}{z-1}\right)''\Bigg|_{z=-1}. = -\frac{2e^{-1}+ch1}{4}\pi i.$$

Ко второму интегралу в правой части применим интегральную формулу Коши (5.1)

$$\oint\limits_{\gamma_1} \frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^3(z-1)} = \oint\limits_{\gamma_2} \frac{\frac{ch\,z}{(z+1)^3}}{z-1}dz = 2\pi i\,\frac{ch\,z}{(z+1)^3}\Bigg|_{z=1}. = -\frac{ch1}{4}\pi i.$$

Окончательно получим $\oint\limits_{\gamma_1} \frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^3(z-1)} = -\pi i\frac{2e^{-1}+ch1}{4} + \pi i\frac{ch1}{4} = -\frac{\pi i}{2e}.$

Ответ: $\oint\limits_{\gamma_1} \frac{ch\,z\,dz}{(z+1)^3(z-1)} = -\frac{\pi i}{2e}.$

Примеры для самостоятельного решения

С помощью интегральной формулы Коши вычислить следующие интегралы (все окружности обходятся против часовой стрелки).

1. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz = \pi i.$

2. $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{z^2+1}\,dz = \frac{\pi}{e}.$

3. $\oint\limits_{|z-1|=2} \frac{\sin\frac{\pi z}{2}}{z^2+2z-3}\,dz = \frac{\pi i}{2}.$

4. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{tg\,z}{z\,e^{1/(z+2)}}\,dz = 0.$

5. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\sin iz}{z^2-4z+3}\,dz = \pi\,sh1.$

6. $\oint\limits_{|z|=2} \frac{\cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}\,dz = \frac{2\pi i}{3}.ch\,\pi.$

7. $\oint\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16} = 0.$

8. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2+9)(z+9)} = -\frac{\pi i}{45}.$

ГЛАВА 2. РЯДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

§ 6. Степенные ряды. Ряды Тейлора

Непрерывную дифференцируемую функцию $f(x)$ можно разложить в окрестности некоторой точки a в известный ряд Тейлора

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 .... \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ... \tag{6.1}$$

Если разложение делается в окрестности начала координат, т.е. $a = 0$, то получается ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 .... \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \tag{6.2}$$

Для обобщения ряда Тейлора на функции комплексного переменного рассмотрим формулу для суммы членов геометрической прогрессии $\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = 1 + q + q^2 + ... + q^n$,

перепишем её в виде

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + ... + q^n + \frac{q^{n+1}}{1-q} \tag{6.3}$$

Формула справедлива и для комплексных q. Зафиксируем некоторую точку a из области D аналитичности функции $f(z)$ и, воспользовавшись формулой (6.3) , запишем

$$\frac{1}{\varsigma - z} = \frac{1}{\varsigma - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\varsigma - a}} = \frac{1}{\varsigma - a}\left\{1 + \left(\frac{z-a}{\varsigma - a}\right) + ... + \left(\frac{z-a}{\varsigma - a}\right)^n + \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\varsigma - a}}\left(\frac{z-a}{\varsigma - a}\right)^{n+1}\right\}. \tag{6.4}$$

Умножим обе части равенства на $\frac{1}{2\pi i} f(\varsigma)$ и проинтегрируем его по ς вдоль некоторого замкнутого контура *C*, лежащего в D и содержащего точки z и a. Мы получим слева

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z},$$

а справа, вынося не зависящие от ς выражения, содержащие $(z-a)$ и её степени, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - a} + \frac{z-a}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - a)^2} + \frac{(z-a)^2}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - a)^3} + ... + \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - a)^{n+1}} + R_n$$

Заменяя интегралы по формулам Коши для функции и её производных, получим

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 .... \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + R_n, \tag{6.5}$$

где остаточный член получается следующим образом: рассмотрим последний член в скобках формулы (6.4). Тогда

$$\frac{1}{\varsigma - a}\left\{\frac{1}{1 - \frac{z-a}{\varsigma - a}}\left(\frac{z-a}{\varsigma - a}\right)^{n+1}\right\} = \frac{1}{\varsigma - z}\left(\frac{z-a}{\varsigma - a}\right)^{n+1}$$

Отсюда остаточный член получается в виде

$$R_n = \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma - z)\cdot(\varsigma - a)^{n+1}} \tag{6.6}$$

Замечание 1. Формула (6.6) представляет собой классическую формулу Тейлора. Разложение такого вида (для действительных z) впервые встречается в работе 1715 г. **Брука Тейлора** (1685 – 1731), но систематическое применение оно нашло лишь в 1742 году в работе **Колина Маклорена** (1689 – 1746).

Определение 6.1. *Последовательность функций* $f_1(z), f_2(z)...$ *называется* **равномерно сходящейся** *к функции* $f(z)$ *в области* D *(или на кривой С), если для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся число* n_ε, *зависящее лишь от* ε, *такое, что при* $n > n_\varepsilon$ *для всех* z *из* D *(или на С) имеет место неравенство*

$$\left| f_n(z) - f(z) \right| < \varepsilon. \tag{6.7}$$

Докажем две теоремы, аналогичные соответствующим теоремам анализа.

Теорема 6.1. *Предел* $f(z)$ *последовательности непрерывных функций*

$$f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z), ...,$$

равномерно сходящейся в некоторой области D *(или на кривой С), также является непрерывной функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о: Зададим число $\varepsilon > 0$ и обозначим через z_o произвольную точку области D (или С). В силу равномерной сходимости найдётся номер n такой, что для всех z из D (на С)

$$\left| f_n(z) - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{6.8}$$

В силу непрерывности $f_n(z)$ в точке z_o найдётся такое число $\delta > 0$, что для всех z из D (или С), удовлетворяющих неравенству $\left| z - z_o \right| < \delta$,

$$\left| f_n(z) - f_n(z_o) \right| < \frac{\varepsilon}{3}.. \tag{6.9}$$

Для таких z и выбранных выше n из неравенств (2) и (3) имеем:

$$\left| f(z) - f(z_o) \right| \le \left| f(z) - f_n(z) \right| + \left| f_n(z) - f_n(z_o) \right| + \left| f_n(z_o) - f(z_o) \right| \le$$

$$\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

а это и означает непрерывность $f(z)$.

Теорема 6.2. *Если последовательность непрерывных функций* $f_1(z), f_2(z), ..., f_n(z), ...,$ *на кривой С, равномерно сходится к* $f(z)$, *то справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} \int_C f_n(z)\, d\, z = \int_C \lim_{n \to \infty} f_n(z)\, d\, z. \tag{6.10}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Зададим число $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости найдётся такое n_o, что для всех $n > n_o$ и для всех z на С

$$\left| f_n(z) - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{l}.,$$

где l - длина С. Для таких n

$$\left| \int_C f(z)\, d\, z - \int_C f_n(z)\, d\, z \right| = \left| \int_C \{ f(z) - f_n(z) \}\, d\, z \right| < \frac{\varepsilon}{l} \cdot l = \varepsilon,$$

а это означает справедливость соотношения (6.10)

Замечание 2. Доказанная теорема даёт возможность переходить к пределу под знаком интеграла в случае *равномерной сходимости* последовательности функций.

Замечание 3. С понятием *равномерно сходящейся* последовательности тесно связано понятие равномерно сходящегося ряда.

Определение 6.2. *Функциональный ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. *называется равномерно сходящимся в области* D *(или на кривой C), если последовательность его частичных сумм*

$$S_o(z) = f_o(z), \quad S_1(z) = f_o(z) + f_1(z), \quad \dots \quad , \quad S_n(z) = f_o(z) + f_1(z) + \dots + f_n(z), \dots$$

сходится в этой области (на этой кривой) равномерно.

Замечание 4. Так же, как и в анализе, доказывается удобный для применения достаточный признак равномерной сходимости функциональных рядов.

Теорема 6.3. *Если функциональный ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$. *в области* D *усиливается некоторым сходящимся числовым рядом* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *, т.е. для любой точки* z *из* D

$$|f_n(z)| \le a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \dots), \tag{6.11}$$

то данный функциональный ряд сходится в D *равномерно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о: В самом деле, по известной теореме о сравнении рядов данный ряд сходится в любой точке z из D. Обозначим его сумму через $S(z)$. Для любого n остаток $r_n = S(z) - S_n(z)$ этого ряда в силу соотношения (6.11) удовлетворяет неравенству

$$|r_n(z)| \le |f_{n+1}(z)| + |f_{n+2}(z)| + \quad \dots \le a_{n+1} + a_{n+2} + \quad \dots \tag{6.12}$$

Справа здесь стоит остаток r_n сходящегося числового ряда, стремящегося к нулю при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое n_o, зависящее лишь от ε, начиная с которого будет $r_n < \varepsilon$, и тогда в силу (6.12) для любого z из D и $n \ge n_o$ имеет место неравенство

$$|S(z)z - S(z_n)| < \varepsilon .$$

Это и означает сходимость данного ряда.

Теорема 6.4. *Если функция* $f(z, \varsigma)$ *аналитична по* z *и кусочно непрерывна по* ζ *для всех* z *из односвязной области* D *и для всех* ζ *на линии C интеграл*

$$F(z) = \int_C f(z, \varsigma)\, d\varsigma \tag{6.13}$$

сходится равномерно в области D, *то он является аналитической в этой области функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о: Для доказательства используют теорему, обратную к теореме Коши, согласно которой функция $F(z)$ аналитична в односвязной области D, если она непрерывна в этой области и её интеграл вдоль любой замкнутой кривой, принадлежащей области, равен нулю. В условиях доказываемой теоремы непрерывность доказывается обычным образом, (как теорема 6.2). Остаётся показать, что равен нулю интеграл вдоль произвольного замкнутого контура Г, принадлежащего этой области. Имеем

$$\int_\Gamma F(z)\, dz = \int_\Gamma \left\{ \int_C f(z, \varsigma)\, d\varsigma \right\} dz, \tag{6.14}$$

В силу равномерной сходимости интеграл (6.14) по известной из анализа теореме справа можно изменить порядок интегрирования и получить

$$\int_\Gamma F(z)\, dz = \int_C \left\{ \int_\Gamma f(z, \varsigma)\, d\, z \right\} d\, \varsigma = 0,$$

так как внутренний интеграл равен нулю по теореме Коши. *Теорема доказана.*

Замечание 5. Заметим, что в случае ограниченной кривой C для аналитичности функции $F(z)$ не требуется никаких дополнительных предположений о сходимости интеграла (6.13), потому что это вытекает из возможности перемены порядка интегрирования в соотношении (6.14) без дополнительных предположений.

Замечание 6. Необходимо выяснить, при каких условиях остаточный член R_n стремится к нулю, когда $n \to \infty$, или, что то же самое, при каких условиях функция $f(z)$ представима своим рядом Тейлора с центром в точке a, т.е.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \tag{6.15}$$

Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема.

Теорема Коши (1831). *Функция* $f(z)$ *представима своим рядом Тейлора* (6.15) *в любом открытом круге с центром в точке* a, *в котором она аналитична. Во всякой замкнутой области, принадлежащей этому кругу, ряд Тейлора сходится равномерно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через R радиус круга аналитичности функции $f(z)$ (с центром в точке a) и рассмотрим произвольное число $0 < R' < R$ и круг $|z-a| \le kR'$, где $k < 1$ - произвольное положительное число. Пусть z - любая точка последнего круга и С – окружность $|\varsigma - a| = R'$. Имеем $|z-a| \le kR'$, $|\varsigma - a| = R'$. Следовательно,

$$|\varsigma - z| = |\varsigma - a| - |z-a| \ge R' - kR' = (1-k)R'$$

и формула (6.6) даёт:

$$|R_n| = \left| \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\varsigma) d\varsigma}{(\varsigma - z)\cdot(\varsigma - a)^{n+1}} \right| \le \frac{k^{n+1} R'^{\,n+1}}{2\pi} \cdot \frac{M \cdot 2\pi R'}{(1-k)R'^{\,n+2}} = \frac{M\, k^{n+1}}{1-k},$$

где M – максимум модуля $f(z)$ в круге $|\varsigma - a| \le R'$ (функция $f(z)$ аналитична в этом круге, следовательно, ограничена). Так как $k < 1$, то отсюда видно, что $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, причём оценка R_n не зависит от z. Таким образом, в любом круге $|z-a| < kR'$, где $0 < k < 1$, ряд Тейлора сходится равномерно.

Произвольную замкнутую область, лежащую в круге аналитичности функции $f(z)$, можно поместить в некоторый круг $|z-a| < kR'$, где $0 < k < 1$, $0 < R' < R$, следовательно, и в такой области ряд сходится равномерно. *Теорема доказана.*

Следствие 1. *Всякая аналитическая в круге функция представляется в нём степенными рядами.*

Возникает вопрос о том, будет ли обратно аналитическая функция суммой произвольного сходящегося степенного ряда? Для ответа на этот вопрос необходимо знать свойства степенных рядов, которые описываются следующими теоремами.

Первая теорема Вейерштрасса (1859). *Если ряд*

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z), \tag{6.16}$$

составленный из функций, аналитических в односвязной области D, *равномерно сходится в этой области, то его сумма также является функцией, аналитической в* D.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, согласно условиям равномерной сходимости сумма ряда (6.16) непрерывна в D. Пусть C - произвольный контур, лежащий в D. В силу равномерной сходимости ряда (6.16) его можно почленно проинтегрировать вдоль С, и мы получим

$$\oint_C S(z)\,dz = \sum_{n=0}^{\infty} \oint_C f_n(z)\,dz = 0, \tag{6.17}$$

так как по теореме Коши интеграл от аналитических функций по замкнутому контуру в односвязной области равен нулю. Теперь по теореме Морера можно утверждать, что функция $S(z)$ аналитична в области D. *Теорема доказана.*

Вторая теорема Вейерштрасса (1859*). Произвольный ряд* (6.16), *составленный из функций, аналитических в области* D*, непрерывных в* $\overline{D}$ *и равномерно сходящихся в* D*, можно почленно дифференцировать в* D *любое число раз.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ς произвольная точка границы С области D, а z - произвольная внутренняя точка этой области. Так как разность $\varsigma - z$ при фиксированном z ограничена снизу по модулю положительным числом, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{k+1}}$, где k - произвольное натуральное число, сходится равномерно относительно ς на С. Следовательно, его можно почленно интегрировать вдоль С, и значит, сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{f_n(\varsigma)\, d\varsigma}{(\varsigma - z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \tag{6.18}$$

(для каждого члена ряда мы воспользовались формулой Коши для производных). Остаётся доказать, что сумма ряда (6.18) является k - той производной суммы $S(z)$ ряда (6.16). Но в силу равномерной сходимости левую часть формулы (6.18) можно записать в виде

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{\sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varsigma)}{(\varsigma - z)^{k+1}}\, d\varsigma = \frac{k!}{2\pi i} \int_C \frac{S(\zeta)}{(\varsigma - z)^{k+1}}\, d\varsigma = S^{(k)}(z) \tag{6.19}$$

Здесь снова была использована та же формула Коши. *Теорема доказана.*

Замечание 7. Для того. чтобы утверждать равномерную сходимость ряда из аналитических функций в замкнутой области $\overline{D}$, достаточно потребовать его равномерной сходимости на границе этой области. Это непосредственно вытекает из принципа максимума, согласно которому

$$\max_{\overline{D}} \left| f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + ... \right| = \max_{C} \left| f_{n+1}(\varsigma) + f_{n+2}(\varsigma) + ... \right|$$

Замечание 8. Простой пример показывает, что в **теореме 6.2** можно утверждать сходимость ряда из производных лишь в области D, а не в $\overline{D}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$, очевидно, равномерно сходится в замкнутом круге $|z| \le 1$, так как он усиливается сходящимся числовым рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Однако ряд производной $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ (сходящийся при $|z| < 1$) расходится в точке $z = 1$ границы круга.

Замечание 9. В дальнейшем большую роль будут играть степенные ряды, поэтому важна теорема Абеля об их сходимости.

Теорема Абеля (1792 – 1829). Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$ *сходится при некотором значении* $z = z_o$*, то он сходится, и притом абсолютно, и в любой точке* z*, расположенной ближе к центру* a*, чем* z_o*, причём в любом круге* $|z - a| \le k|z_o - a|$*, где* $0 < k < 1$*, сходимость ряда равномерна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что z - произвольная точка последнего круга, и представим n -ый член ряда в виде

$$c_n (z-a)^n = c_n (z_o - a)^n \left(\frac{z-a}{z_o - a} \right)^n$$

В силу сходимости ряда в точке z_o его общий член стремится к нулю и, следовательно. ограничен в этой точке, т.е. $\left| c_n (z-a)^n \right| \le M$ для всех n. Кроме того, у нас по условию

$\left|\dfrac{z-a}{z_o-a}\right| \le k$. Следовательно, для всех n $\left|c_n(z-a)^n\right| \le Mk^n$, $0<k<1$. Отсюда вытекает равномерная сходимость ряда в круге $|z-a| \le k|z_o-a|$. Так как число k может быть взято сколь угодно близким к единице, то тем самым доказана сходимость ряда в любой точке круга $|z-a|<|z_o-a|$ *и доказательство теоремы Абеля закончено.*

Замечание 10. Теоремы Вейерштрасса и Абеля дают утвердительный ответ на вопрос о том, будет ли аналитической сумма произвольного сходящегося степенного ряда.

Теорема 6.5. *Сумма любого степенного ряда в круге его сходимости является аналитической функцией.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $|z-a|<R$ будет круг сходимости нашего степенного ряда. В любом круге $|z-a| \le kR$, где $0<k<1$, по теореме Абеля ряд сходится равномерно, а так как члены ряда $c_n(z-a)^n$ - аналитические функции, то по теореме Вейерштрасса его сумма аналитична в этом круге . Но так как любая внутренняя точка z круга сходимости может быть погружена в некоторый круг $|z-a|<kR$, где $0<k<1$, то тем самым доказана аналитичность суммы ряда во всём круге его сходимости.

Теорема 6.6. *Любой степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в некотором круге

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n .$$

Полагая здесь $z=a$, получим $f(a)=c_o$. Дифференцируя данный ряд почленно и затем полагая $z=a$, найдём $f'(a)=c_1$. Последовательно дифференцируя данный ряд и полагая затем $z=a$, найдём

$$f''(a)=2c_2, \quad f'''(a)=3!c_3,\dots,f^{(n)}(a)=n!c_n .$$

Таким образом,

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

и ряд действительно является рядом Тейлора функции $f(z)$.

Замечание 11. Эту теорему называют *теоремой единственности* разложения в ряд Тейлора, так как из неё следует, что найденное любым способом разложение аналитической функции $f(z)$ в *степенной* ряд является *тейлоровским* разложением этой функции.

Замечание 12. Из этой теоремы и теоремы Коши (1831) вытекает, что *радиус сходимости* степенного ряда совпадает с расстоянием от центра a до ближайшей точки, в которой нарушается аналитичность суммы $f(z)$ этого ряда.

Тейлоровские разложения некоторых элементарных функций

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\dots;. \tag{6.20}$$

$$(1+z)^a=1+az+\frac{a(a-1)}{2!}z^2+\frac{a(a-1)(z-2)}{3!}z^3+\dots+\frac{a(a-1)\dots(z-n+1)}{n!}z^n+\dots \tag{6.21}$$

Замечание 13. Ряды (6.20) и (6.21) сходятся для $|z|<1$

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots+\frac{z^n}{n!}+\dots \tag{6.22}$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\dots+(-1)^n\,\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\dots \tag{6.23}$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ... \tag{6.24}$$

$$sh\, z = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + ... + \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \tag{6.25}$$

$$chz = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ... + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + ... \tag{6.26}$$

Замечание 14. Ряды (6.22) - (6.26) сходятся для любого z.

Методы определения сходимости рядов с комплексными членами

Для определения радиуса сходимости ряда Тейлора можно использовать другой способ.
Теорема Абеля и радиус сходимости: *Если степенной ряд*

$$c_o + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{6.27}$$

сходится при некотором значении $z = z_o$*, то он сходится и притом абсолютно при всех значениях* z*, для которых* $|z| < |z_o|$*. Если этот ряд расходится при значении* $z = z_1$*, то он расходится и при любом значении* z*, для которого* $|z| > |z_1|$.

Замечание 15. Область сходимости ряда (6.27) есть круг с центром в начале координат.
Замечание 16. Радиус сходимости степенного ряда определяется по формуле Даламбера

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} \qquad (c_n \neq 0) \tag{6.28}$$

или по формуле Коши

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} \tag{6.29}$$

если указанные пределы существуют.
Пусть имеется ряд с комплексными членами

$$z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} z_n , \tag{6.30}$$

где $z_n = x_n + i\, y_n$.
Замечание 17. Ряд (6.30) сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \text{ и } \sum_{n=0}^{\infty} y_n \tag{6.31}$$

Замечание 18. Ряды (6.31) являются рядами с действительными членами, и вопрос об их сходимости решается с помощью известных признаков сходимости рядов в действительной области.
Определение 6.3. Ряд (6.30) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из *абсолютных значений* членов ряда

$$|z_1| + |z_2| + |z_3| + ... + |z_n| + ... = \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|. \tag{6.32}$$

Замечание 19. Для исследования сходимости рядов применяется *метод сравнения рядов*, сущность которого состоит в том, что если ряд с бóльшими членами сходится, то ряд с меньшими членами сходится и подавно. Чаще всего для сравнения выбирается ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{6.33}$$

потому что известно, что этот ряд

$$\begin{cases} \tilde{n}\tilde{o}\hat{i}\ddot{a}\grave{e}\grave{o}\tilde{n}\ddot{y}\ , \quad \hat{e}\hat{i}\tilde{a}\ddot{a}\grave{a} \quad \eth > 1 \\ \eth\grave{a}\tilde{n}\tilde{o}\hat{i}\ddot{a}\grave{e}\grave{o}\tilde{n}\ddot{y}\ , \quad \hat{e}\hat{i}\tilde{a}\ddot{a}\grave{a} \quad \eth = 1 \\ \eth\grave{a}\tilde{n}\tilde{o}\hat{i}\ddot{a}\grave{e}\grave{o}\tilde{n}\ddot{y}\ , \quad \hat{e}\hat{i}\tilde{a}\ddot{a}\grave{a} \quad \eth < 1 \end{cases} \tag{6.34}$$

Замечание 20. Удобно использовать для сравнения рядов следующую теорему.

Теорема об эквивалентности рядов. Пусть даны два ряда с комплексными членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad \text{и} \quad \upsilon_1 + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \ldots + \upsilon_n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \upsilon_n \ .$$

Тогда, если предел отношения n *- ых членов двух рядов*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\upsilon_n} = A \ , \tag{6.35}$$

где A - *конечное число, то оба ряда одинаково сходятся или расходятся.*

Нули аналитической функции

Определение 6.4. *Нулём* аналитической функции $f(z)$ называют любую точку $z = a$, в которой $f(z)$ принимает значение 0.

Замечание 21. Множество всех нулей функции $f(z)$, лежащих в области D, может быть конечным или бесконечным. Однако никакая точка области D не может быть предельной точкой множества нулей функции $f(z)$, если $f(z)$ не есть тождественный нуль. Следовательно, все предельные точки множества нулей функции $f(z)$ должны находиться на границе области D.

Замечание 22. Примем здесь без доказательства, что множество всех нулей аналитической в области D функции $f(z)$ ($f(z)$ не равна тождественно нулю) можно рассматривать в виде последовательности точек, которые можно перенумеровать. В противном случае должна была бы существовать предельная точка этих нулей внутри области, что невозможно.

Теорема о нулях аналитических функций. *Пусть функция* $f(z)$ *аналитична в окрестности своего нуля* a *и не равна тождественно нулю ни в какой точке его окрестности, тогда существует окрестность точки* a, *в которой* $f(z)$ *не имеет других нулей, кроме* a.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Если аналитическая функция не равна тождественно нулю в окрестности своего нуля a, то в её тейлоровском ряде с центром в точке a все коэффициенты не могут равняться нулю (иначе бы сумма ряда была тождественно равна нулю).

Таким образом, в окрестности нуля порядка n тейлоровское разложение функции имеет вид:

$$f(z) = c_n (z-a)^n + c_{n+1}(z-a)^{n+1} + \ldots, \tag{6.36}$$

где $c_n \neq 0$ и $n \geq 1$.

Определение 6.5. Номер младшего отличного от нуля коэффициента этого разложения называется *порядком нуля* a.

Замечание 23. Порядок нуля можно определить как *порядок младшей* отличной от нуля *производной* $f^{(n)}(a)$.

Замечание 24. Очевидно также, что в окрестности нуля порядка n аналитическая функция $f(z)$ допускает представление вида:

$$f(z) = (z-a)^n \, \varphi(z), \tag{6.37}$$

где функция

$$\varphi(z) = c_n + c_{n+1}(z-a) + \ldots; \quad \varphi(a) = c_n \neq 0 \tag{6.38}$$

также аналитична в окрестности точки a (так как она представляется сходящимся степенным рядом).

В силу непрерывности $\varphi(z)$ эта функция отлична от нуля и всюду в некоторой окрестности точки a. Тогда существует окрестность точки a, в которой $f(z)$ не имеет других нулей, кроме a, *что и требовалось доказать*.

Замечание 25. Из этой теоремы вытекает теорема *единственности* теории аналитических функций.

Теорема 6.7. (*Теорема единственности***)** *Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ аналитичны в области D и их значения совпадают на некоторой последовательности точек a_n, сходящейся к внутренней точке a области D, то всюду в D*

$$f_1(z) \equiv f_2(z).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: рассмотрим функцию

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z).$$

Эта разность аналитична в D и имеет своими нулями точки a_n, а в силу непрерывности и точку a, так как $f(a) = \lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = 0$. Отсюда следует, что $f(z)$ тождественно равна нулю в некоторой окрестности точки a, ибо в противном случае нарушилась бы только что доказанная теорема о нулях аналитической функции. Таким образом, множество *всех* нулей функции $f(z)$ *имеет хотя бы одну внутреннюю точку.*

Обозначим через *A* совокупность *всех* внутренних точек множества нулей функции $f(z)$. Если *A* совпадает с D, то наша *теорема доказана*.

Если же *A* совпадает только с частью области *D*, то найдётся граничная точка b множества *A*, являющаяся внутренней точкой *D*. Существует последовательность точек b_n множества *A*, сходящаяся к *b*. Точка *b* в силу непрерывности $f(z)$ является нулём $f(z)$. С другой стороны, $f(z)$ не равна тождественно нулю ни в какой окрестности точки *b*, ибо тогда *b* была бы внутренней, а не граничной точкой множества *A*. Из теоремы о нулях вытекает, что в некоторой окрестности точки *b* нет ни одного нуля $f(z)$, но это противоречит тому, что *b* является граничной точкой *A*. Полученное противоречие и *доказывает теорему единственности*.

Замечание 26. Из *теоремы единственности* вытекает, что аналитическая в некоторой области и не равная тождественно нулю функция $f(z)$ не может обращаться в нуль ни в какой подобласти из *D*, ни на какой дуге, лежащей в *D*, ни даже на последовательности точек *D,* сходящихся к её внутренней точке.

Замечание 27. Можно, однако, привести пример, когда бесконечная последовательность нулей функции сходится к граничной точке её области аналитичности: функция $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ обращается в нуль на последовательности точек $z_n = \dfrac{1}{n\pi}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$, сходящейся к точке $z = 0$.

§ 7. Аналитическое продолжение. Римановы поверхности

Если функция $f(z)$ является аналитической в некоторой области D, то естественно возникает вопрос о возможности расширения этой области с сохранением аналитичности функции $f(z)$ в области D вместе с новой расширенной частью.

Определение 7.1. Экстраполирование аналитической функции на область, в которой область D является частью, называется *аналитическим продолжением функции.*

Замечание 1. Аналитическое продолжение аналитической функции отличается от продолжения графика функции вещественной переменной. График функции $f(x)$, заданный на отрезке $[a,b]$ можно продолжить множеством способов, а аналитическая функция, заданная в области D, полностью определяет своё аналитической продолжение, если аналитическое продолжение вообще возможно.

Определение 7.2. Пусть функция записана в виде ряда Тейлора, и в ряде отсутствует свободный член и ещё несколько членов, то есть ряд имеет вид:

$$f(z) = a_m(z-b)^m + a_{m+1}(z-b)^{m+1} + ... \qquad (a_m \neq 0), \tag{7.1}$$

В этом случае точка $z = b$ называется *корнем кратности* m. Ряд (7.1) можно представить в виде

$$f(z) = (z-b)^m [a_m + a_{m+1}(z-b) + a_{m+2}(z-b)^2 + ... \quad] \tag{7.2}$$

Пусть значение z будет близким к b, но не равно b. При этом множитель $(z-b)^m$ будет отличен от нуля, а стоящая в квадратных скобках сумма будет близкой по величине числу a_m, отличному от нуля.

Теорема 7.1. *Если функция $f(z)$ аналитическая внутри области D и обращается в нуль в некоторой области γ, составляющей часть области D, то $f(z)$ равна нулю тождественно во всей области D.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство от противного: положим, что $f(z)$ отлична от нуля в некоторой точке c области D. Возьмём внутри области γ некоторую точку b и соединим её с кривой l, принадлежащей области D. На некотором участке, примыкающем к точке b наша функция равна нулю, а на участке, примыкающем к точке c, она отлична от нуля. В этом случае на кривой l есть некоторая точка d такая, что на всём участке bd функция равна нулю, а на участке dc есть точки, сколь угодно близкие к d, в которых функция отлична от нуля. Аналитическая функция является в то же время непрерывной и, следовательно, в самой точке d она должна иметь корень. Но этот корень оказывается не изолированным, так как вся дуга bd кривой l состоит из корней нашей функции. Но тогда из предыдущих рассуждений следует, что разложение этой функции в ряд Тейлора с центром d должно обращаться тождественно в нуль, и, следовательно, функция должна быть равна нулю в некотором круге с центром d, и тогда должна быть равна нулю на некотором участке кривой l, примыкающем к точке d, что противоречит условию, что на участке dc есть точки, сколь угодно близкие к d, в которых функция отлична от нуля. *Теорема таким образом доказана.*

Замечание 2. При доказательстве теоремы можно было бы ограничиться требованием, чтобы $f(z)$ обращалась в нуль на некоторой кривой, лежащей внутри D. При этом функция должна была бы обращаться в нуль и в некотором круге, имеющем центр в одной из точек упомянутой кривой.

Замечание 3. Можно также предположить, что корни $f(z)$ имеют такую точку b внутри D, что в круге с центром в b и с любым малым радиусом находится бесчисленное множество корней $f(z)$. При этом, в силу предыдущих соображений, ряд Тейлора $f(z)$ с центром b должен был бы обращаться тождественно в нуль, то есть, $f(z)$ была бы равной нулю в некотором круге с центром b, то есть, была бы равна нулю всюду в D.

Следствие 1. Пусть две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические в области D, совпадают на некотором куске γ внутри этой области или на некоторой кривой. При этом разность должна быть равна нулю в γ и, согласно теореме 7.1, она будет равна нулю во всей области. Отсюда следует важный вывод: *если две функции, аналитические в некоторой области, совпадают в некоторой части этой области (или на кривой), то они совпадают во всей области.*

Следствие 2. Если у двух функций совпадают их значения и значения их производных в некоторой одной точке b области D, то будут совпадать их разложения в ряд Тейлора с центром в точке b, при этом функции будут совпадать в некотором круге с центром в точке b, а тогда они будут совпадать во всей области D. *Совпадение значений и всех производных* *двух функций в одной точке влечёт за собой их совпадение во всей области аналитичности функций.*

Замечание 4. Вообще говоря, нет смысла рассматривать $f_1(z)$ и $f_2(z)$ как различные функции. Вследствие того, что одна функция однозначно определяется через другую, их можно считать *элементами* одной и той же *функции* $F(z)$, которая будет *аналитической во всей области* $D = D_1 + D_2$.

Пусть на комплексной плоскости выделены две области, имеющие общую часть. При этом возможны три случая:

1) область D_1 содержится в области D_2, тогда D_{12} совпадает с областью D_1;

2) пересечение D_{12} является односвязной или многосвязной областью;

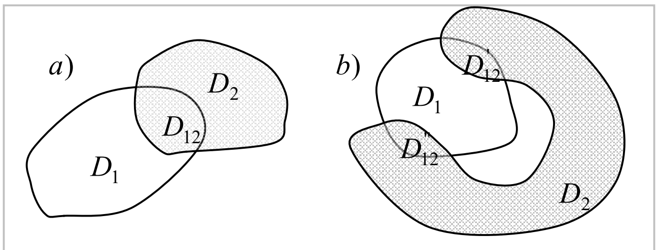


Рисунок 7.1

3) пересечение D_{12} состоит из нескольких отдельных связных областей (случай b). Рассмотрим случай, когда нам даны две функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, причём первая аналитична в области D_1, а вторая – в D_2. Пусть области D_1 и D_2 имеют общую часть D_{12} и пусть в этой части функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают. В этом случае обе функции определяются однозначно по теореме единственности, потому что не существует никакой другой функции, кроме $f_2(z)$, которая определялась бы аналитической в области D_2 и имела бы те же значения в области D_{12}. Таким образом, функция $f_2(z)$ вполне определяется через свои значения в области D_{12} или, что то же самое, через функцию $f_1(z)$, которая в свою очередь вполне определяется через $f_1(z)$.

Следствие 3. Можно сказать, что, когда две области D_1 и D_2 имеют положение, показанное на рисунке 7.1 (случай *a*), и функция $f_1(z)$ аналитична в D_1, то либо не существует никакой другой функции, аналитичной в D_2 и совпадающей с $f_1(z)$ в области D_{12}, либо существует одна такая функция. В последнем случае говорят, что заданная в области D_1 функция продолжается в область D_2. Функция $f_2(z)$ называется *аналитическим продолжением* функции $f_1(z)$ в область D_2.

Определение 7.3. Функция $F(z)$ называется *аналитическим продолжением* функции $f_1(z)$ (или $f_2(z)$) на области $D = D_1 + D_2$, если она равна

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \\ f_2(z), & z \in D_2 \end{cases} \tag{7.3}$$

В этом случае функцию $f_2(z)$ также называют *аналитическим продолжением* функции $f_1(z)$ на область D_2 (D_1).

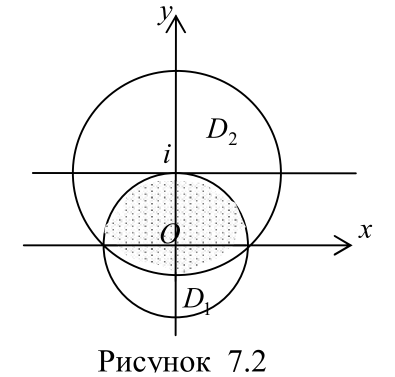


Рисунок 7.2

Замечание 5. Аналитическое продолжение $F(z)$ функции $f_1(z)$ определено единственным образом.

Замечание 6. Данный способ аналитического продолжения функции $f_1(z)$ на более широкую область представляет собой *простейшую форму принципа аналитического продолжения.*

П р и м е р. Пусть D_1 - круг $|z| < 1$, а D_2 - круг $|z - i| < \sqrt{2}$ (рис. 7.2). Пусть в области D_2 задана функция

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n .$$

Нужно построить функцию $f_2(z)$, аналитическую в области D, которая совпала бы во всех точках области D_{12} с функцией $f_1(z)$. Известно, что если такая функция существует, то она единственна. Такой функцией будет

$$f_2(z)=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n,$$

так как этот ряд сходится при $\left|\frac{z-i}{1-i}\right|<1$ или, что то же самое, $|z-i|<\sqrt{2}$ и его сумма равна $\frac{1}{1-z}$, как и функции $f_1(z)$. Следовательно, во всех точках области D_{12} функции равны $f_1(z)=f_2(z)$, то есть являются аналитическим продолжением друг друга, и являются элементами одной и тоже функции $F(z)=\frac{1}{1-z}$.

Случай в), когда функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ тождественно совпадают лишь на части D_{12} областей D_1 и D_2 (случай б на рис. 7.1). Рассмотрим область $\hat{D}=D_1+D_2-D_{12}^{''}$, где $D_{12}^{''}=D_{12}-D_{12}^{'}$ - та часть пересечения D_{12}, в которой функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ различны. В соответствии с рассмотренным выше в $\hat{D}$ определена единственная аналитическая функция $\hat{F}(z)$, являющаяся аналитическим продолжением $f_1(z)$, заданной в области $D_1-D_{12}^{''}$, на область $\hat{D}$. Эта функция тождественно совпадает с функцией $f_2(z)$в области $D_2-D_{12}^{''}$. Функция $\hat{F}(z)$ может быть продолжена на область $D_{12}^{''}$ двумя способами:

$$F_1(z)=\begin{cases}\hat{F}(z), & z\in\hat{D}\\ f_1(z), & z\in D_{12}^{''}\end{cases}\tag{7.4}$$

или

$$F_2(z)=\begin{cases}\hat{F}(z), & z\in\hat{D}\\ f_2(z), & z\in D_{12}^{''}\end{cases}\tag{7.5}$$

Замечание 7. Таким образом, приходится рассматривать многозначную аналитическую функцию $F(z)$, определённую в области $D=D_1+D_2$ и принимающую различные значения в одних и тех же точках $D_{12}^{''}$ области D.

В частности в данном случае получилась двузначная функция, принимающая в одной и той же точке $z_o\in D_{12}^{''}$ два различных значения, совпадающих со значениями функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ в одной точке.

При работе с многозначными функциями есть два пути. Либо вводить понятие ветвления функции и выбирать одну из ветвей аналитической функции. Либо рассматривать функцию как однозначную, но определённую на более сложном многообразии, чем простая комплексная плоскость. Так, возвращаясь к рассмотренному примеру двузначной функции, считают, что области D_1 и D_2 склеены по общей части $D_{12}^{'}$, в которой $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают, а два экземпляра $D_{12}^{''}$, принадлежащие областям D_1 и D_2, оставлены свободными. Тогда на полученном геометрическом многообразии, представляющем собой объединение областей D_1 и D_2, склеенных по $D_{12}^{'}$ (так что точки, принадлежащие $D_{12}^{''}$, перекрыты дважды), функция $F(z)$ является однозначной аналитической функцией.

Определение 7.4. Построенное таким образом многообразие называется *римановой поверхностью* аналитической функции $F(z)$, являющейся аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ $[f_2(z)]$, а отдельные экземпляры повторяющихся областей – различными *листами римановой поверхности.*

Однозначные ветви многозначной функции. Точки ветвления

Определение 7. 5. Пусть функция $w = f(z)$, аналитическая в области *D*, отображает *D* на область *G* и такова, что обратная функция $z = \varphi(w)$ *многозначна* в области *G*. Если существуют однозначные аналитические в области *G* функции $z = \varphi_1(w)$, $z = \varphi_2(w)$, …, для которых данная функция $w = f(z)$ является обратной, то функции $\varphi_1(w), \varphi_2(w)$, … *называются однозначными ветвями функции* $\varphi(w)$, определёнными в области *G*.

Например, функция $w = z^n$ каждой точке z_o ставит в соответствие единственную точку w_o, но одной и той же точке w_o $(w \neq 0, w \neq \infty)$ функция $z = \sqrt[n]{w}$ ставит в соответствие *n* различных точек плоскости *z*; при этом, если $w = \rho e^{i\theta}$, то эти *n* значений z находятся по формулам $z_k = r e^{i\varphi_k}$, где

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \varphi_k = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad (-\pi < \theta \leq \pi, \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1).$$

Пусть односвязная область *G* содержит точку w_o, но не содержит точек $w = 0$ и $w = \infty$. Тогда различным фиксированным значениям k (k=0, 1, 2, …, n-1) при одном и том же выборе числа θ_o (например, $\theta_o = \arg w_o$) соответствуют различные ветви функции $z = \sqrt[n]{w}$.

Определение 7.6. Точка, обладающая тем свойством, что обход вокруг неё в достаточно малой окрестности влечёт за собой переход от одной ветви многозначной функции к другой, называется точкой *ветвления* рассматриваемой многозначной функции.

Точками ветвления функции $\sqrt[n]{w}$ являются точки $w = 0$ и $w = \infty$. После *n* - кратного обхода вокруг точки $w = 0$ мы вернёмся к первоначальной ветви функции $\sqrt[n]{w}$; точки ветвления, обладающие таким свойством, называются *алгебраическими точками ветвления* порядка *n* - 1. В каждой из этих точек функция имеет только одно значение $\sqrt[n]{0} = 0, \sqrt[n]{\infty} = \infty$, т.е. различные ветви функции в этих точках совпадают.

Для логарифмической функции $w = \mathrm{Ln}\, z$ точками ветвления являются $z = 0$ è $z = \infty$, причём $\mathrm{Ln}\, 0 = \infty$ è $\mathrm{Ln}\, \infty = \infty$. Любое конечное число обходов (в одном и том же направлении) вокруг точки $z = 0$ не приведёт к первоначальной ветви функции $\mathrm{Ln}\, z$. Такие точки ветвления называются *логарифмическими*. При интегрировании необходимо выделять ветвь многозначной функции. Это достигается заданием значения многозначной функции в некоторой точке контура интегрирования. Если контур интегрирования *C* замкнут, то начальной точкой z_o пути интегрирования считается та точка, в которой задано значение подынтегральной функции.

Терема Римана. *Если* $f_1(z)$ *регулярна (аналитична) с одной стороны от дуги кривой L и на самой этой кривой, и* $f_2(z)$ *обладает тем же свойством по другую сторону от кривой, и значения этих функций на самой дуге L совпадают, то эти две функции совместно определяют единую регулярную функцию в области, содержащей упомянутую дугу внутри себя, или, иначе говоря,* $f_2(z)$ *является аналитическим продолжением* $f_1(z)$.

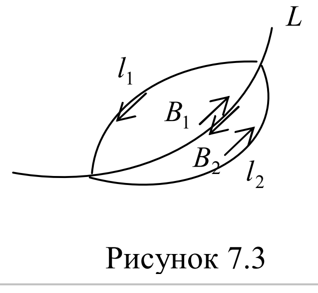


Рисунок 7.3

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проведём контуры l_1 и l_2 с общими концами на L, на которых первый лежит в области регулярной функции $f_1(z)$, так что в областях B_1 и B_2, ограниченных замкнутыми контурами l_1 и L и l_2 и L, наши функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ регулярны (рис. 7.3) . Возьмём некоторую точку z внутри B_1. Она будет лежать вне B_2, и можно написать

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_1+L}\frac{f_1(z')}{z'-z}d\,z'; \qquad 0=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_2+L}\frac{f_2(z')}{z'-z}d\,z'.$$

Если сложить эти два равенства, то в правой части придётся два раза интегрировать по дуге L в противоположных направлениях, причём подынтегральные функции при обоих интегрированиях будут одинаковыми, так как на указанной дуге значения $f_1(z')$ и $f_2(z')$ совпадают. Таким образом, эти два интеграла взаимно сократятся и останутся лишь интегралы по дугам l_1 и l_2. Для сокращения обозначим через $f(z')$ функцию, равную $f_1(z')$ на дуге l_1 и равную $f_2(z')$ на дуге l_2. Складывая предыдущие равенства, получают

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_1+l_2}\frac{f(z')}{z'-z}d\,z'.$$

Совершенно так же, беря точку z в области B_2, получают

$$f_2(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{l_1+l_2}\frac{f(z')}{z'-z}d\,z',$$

то есть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ выражаются одним и тем же интегралом типа Коши по замкнутому контуру (l_1+l_2). Следовательно, первая из этих функций из области B_1 аналитически продолжима в область B_2, а вторая из B_2 - в B_1, и в результате этого аналитического продолжения они создают единую аналитическую функцию, *что и доказывает теорему Римана.*

Замечание 8. В данном доказательстве использована формула Коши, которая справедлива и для того случая, когда функция не регулярна на контуре, но лишь непрерывна в замкнутой области и регулярна внутри. Таким образом, в условии теоремы Римана не обязательно считать данные функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ регулярными на самой дуге. Достаточно лишь, чтобы $f_1(z)$ была регулярна с одной стороны дуги L и непрерывна вплоть до самой дуги и то же для $f_2(z)$ с другой стороны дуги, причём значения этих функций на самой дуге L должны совпадать При этом теорема Римана доказывает возможность аналитического продолжения каждой из этих функций через дугу и тот факт, что одна из этих функций осуществляет это аналитической продолжение.

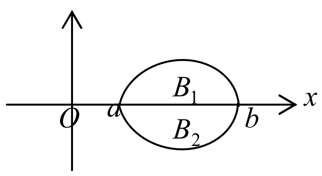


Рисунок 7.4

Принцип симметрии. *Если $f_1(z)$ регулярна с одной стороны от некоторого отрезка (a,b) вещественной оси и непрерывна вплоть до этого отрезка, причём на самом отрезке её значения вещественны, то эта функция аналитически продолжима через упомянутый отрезок, и в точках, симметричных относительно вещественной оси, эта функция будет иметь комплексные сопряжённые значения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим для определённости, что функция $f_1(z)$ регулярна в некоторой области B_1, примыкающей к отрезку (a,b) и лежащей над этим отрезком (рис. 7.4). Построим область B_2, симметричную с B_1 относительно вещественной оси, и определим в этой области функцию $f_2(z)$ по следующему правилу: положим, что в каждой точке A_2 области B_2 функция $f_2(z)$ имеет значение комплексное, сопряженное с тем значением, которое данная функция $f_1(z)$ имеет в симметричной относительно вещественной оси точке A_1. Эти симметричные точки имеют комплексно сопряжённые координаты и, обозначая их, как всегда, через $\overline{\alpha}$ комплексное число, сопряжённое с α, можно написать определение функции $f_2(z)$ в области B_2 в виде:

$$f_2(z)=\overline{f_1(z)}.$$

Эта вновь построенная функция будет регулярной в области B_2. Действительно, для неё приращения независимого переменного Δz и функции Δw будут комплексно сопряжёнными величинами, сопряжёнными с аналитическими величинами для функции $f_1(z)$ в симметричной точке. То же можно сказать и про отношение этих приращений. Следовательно, это отношение для функции $f_2(z)$ стремится к определённому пределу, равному величине комплексно сопряжённой с аналогичным пределом для $f_1(z)$, то есть к пределу, равному $\overline{f'(z)}$, и, следовательно, функция $f_2(z)$ будет регулярной в области B_2.

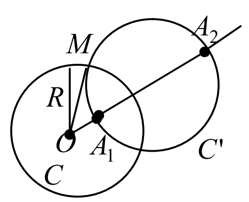


Рисунок 7.5

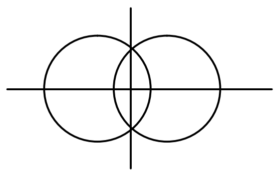
На самом отрезке (a,b) значения $f_2(z)$ совпадают со значениями $f_1(z)$, так как на этом отрезке значения $f_1(z)$ вещественны. Таким образом, $f_2(z)$ является по теореме Римана аналитическим продолжением $f_1(z)$ через отрезок, что и доказывает принцип симметрии.

Можно сформулировать принцип симметрии геометрически, а именно: *если $f_1(z)$ регулярна с одной стороны отрезка (a,b) вещественной оси и преобразует этот отрезок тоже в отрезок вещественной оси, то она аналитически продолжима через этот отрезок и точки, симметричные относительно вещественной оси, преобразует в точки, тоже симметричные относительно вещественной оси.*

Более общий случай симметрии можно получить, введя понятие о точках симметричных относительно окружности.

Определение 7.7. Две точки называются *симметричными относительно окружности*, если эти две точки находятся на одном и том же радиусе окружности (одна на самом радиусе, а другая на его продолжении), причём произведение расстояний этих точек до центра окружности равно квадрату радиуса этой окружности (Рис.7.5).

Пусть A_1 и A_2 - две точки, симметричные относительно окружности C. Проведём через эти две точки какую-нибудь окружность C', и пусть M - одна их точек пересечения C' с окружностью C.


Рисvнок 7.6

Принимая во внимание, что произведение секущей $\overline{OA_2}$ на её внешнюю часть $\overline{OA_1}$ должно равняется квадрату касательной и, с другой стороны, по определению должно равняться квадрату радиуса $\overline{OM}^2$, можно утверждать, что радиус $\overline{OM}$ является касательной к окружности C. Отсюда видно, что и для двух точек A_1 и A_2, симметричных относительно окружности C, характерным является то обстоятельство, что всякая окружность, проходящая через них, будет ортогональна с C, или, иначе говоря, *пучок окружностей, проходящих через точки, симметричные относительно окружности C, будет состоять из окружностей, ортогональных к C.*

Таким же характерным свойством обладают и две точки, симметричные относительно прямой, а именно: *пучок окружностей, проходящих через эти две точки, будет состоять из окружностей, ортогональных к прямой* (рис. 7.6).

Принцип симметрии в общем виде читается так: *если $f_1(z)$ регулярна с одной стороны некоторой дуги (a,b) окружности C_1, непрерывна вплоть до этой дуги и преобразует эту дугу также в некоторую дугу другой окружности C_2, то $f_1(z)$ аналитически продолжима за дугу (a,b), и точки, симметричные относительно окружности C_1, она преобразует в точки, симметричные относительно окружности C_2.*

Замечание 9. В этой формулировке принцип симметрии можно понимать под словом «окружность» как окружность в собственном смысле этого слова, так и прямую линию.

§ 8. Ряд Лорана

Ряды Тейлора - аппарат, удобный для представления функций, аналитических в круговых областях. Очень важно иметь аппарат, пригодный для областей другого вида. Например, для изучения функций, аналитических в некоторой окрестности точки a всюду, кроме самой точки a, когда приходится рассматривать кольцевые области вида $0<|z-a|<R$. Оказывается, что для функций, аналитических в кольцевых областях $r<|z-a|<R$, где $r \ge 0$, $R \le \infty$, можно построить разложение по положительным и отрицательным степеням $(z-a)$ вида

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{8.1}$$

являющихся обобщением тейлоровских разложений [1].

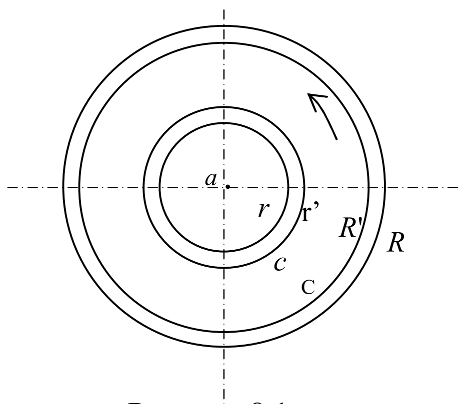


Рисунок 8.1

Теорема 8.1. (**Пьер Лоран,** 1843) *В любом кольце* $r<|z-a|<R$*, в котором функция* $f(z)$ *аналитична, эта функция может быть представлена своим рядом Лорана* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$*, равномерно сходящимся в любой замкнутой области, принадлежащей кольцу К.*

Д о к а з а т е л ь с т в о: Рассмотрим разложения вида (8.1). Пусть функция $f(z)$ аналитична в некотором кольце $r<|z-a|<R$, где $r \ge 0$, $R \le \infty$. Выберем произвольные числа r' и R' так, что $r<r'<R'<R$, а также число k, $0<k<1$, и рассмотрим кольцо $\frac{r'}{k}<|z-a|<kR'$. В произвольной внутренней точке z этого кольца мы можем представить $f(z)$ по формуле Коши, которая для нашего случая принимает вид

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z}, \tag{8.2}$$

где *обе* окружности С: $|z-a|<R'$ и с: $|z-a|<r'$ проходятся *против часовой стрелки*.

Для первого интеграла имеем $\left|\frac{z-a}{\varsigma-a}\right| < \frac{kR'}{R'} = k < 1$, следовательно, входящую в него дробь можно разложить в сходящуюся на С равномерно относительно ζ геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{\varsigma - z} = \frac{1}{\varsigma - a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{\varsigma-a}} = \frac{1}{\varsigma-a} + \frac{z-a}{(\varsigma-a)^2} + .\frac{(z-a)^2}{(\varsigma-a)^3} + ... + \frac{(z-a)^n}{(\varsigma-a)^{n+1}} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\varsigma-a)^{n+1}}$$

Умножая это разложение на $\frac{f(\varsigma)}{2\pi i}$ и интегрируя его почленно по ζ (что можно в силу равномерной сходимости), мы получим разложение первого члена формулы (8.2) в степенной ряд:

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{8.3}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, 3, ...). \tag{8.4}$$

Заметим, что выражение (8.3) нельзя представить в виде $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, потому что $f(z)$ вообще говоря *не аналитична* в точке a.

Для второго интеграла имеем:

$$\left|\frac{z-a}{\varsigma-a}\right| < \frac{kr'}{r'} = k < 1,$$

следовательно, равномерно сходится прогрессия

$$\frac{1}{\varsigma - z} = -\frac{1}{z-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{\varsigma-a}{z-a}} = -\frac{1}{z-a} - \frac{\varsigma-a}{(z-a)^2} - \frac{(\varsigma-a)^2}{(z-a)^3} - .... - \frac{(\varsigma-a)^{n-1}}{(z-a)^n} - ...$$

Как и выше, получим разложение второго члена формулы (8.2) в ряд, но теперь по отрицательным степеням $(z-a)$:

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{\varsigma - z} = \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}, \tag{8.5}$$

где

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(\varsigma)(\varsigma-a)^{n-1}d\varsigma \quad (n = 1, 2, 3, ...). \tag{8.6}$$

Заменим в формулах (8.5) и (8.6) индекс $-n$, пробегающий значения -1, -2, -3, …., тогда, объединяя оба разложения (8.3) и (8.5) в одно, получим:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{8.7}$$

Далее, в формулах (8.4) и (8.6) окружности C и c можно заменить любой окружностью γ: $|z-a| = \rho$, где $r' < \rho < R'$. Поэтому обе эти формулы можно объединить в одну:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a)^{n+1}} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...), \tag{8.8}$$

где контур интегрирования γ есть произвольная окружность с центром в точке a, лежащая внутри данного кольца.

Определение 8.1. Полученное здесь разложение (8.7) функции $f(z)$ по положительным и отрицательным степеням $(z-a)$ с коэффициентами по формулам (8.8), называется *лорановым разложением функции* $f(z)$ *с центром в точке* a.

Определение 8.2. Ряд (8.3) называется *правильной,* ряд (8.5) - *главной* частью этого разложения (8.7) в ряд Лорана.

Замечание 1. Так как r' и R' в нашем рассуждении могут быть взяты сколь угодно близко к r и R, а k может сколь угодно мало отличаться от 1, то разложение (8.7) можно считать установленным для всех точек z кольца аналитичности функции $f(z)$.

Замечание 2. *Правильная часть ряда Лорана* по теореме Абеля сходится всюду в круге $|z-a| < R$, причём в любом круге $|z-a| < kR \quad (0 < k < 1)$ его сходимость равномерна.

Замечание 3. *Главная часть ряда Лорана* представляет степенной ряд относительно переменной $Z = \frac{1}{z-a}$, следовательно, по той же теореме он сходится при $|Z| < \frac{1}{r}$, т.е. всюду вне круга $|z-a| > r$, причём при $|z-a| > \frac{r}{k} \quad 0 < k < 1$, его сходимость тоже равномерна. Таким образом, *доказана теорема Лорана.*

Следствие 1. Из формул (8.8) для коэффициентов ряда Лорана получаем следующие *неравенства Коши***:** если функция $f(z)$ ограничена на окружности $|z-a|<\rho$ и функция $|f(z)|\le M$, то

$$c_n < \frac{M}{\rho^n} \tag{8.9}$$

Заметим, наконец, что областью сходимости произвольного ряда вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

всегда служит некоторое круговое кольцо $r<|z-a|<R$, где $0\le r\le\infty$, $0\le R\le\infty$. В этом легко убедиться с помощью теоремы Абеля, разбивая ряд на *правильную* и *главную* части.

Для случая $r<R$ справедлива теорема 8.2.

Теорема 8.2. *Если ряд*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{8.10}$$

сходится в кольце $r<|z-a|<R$*, то его сумма* $f(z)$ *аналитична в этом кольце и разложение* (8.10) *является рядом Лорана для функции* $f(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о: В самом деле, аналитичность функции $f(z)$ доказывается на основании теоремы Абеля и Вейерштрасса так же, как в теореме 6.5. На любой окружности γ: $|z-a|=\rho$, где $r<\rho<R$, ряд (8.10) сходится равномерно и остаётся таким после умножения на $(z-a)^{-(n+1)}$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,....)$. Если проинтегрировать разложение

$$\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^{k-n-1}$$

по окружности γ и воспользоваться легко доказываемыми для любого целого n соотношениями:

$$\int_C (z-a)^n\, dz = \begin{cases} 0, & n\ne -1,\\ 2\pi i, & n=-1, \end{cases}$$

то мы получим выражения коэффициентов ряда (8.10):

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}},$$

совпадающие с выражениями (8.8). Следовательно, ряд (8.10) является *рядом Лорана* функции $f(z)$, и *теорема доказана*.

Определение 8.3. Функция $f(z)$ является *аналитической в области D*, тогда и только тогда, когда она представима степенным рядом $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{-k}$ по отрицательным степеням z, сходящимся для достаточно больших $|z|$.

Замечание 4. *Теорема* 8.2 является теоремой *единственности* разложения в ряд Лорана, ибо из неё следует, что найденное любым способом разложение аналитической функции в ряд по положительным и отрицательным степеням $(z-a)$ является *лорановским разложениям* этой функции.

Определение 8.4 (радиуса сходимости ряда Лорана)

Пусть дан ряд

$$\frac{c_{-1}}{z-z_o} + \frac{c_{-2}}{(z-z_o)^2} + ... + \frac{c_{-n}}{(z-z_o)^n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_o)^n} \tag{8.11}$$

Если $c_{-n} \neq 0$ и существует конечный предел

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{-n-1}|}{|c_{-n}|}, \tag{8.12}$$

то этот ряд сходится в области

$$|z - z_o| > r. \tag{8.13}$$

Замечание 5 (о сходимости рядов Лорана). Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_o)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_o)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_o)^n =$$
$$= \ldots + \frac{c_{-n}}{(z-z_o)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_o} + c_o + c_1(z-z_o) + \ldots + c_n(z-z_o)^n + \ldots \tag{8.14}$$

сходится в области, в которой сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-z_o)^n} = \ldots\ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_o} + \frac{c_{-2}}{(z-z_o)^2} + \ldots. \tag{8.15}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_o)^n = c_o + c_1(z-z_o) + c_2(z-z_o)^2 + \ldots \tag{8.16}$$

Область сходимости ряда Лорана. Пусть ряд (8.15) сходится в области $|z - z_o| > r.$, т.е. вне круга с центром в точке z_o радиуса r, а ряд (8.16) в круге $|z - z_o| < R.$. Тогда, если

1) $r > R$, то ряд (8.14) расходится всюду;
2) $r < R$, то ряд (8.14) сходится в кольце $r < |z - z_o| < R$. Здесь $r \geq 0,\ 0 < R < +\infty.$

Упражнения к главе 2

Примеры к § 6.

П р и м е р 1. Разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$ функцию

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3},$$

используя формулу

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots . \quad (R = 1)$$

Р е ш е н и е. Разложим данную функцию на простейшие дроби

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z - 3} = \frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{3}{4}\frac{1}{z-3}$$

Преобразуем правую часть следующим образом:

$$\frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{3}{4}\frac{1}{z-3} = \frac{1}{4}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{z}{3}}.$$

Используя разложение (6.19), получим разложение в виде

$$f(z) = \frac{1}{4}(1 - z + z^2 - z^3 + \ldots) - \frac{1}{4}.(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} + \ldots) =$$
$$= \frac{1}{4}(-\frac{4}{3}z + \frac{8}{9}z^2 - \frac{28}{27}z^3 + \ldots) = -\frac{z}{3} + \frac{2}{3^2}z^2 - \frac{7}{3^3}z^3 + \ldots.)$$

Ближайшей к точке $z = 0$ *особой точкой* данной функции является точка $z = -1$, поэтому радиус сходимости равен $R = 1$.

П р и м е р 2. Разложить по степеням разности $z - 3$ функцию

$$f(z)=\frac{1}{3-2z}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$\frac{1}{3-2z}=\frac{1}{3-2(z-3+3)}=\frac{1}{-3-2(z-3)}=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2}{3}(z-3)}$$

Заменяя в разложении (*) z на $\frac{2}{3}(z-3)$, получим

$$\frac{1}{3-2z}=-\frac{1}{3}\left[1-\frac{2}{3}(z-3)+\frac{2^2}{3^2}(z-3)^2-\frac{2^3}{3^3}(z-3)^3+....\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}(z-3)-\frac{2^2}{3^3}(z-3)^2+\frac{2^3}{3^4}(z-3)^3-...$$

Этот ряд сходится при условии $\frac{2}{3}(z-3)<1$, т.е. радиус сходимости ряда равен $R=\frac{3}{2}$..

П р и м е р 3. Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням z функции $f(z)=\operatorname{tg} z$ и найти радиус сходимости ряда.

Р е ш е н и е . Пусть искомый ряд имеет вид $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_o)^n$, где $c_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$(n=0,\pm 1,\pm 2,....)$, $f^{(0)}(0)=f(0)=0$.

Для нахождения значений производных в точке $z=0$ продифференцируем функцию $f(z)=\operatorname{tg} z$, для чего представим первую производную в виде:

$$f'(z)=\frac{1}{\cos^2 z} \text{ или } f'(z)=1+f^2(z)$$

$$\left.\begin{aligned}
&f''(z)=2f(z)\cdot f'(z),\\
&f'''(z)=2\left[f'^2(z)+f(z)\cdot f''(z)\right],\\
&f^{IV}(z)=2\left[3f'(z)f''(z)+f(z)\cdot f'''(z)\right],\\
&f^{V}(z)=2\left[3f''^2(z)+4f'(z)f'''(z)+f(z)\cdot f^{IV}(z)\cdot\right],\\
&...
\end{aligned}\right\}$$

Полагая $z=0$, найдём $f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=2,\quad f^{IV}(0)=0,\quad f^{V}(0)=16,...$

Подставляя найденные значения производных в ряд, получим

$$\operatorname{tg} z=z+\frac{2}{3!}z^3+\frac{16}{5!}z^5+....$$

Ближайшей особой точкой к $z=0$ является точка $\varsigma=\frac{\pi}{2}$, поэтому радиус сходимости равен

$R=\frac{\pi}{2}.$

П р и м е р 4. Разложение в ряд Тейлора функции *вероятности ошибок*, которая выражается интегралом

$$erf\, z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\varsigma^2}d\varsigma,$$

который не выражается через элементарные функции.

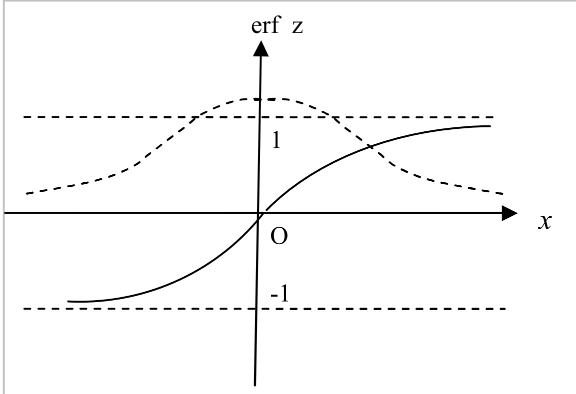


Рисунок 1

Р е ш е н и е. Вспомним, что уравнение кривой Гаусса (плотность распределения) имеет вид $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, а функция Лапласа (рис.6.1)

$$\Phi_o(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^u e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

- *интеграл вероятности.*

Чтобы разложить $erf\,z$ в ряд Тейлора в точке $a=0$, достаточно подставить $-\varsigma^2$ вместо ζ в разложение $\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\varsigma}$ и последнее проинтегрировать почленно:

$$erf\,z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\frac{z^{2k+1}}{2k+1}. \qquad (6.29)$$

Полученное разложение сходится для всех конечных z. При $x\to\infty$ по положительной полуоси функция стремится к пределу

$$erf\,z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-\varsigma^2}d\varsigma=1,$$

причём весьма быстро: например, $erf\,2$ отличается от $erf\,\infty$ на 0,5%. Однако при произвольном стремлении z к ∞ предел $erf\,z$ не существует, потому что, как видно из полученного разложения, $z=\infty$ является существенно особой точкой $erf\,z$.

Замечание 1. Наряду с функцией $erf\,z$ рассматривается её дополнение до единицы:

$$Erf\;z=1-erf\,z=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty}e^{-\varsigma^2}d\varsigma.$$

Замечание 2. Пунктиром показан график производной функции вероятности ошибок (кривой Гаусса)

П р и м е р 5. Разложение *интегрального синуса и интегрального косинуса*

$$si\,z=\int_0^z\frac{\sin\varsigma}{\varsigma}d\varsigma=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

сходящееся также для всех конечных z. При $x\to\infty$ по положительной полуоси $s\,i\,x$ стремится к пределу

$$si\,z=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

но $\lim\limits_{z\to\infty}s\,i\,z$ не существует, потому что $z=\infty$ является существенно особой точкой. Наряду с функцией $s\,i\,z$ рассматривается функция $Si\,z=\int_{\infty}^{z}\frac{\sin\varsigma}{\varsigma}d\varsigma=si\,z-\frac{\pi}{2}$, а также интегральный косинус $Ci\,z=\int_{\infty}^{z}\frac{\cos\varsigma}{\varsigma}d\varsigma.$

Примеры для самостоятельного решения.

П р и м е р 6. В следующих задачах данные функции разложить в ряд Тейлора, используя готовые разложения, и найти радиусы сходимости рядов.

1) $\sin(2z+1)$ по степеням $z+1$.

Ответ: $-\sin 1+2(z+1)\cos 1+\frac{2^2}{2!}(z+1)^2\sin 1-\frac{2^3}{3!}(z+1)^3\cos 1-$ $\quad R=\infty$

2) $\cos z$ по степеням $z+\frac{\pi}{4}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+(z+\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(z+\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(z+\frac{\pi}{4})^3+...\right]$ $\quad R=\infty$

3) e^z по степеням $2z-1$.

Ответ: $\sqrt{e}\left[1+\frac{1}{2}(2z-1)+\frac{1}{2!2^2}(2z-1)^2+\frac{1}{3!23}(2z-1)^3+...\right]$ $R=\infty$

4) $\frac{1}{3z+1}$ по степеням $z+2$

Ответ: $-\frac{1}{5}\left[1+\frac{3}{5}(z+2)+\frac{3^2}{5^2}(z+2)^2+\frac{3^3}{5^3}(z+2)^3+...\right]$ $R=\frac{5}{3}$

5) $\frac{z+1}{z^2+4z-5}$ по степеням z. Ответ: $-\frac{1}{5}-\frac{9}{25}z-\frac{41}{125}z^2-...$ $R=1$

6) $\frac{z}{z^2+i}$ по степеням z. Ответ: $-iz+z^3+iz^5-z^7-...$ $R=1$

7) $\cos^2\frac{iz}{2}$ по степеням z. Ответ: $1+\frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+...\right)$ $\quad R=\infty$

8) $\ln(2-z)$ по степеням z. Ответ: $\ln 2-\left(\frac{z}{1\cdot 2}+\frac{z^2}{2\cdot 2^2}+\frac{z^3}{3\cdot 2^3}+...\right)$ $R=2$

П р и м е р 7. Найти несколько первых членов разложения в ряд по степеням z следующих функций . Найти радиус сходимости рядов:

1) $\frac{1}{1+e^z}$. Ответ: $\frac{1}{1+e^z}\approx\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}z+\frac{1}{3!2^3}z^3+\frac{1}{5!2^5}z^5+....$ $\quad R=\pi$

2) $\ln\cos z$. Ответ: $-\frac{1}{2!}z^2-\frac{2}{4!}z^4-\frac{16}{6!}z^6+....$ $\quad R=\frac{\pi}{2}$

П р и м е р 8. Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos in\cdot z^n.$$

Р е ш е н и е. Имеем $c_n=\cos in=\frac{e^{-n}+e^n}{2}=ch\,n.$

Для нахождения радиуса сходимости R применим формулу:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|ch\,n|}{|ch\,(n+1)|}=\lim_{n\to\infty}\frac{ch\,n}{ch\,(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{ch\,n}{ch\,n\cdot ch1+sh\,n\cdot sh1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{ch1+th\,n\cdot sh1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{ch1+sh1}=e^{-1},$$

так как

$$\lim_{n\to\infty}th\,n=\lim_{n\to\infty}\frac{e^n+e^{-n}}{e^n-e^{-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+e^{-2n}}{1-e^{-2n}}=1$$

Ответ: Радиус сходимости данного ряда $R = e^{-1}$.

П р и м е р 9. Определить радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n \cdot z^n.$$

Р е ш е н и е. Находим модуль коэффициента $c_n = (1+i)^n$

$$|c_n| = \left|(1+i)^n\right| = |(1+i)|^n = (\sqrt{2})^n = 2^{n/2}$$

Применяя формулу (6.35), найдём радиус сходимости данного ряда

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{2^{n/2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: радиус сходимости данного ряда $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Для самостоятельного решения

Найти радиусы сходимости следующих степенных рядов.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{in} z^n$ Ответ: $R = 1$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{i\frac{\pi}{n}} z^n$ Ответ: $R = 1$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{1-i}\right)^n$ Ответ: $R = \sqrt{2}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{i\,n}\right)^n$ Ответ: $R = \infty$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty} ch\frac{i}{n} z^n$ Ответ: $R = 1$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z}{\ln in}\right)^n$ Ответ: $R = \infty$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty} i^n z^n$ Ответ: $R = 1$;
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi i}{n} z^n$ Ответ: $R = 1$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos^n\frac{\pi i}{\sqrt{n}} z^n$ Ответ: $R = 1$;
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{\sin^n(1+i\,n)}$ Ответ: $R = \infty$;
11. $\sum_{n=1}^{\infty}(n+i)z^n$ Ответ: $R = 1$;
12. $\sum_{n=1}^{\infty}\cos i\,n \cdot z^n$ Ответ: $R = e^{-1}$.

П р и м е р 10. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in}}{n^2}$$

Р е ш е н и е. Имеем $e^{in} = \cos n + i\sin n.$ Таким образом, вопрос о сходимости сводится к вопросу о сходимости двух рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$$

Исследуем сходимость каждого из этих рядов с помощью метода сравнения.

Учитывая, что $|\cos n| \le 1$, можно записать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos n|}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}; \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2} \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2};$$

В нашем случае $p = 2 > 1$, следовательно, оба ряда сходятся абсолютно. Следовательно, каждый из этих рядов сходится абсолютно.

П р и м е р 11. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$, Р е ш е н и е. Применим формулу Эйлера $e^{i\frac{\pi}{n}} = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$.

1) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi/n}{n}$ и учтём, что $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{n}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}=0$.

Используем теорему о сравнении рядов. Сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\pi/n}{n}$ с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Предел отношения их n - ых членов имеет вид $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\cos\pi/n}{n}}{1/n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\pi/n}{1} = 1$

Следовательно, данный ряд ведёт себя, как гармонический ряд, который *расходится* при $p=1$.

2) Для полноты рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi/n}{n}$, сравнив его тоже с гармоническим рядом..

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin\pi/n}{n}}{1/n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\pi/n}{1} = 0\,.$$

Вспомним первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Следовательно, с учётом того, что $\lim\limits_{n\to 0}\frac{\sin\pi/n}{\pi/n}=1$, сравним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\pi/n}{n}$ с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ с помощью той же теоремы о сравнении.

Используя правило Лопиталя, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\sin\pi/n}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}(-\frac{\pi}{n^2})}{-\frac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty}\pi\cos\frac{\pi}{n} = \pi$

Следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n}$ ведёт себя как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, который сходится.

Однако ряд из действительной части расходится, следовательно, расходится и данный ряд.

Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{n}$ расходится.

Примеры для самостоятельного решения.

Исследовать сходимость следующих рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos i\,n}{2^n}$ Ответ: расходится.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin i\,n}{3^n}$ Ответ: сходится
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos i\,n^2}{5^{n^2}}$ Ответ: сходится.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\,2\,n}}{n\sqrt{n}}$ Ответ: сходится
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{n}}}{\sqrt{n}}$ Ответ: расходится.
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^{\,n}}{2^{\frac{n}{2}}\cos i\,n}$. Ответ: сходится *абсолютно*
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{s\,h\,i\sqrt{n}}{\sin in}$ Ответ: сходится.
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{sh\,in}$ Ответ: расходится

9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{ch\, i\frac{\pi}{n}}{n^{\ln n}}$ Ответ: сходится. 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\text{tg }(i\pi n)}$ Ответ: расходится.

Нули функции $f(z)$

П р и м е р 1. Найти нули функции $f(z) = 1 + \cos z$ и определить их порядок.

Р е ш е н и е. Приравняем $f(z)$ нулю, получим $\cos z = -1$, откуда

$z_n = (2n+1)\pi \quad (n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, ...)$ - нули данной функции.

Далее

$$f'([(2n+1)\pi] = -\sin(2n+1)\pi = 0,$$

$$f''([(2n+1)\pi] = -\cos(2n+1)\pi = 1 \neq 0.$$

Следовательно, точки $z_n = (2n+1)\pi \quad (n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, ...)$ являются нулями второго порядка данной функции.

П р и м е р 2. Найти нули функции $f(z) = 1 - e^z$ и определить их порядки.

Р е ш е н и е. Приравнивая $f(z)$ нулю, найдём нули $z_n = 2n\pi i \quad (n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, ...)$ - функции $f(z)$. Далее

$$f'(2n\pi i) = -e^{2n\pi i} = -1 \neq 0.$$

Итак, $f(2n\pi i) = 0,\ f'(2n\pi i) \neq 0.$ Следовательно, точки $z_n = 2n\pi i \quad (n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, ...)$ - простые нули функции $f(z) = 1 - e^z$.

П р и м е р 3. Найти порядок нуля $z_o = 0$ для функции

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}.$$

Р е ш е н и е. Используя разложение функции $\sin z$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z_o = 0$, получим

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z} = \frac{z^8}{z - (z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...)} = \frac{z^8}{-\frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ...} = \frac{z^5}{-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - ...} =$$

$$= z^5 \frac{1}{-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - ...}$$

Положим $\varphi(z) = \dfrac{1}{-\frac{1}{3!} + \frac{z^2}{5!} - ...}$.

Тогда $f(z) = z^5 \varphi(z),$ где $\varphi(z)$ - функция, аналитическая в точке $z_o = 0$, причём

$$\varphi(0) = 6 \neq 0.$$

Следовательно, точка $z_o = 0$ является для данной функции нулём пятого порядка.

П р и м е р 4. Найти нули функции $f(z) = (z^2 + 1)^3 sh\, z$ и определить их порядки.

Р е ш е н и е. Полагая $f(z) = 0$, получим $(z^2 + 1)^3 sh\, z = 0,$, откуда $z^2 + 1 = 0$ или $sh\, z = 0$.

Решая эти уравнения, находим нули функции $f(z)$

$$z = -i, \quad z = i, \quad z = k\pi i, \quad (k = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, ...)$$

Пусть $z=-i,$ тогда $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z)=(z+i)^3\varphi(z),$$

где функция $f(z)=(z-i)^3 sh\, z$ является аналитической в точке $z=-i,$ причём $\varphi(-i)=8i\; sh\, i=-8\sin 1\neq 0.$ Это означает, что точка $z=-i$ есть нуль третьего порядка. Аналогично доказывается, что и точка $z=i$ является нулём третьего порядка. Исследуем нули $z=k\pi i,\quad (k=0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,...)$. Производная

$$f'(z)=6z(z^2+1)^2 sh\, z+(z^2+1)^3 ch\, z$$

в точках $z=k\pi i$ отличны от нуля. Следовательно, $z=k\pi i$ - нули первого порядка.

П р и м е р 5. *У следующих функций найти нули и определить их порядки.*

1) $f(z)=z^4+4z^2$. Ответ: $z=0$ - второго порядка, $z_{1,2}=\pm 2i$ - простые.

2) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z}$. Ответ: $z_n=n\pi,\quad (n=0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,...)$ - простые.

3) $f(z)=z^2\sin z.$ Ответ: $z=0$ - третьего порядка, $z_n=n\pi,\quad (n=0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,...)$ - простые.

4) $f(z)=\dfrac{sh^2 z}{z}$ Ответ: $z=0$ - простой, $z_n=n\pi i,\quad (n=0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,...)$ - второго порядка..

5) $f(z)=1+ch\, z$. Ответ: $z_n=(2n+1)\pi i\quad (n=0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,...)$ - второго порядка.

6) $f(z)=\dfrac{(1-sh\, z)^2}{z}$ Ответ: $z_n=(4n+1)\dfrac{\pi}{2}i\quad (n=0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,...)$ - второго порядка.

7) $f(z)=(z+\pi i)sh\, z$ Ответ: $z=-\pi i$ - второго порядка. $z_n=n\pi i,\quad (n=0,\quad \pm 1,\quad \pm 2,...)$ - простые.

Примеры к § 8.

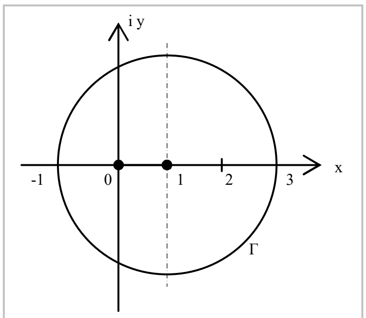


Рисунок к примеру 1

П р и м е р 1. Разложить в ряд Лорана в кольце $0<|z-1|<2$ функцию $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$

Р е ш е н и е. *Способ первый.* Функция $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ является аналитической в кольце $0<|z-1|<2$. Коэффициенты ряда Лорана находятся по формуле

$c_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \dfrac{f(\varsigma)d\varsigma}{(\varsigma-a)^{n+1}}\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,...)$, тогда в нашей задаче

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\frac{1}{(z^2-1)^2}}{(z-1)^{n+1}}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2},$$

где Г – любая окружность с центром в точке $z_o=1$, лежащая в данном кольце.

1) Если $n+3\le 0$, т.е. $n\le -3$, то подынтегральная функция $\dfrac{1}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2}$ будет аналитической во всех точках, заключённых внутри окружности Г, в том числе и в точке $z=1$. В этом случае

$$\int_\Gamma \frac{dz}{(z-1)^{n+3}(z+1)^2}=0,$$

т.е. $c_n = 0$ при $n = -3, -4, \ldots$

2) Если $n+3>0$, т.е. $n>-3$, то, применяя формулу Коши для производной любого порядка от аналитической функции, получим

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\dfrac{1}{(z+1)^2}}{(z-1)^{n+1}}dz = \frac{1}{(n+2)!}\frac{d^{n+2}}{dz^{n+2}}\left[\frac{1}{(z+1)^2}\right]\Bigg|_{z=1} =$$

$$= \frac{1}{(n+2)!}\cdot\frac{(-1)^n(n+3)!}{(z+1)^{n+4}}\Bigg|_{z=1} = \frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}},$$

Для $n = -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$ имеем

$$c_n = \frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}.$$

Ряд Лорана для данной функции в кольце $0<|z-1|<2$ будет иметь вид

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \sum_{n=-2}^{+\infty} c_n(z-1)^n = \sum_{n=-2}^{+\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}(z-1)^n.$$

или

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{3}{16} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{5}{16}(z-1)^2 - \frac{3}{16}(z-1)^3 + \ldots.$$

Способ второй. Нам нужно представить $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ в виде суммы степеней (положительных и отрицательных) разности $(z-1)$. Преобразуем данную функцию следующим образом:

$$. \; f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{4}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2}. \qquad (1)$$

Первые два слагаемых в правой части имеют нужный вид, так как представляют собой степени разности $(z-1)$. Последние два слагаемых запишем в виде

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}}, \quad \frac{1}{(z+1)^2} = \frac{1}{4}\left[1+\frac{z-1}{2}\right]^{-2}. \qquad (2)$$

Применяя формулу $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots.$ и затем формулу

$$(1+z)^n = 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2!}z^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}z^3 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}z^n + \ldots \text{ при } n=-2,$$

получим

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1+\dfrac{z-1}{2}} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-1}{2}\right)^3 + \ldots\right], \qquad (3)$$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = \frac{1}{4}\left[1+\frac{z-1}{2}\right]^{-2} =$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 - 2\cdot\frac{z-1}{2} + \frac{-2((-2-1)}{2!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \frac{-2((-2-1)(-2-2)}{3!}\left(\frac{z-1}{2}\right)^3 + \ldots\right], \qquad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), найдём

$$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+$$

$$+\frac{1}{8}\left[1-\frac{z-1}{2}+\left(\frac{z-1}{2}\right)^2-\left(\frac{z-1}{2}\right)^3+....\right]+\frac{1}{16}\left[1-(z-1)+\frac{3}{2^2}(z-1)^2-\frac{4}{2^3}(z-1)^3+...\right],$$

или

Ответ: $$\frac{1}{(z^2-1)^2}=\frac{1}{4}\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{4}\frac{1}{z-1}+\frac{3}{16}-\frac{1}{8}(z-1)+\frac{5}{64}(z-1)^2-\frac{3}{64}(z-1)^3+....$$

П р и м е р 2.. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=z^2\cos\frac{1}{z}$ в окрестности точки $z_o=0.$

Р е ш е н и е. Для любого комплексного ζ имеем $\cos\varsigma=1-\frac{\varsigma^2}{2!}+\frac{\varsigma^4}{4!}-\frac{\varsigma^6}{6!}+...$

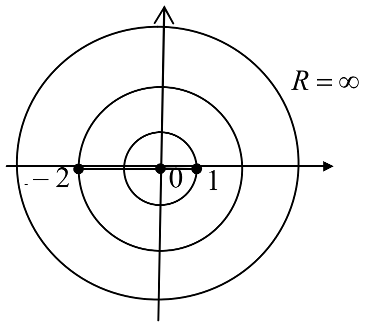


Рисунок к примеру 2

Полагая $\varsigma=\frac{1}{z}$, получим

$$z^2\cos\frac{1}{z}=z^2\left(1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}-\frac{1}{6!z^6}+...\right)=$$

$$=z^2-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!z^2}-\frac{1}{6!z^4}+.$$

или

$$z^2\cos\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}+z^2+\frac{1}{4!z^2}-\frac{1}{6!z^4}+.$$

Это разложение справедливо для любого $z\neq 0$. В данном случае «кольцо» представляет собой всю комплексную плоскость с одной выброшенной точкой $z=0$. Это «кольцо» можно определить с помощью следующего соотношения $0<|z-0|<+\infty.$ Здесь $r=0$, $R=+\infty$, $z_o=0$.. Данная функция является аналитической в указанном «кольце».

П р и м е р 3. Рассмотреть различные разложения в ряд Лорана функции

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{2z+1}{(z+2)(z-1)},$$

приняв $z_o=0.$

Р е ш е н и е. Функция $f(z)$ имеет две особые точки: $z_1=-2$ и $z_2=1$. Следовательно имеется три «кольца» с центром в точке $z_o=0$, в каждом из которых $f(z)$ является аналитической:

а) круг $|z|<1$; б) кольцо $1<|z|<2$; в) $2<|z|<+\infty$ - внешность круга $|z|\leq 2.$

Найдём ряды Лорана для функции $f(z)$ в каждом из этих «колец». Представим $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}. \qquad (1^*)$$

а) Разложение в круге $|z|<1$. Преобразуем (1) следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{2}.\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z}. \qquad (2^*)$$

Используя формулу $\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-z^3+...+(-1)^n z^n+....,$ (3*)

получим

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+z^3+\ldots,\quad |z|<1, \tag{4*}$$

$$\frac{1}{1+\frac{z}{2}}=1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}-\frac{z^3}{8}+\ldots,\quad |z|<2, \tag{5*}$$

Подставляя (4*) и (5*) в (2*), получим

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots-\left(1+z+z^2+z^3+\ldots\right)=-\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z-\frac{7}{8}z^2-\frac{17}{16}z^3+\ldots$$

Это разложение является рядом Тейлора функции $f(z)$.

б) Разложение в кольце $1<|z|<2$. Ряд (5*) для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ остаётся сходящимся в этом кольце, так как $|z|<2$. Ряд (4*) для функции $\frac{1}{1-z}$ расходится для $|z|>1$. Поэтому преобразуем $f(z)$ следующим образом:

$$f(z)=\frac{1}{2}.\frac{1}{1+\frac{z}{2}}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}.. \tag{6*}$$

Применяя формулу (3*), получим

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}\ldots.. \tag{7*}$$

Этот ряд сходится для $\left|\frac{1}{z}\right|<1$, т.е. при $|z|>1$.

Подставляя (5*) и (7*) в (6*), найдём

$$\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{2}-\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots=$$

$$=\ldots+\frac{1}{z^2}.+.\frac{1}{z}+.\frac{1}{2}--\frac{z}{4}+\frac{z^2}{8}-\frac{z^3}{16}+\ldots$$

или $\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$.в) Разложение для $|z|>2$. Ряд (5*) для функции $\frac{1}{1+\frac{z}{2}}$ при $|z|>2$ расходится, а ряд (7*) для функции $\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$. будет сходится, так как если $|z|>2.$, то и подавно $|z|>1..$

Функцию $f(z)$ представим в таком виде: $f(z)=\frac{1}{z}.\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{z}.\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{z}}+\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right).$

Используя формулу (3*), получим

$$f(z)=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\ldots+1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+..\right)=$$

$$=\frac{1}{z}\left(2-\frac{1}{z}+\frac{5}{z^2}-\frac{7}{z^3}+\ldots\right)$$

или $\dfrac{2z+1}{z^2+z-2}=\dfrac{2}{z}-\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{5}{z^3}-\dfrac{7}{z^4}+\ldots.$

Этот пример показывает, что для одной и той же функции $f(z)$ ряд Лорана, вообще говоря, имеет разный вид для разных колец.

П р и м е р 4. Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{2z-3}{(z-1)(z-2)}$ в окрестности её особых точек.

Р е ш е н и е. Особые точки функции $f(z)$: $z_1=1,\quad z_2=2.$

1) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z_1=1,$ т.е. в кольце $0<|z-1|<1.$ Представим функцию $f(z)$ в виде суммы элементарных дробей $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}+\dfrac{1}{z-2}.$

Правую часть преобразуется так: $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{1-(z-1)}.$.Применяя разложение (*), в котором z заменено на $-(z-1)$, получим $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}-[1+(z-1)+(z-1)^2+\ldots]$

или $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-1}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$.

2) Разложение $f(z)$ в окрестности точки $z_2=2,$ т.е. в кольце $0<|z-2|<1.$ Имеем

$$\frac{2z-3}{z^2-3z+2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-2}.=\frac{1}{z-2}+\frac{1}{1+(z-2)}=$$
$$=\frac{1}{z-2}+1-(z-2)+(z-2)^2-(z-2)^3+\ldots$$

или $\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}=\dfrac{1}{z-2}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n.$

П р и м е р 5. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$.

Р е ш е н и е. Здесь $c_{-n}=(1+i)^{n+1},\quad c_{-n-1}=(1+i)^{n+2},\quad z_o=0.$

Поэтому $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+i)^{n+2}}{(1+i)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+i)=\sqrt{2}$ Ответ: данный ряд сходится в области $|z|>\sqrt{2}$.

П р и м е р 6. *Разложить в ряд Лорана* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{c_{-n}}{(z-z_o)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_o)^n$ *в окрестности точки* $z=0$ *следующие функции:*

1) $\dfrac{\sin z}{z^2}$ Ответ: $\dfrac{1}{z}-\dfrac{z}{3!}+\dfrac{z^3}{5!}-\dfrac{z^5}{7!}+\ldots$ 2) $\dfrac{\sin^2 z}{z}$ Ответ: $\dfrac{2}{2!}z-\dfrac{8}{4!}z^3+\dfrac{32}{6!}z^5-\ldots$

3) $\dfrac{e^z}{z}$. Ответ: $\dfrac{1}{z}+1+\dfrac{z}{2!}+\dfrac{z2}{3!}+\ldots$ 4) $\dfrac{e^z}{z^3}$. Ответ: $\dfrac{1}{z^3}+\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{2!z}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{z}{4!}+\ldots$

5) $z^3e^{\frac{1}{z}}$ Ответ: $z^3+z^2+\dfrac{z}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\dfrac{1}{4!z}+\ldots$ 6) $z^4\cos\dfrac{1}{z}$ Ответ: $z^4-\dfrac{z^2}{2!}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{6!z^2}+\ldots$

7) $\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$ Ответ: $\dfrac{4^2}{2!2z^3}-\dfrac{4^4}{4!2z^5}+\dfrac{4^6}{6!2z^7}-\ldots$ 8) $\dfrac{1-\cos z}{z^2}$ Ответ: $\dfrac{1}{2!}-\dfrac{z^2}{4!}+\dfrac{z^4}{6!}-\dfrac{z^6}{8!}+\ldots$

9) $\dfrac{1+\cos z}{z^4}$ Ответ: $\dfrac{2}{z^4}-\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{4!}-\dfrac{z^2}{6!}+...$

П р и м е р 7. *Разложить в ряд Лорана следующие функции в окрестности указанных точек*

1) $\dfrac{z}{(z+1)^2}$, $z_o=-1$. Ответ: $\dfrac{1}{z+1}-\dfrac{1}{(z+1)^2}$,

2) $\dfrac{\sin z}{z-2}$, $z_o=2$.

Ответ: $\dfrac{\sin 2}{z-2}+\cos 2-\dfrac{\sin 2}{2!}(z-2)-\dfrac{\cos 2}{3!}(z-2)^2+\dfrac{\sin 2}{2!}(z-2)^3+\dfrac{\cos 2}{5!}(z-2)^4-....$

3) $z e^{\frac{1}{z+i}}$, $z_o=-i$

Ответ: $(1-i)+(z+i)+(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{i}{1!})\dfrac{1}{z+i}+(\dfrac{1}{3!}-\dfrac{i}{2!})\dfrac{1}{(z+i)^2}+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)!}-\dfrac{i}{n!}\right](z+i)^{-n}$.

П р и м е р 8. *Разложить следующие функции в ряд Лорана в указанных кольцах*

1) $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$, $a)\ 2<|z|<3$; $b)\ 3<|z|<+\infty$

Ответ: $a)-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{n-1}}{z^n}-\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{3}\right)^n$; $b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^{n-1}-2^{n-1}}{z^n}$.

2) $\dfrac{1}{z^2+z}$, $a)\ 0<|z|<1$; $b)\ 1<|z|<+\infty$. Ответ: $a)\dfrac{1}{z}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$; $b)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{n+2}}$

3) $\dfrac{1}{(z+2)(1+z^2)}$, $a)\ 1<|z|<4$; $b)\ 4<|z|<+\infty$.

Ответ: а) не разлагается, $b)\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{2^2+1}{z^3}-\dfrac{2^3+2}{z^4}+\dfrac{2^4-1}{z^5}-\dfrac{2^5-2}{z^6}+...\right)$.

4) $\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $1<|z|<2$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{z^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$.

5) $\dfrac{z^2-z+3}{z^3-3z+2}$, $a)\ |z|<1$; $b)\ 1<|z|<2$; $c).2<|z|<\infty$

Ответ: $a)\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[n-\dfrac{(-1)^n}{2^n}\right]z^{n-1}$; $b)\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{z^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n$; $c)\ \dfrac{1}{z}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+(-2)^n}{z^{n+1}}$.

6) $\dfrac{2}{z^2-1}$, $1<|z+2|<3$. Ответ: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(z+2)^n}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$.

7) $\dfrac{1}{z^2+2z-8}$, $1<|z+2|<4$. Ответ: Не разлагается.

8) $\dfrac{1}{z^2+1}$, $a)\ 0<|z-i|<2$. Ответ: $-\dfrac{i}{2(z-i)}+\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2i)^n}(z-i)^n$; $b)\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{n+2}}$

Примеры на определение области сходимости

П р и м е р 9. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$.

Р е ш е н и е. Здесь

$$c_{-n}=(1+i)^{n+1},\quad c_{-n-1}=(1+i)^{n+2},\quad z_o=0.$$

Поэтому $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+i)^{n+2}}{(1+i)^{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+i)=\sqrt{2},$

Ответ: данный ряд сходится в области $|z|>\sqrt{2}$

П р и м е р 10. Найти область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin i\,n}{(z+i)^n}$.

Р е ш е н и е. Имеем $c_{-n}=\sin in=i\,sh\,n,\quad c_{-n-1}=i\,sh\,(n+1).$

Поэтому

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{|i\,sh\,(n+1)|}{|i\,sh\,n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{sh\,(n+1)}{sh\,n}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\,n+1}-e^{\,-n-1}}{e^{\,n}-e^{\,-n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e-e^{\,-2n-1}}{1-e^{\,-2n}}=e,$$

Примеры для самостоятельного решения

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1-i)^n z^n}$ Ответ: $|z|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^n}{z^n}$. Ответ: $|z|>2$.

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{z^{-n}}{\cos in}$. Ответ: $z>e^{-1}$. 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^n(i\,z)^{-n}$. Ответ: $z>e$.

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4^n(z+1)^n}$ Ответ: $|z+1|>\dfrac{1}{4}$. 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\,2^{-n}}{(z-2-i)^n}$ Ответ: $|(z-2-i)|>\dfrac{1}{2}$

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+1}{(z+2i)^n}$ Ответ: $|z+2i|>3$. 8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}$ Ответ: $|z+1-i\,|>1$

П р и м е р 11. Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in}}{(z+1)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^{in}(z+1)^n}{e^{in+1/2}}$

Р е ш е н и е. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{in}}{(z+1)^n}$ имеем $c_{-n}=e^{in},\quad c_{-n-1}=e^{i(n+1)}$.

Следовательно, $r=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|e^{i(n+1)}\right|}{\left|e^{in}\right|}=1,$ так что первый ряд сходится в области $|z+1|>1$.

Для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{e^{in}(z+1)^n}{e^{in+1/2}}$ имеем $c_n=e^{-in-1/2},\quad c_{n+1}=e^{-i(n+1)-1/2}$.

Его радиус сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left|e^{-in-1/2}\right|}{\left|e^{-i(n+1)-1/2}\right|}=1,$ так что второй ряд сходится в

области $|z+1|<1.$ Ответ: *данный ряд всюду расходится.*

П р и м е р 12. Определить область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z+2i}{6}\right)^n$.

Р е ш е н и е. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3+4i)^n}{(z+2i)^n}$ имеем $c_{-n}=(3+4i)^n$, $c_{-n-1}=(3+4i)^{n+1}$.

Следовательно, $$r=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(3+4i)^{n+1}\right|}{\left|(3+4i)^n\right|}=\lim_{n\to\infty}|3+4i|=5.$$

Первый ряд сходится в области $|z+2i|>5$.

Для ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$ имеем $c_n=6^{-n}$, $c_{n+1}=6^{-n-1}$.

$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|6^{-n}\right|}{\left|6^{-n-1}\right|}=6,$ Ряд сходится в области $|z+2i|<6$. Итак $r=5,\ R=6.$

Ответ: Данный ряд сходится в кольце $5<|z+2i|<6$.

Примеры для самостоятельного решения.

Определить область сходимости следующих рядов:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+in\right)(z+1+i)^n$. Ответ: $|z+1+i|<1$. 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{z-i}{2}\right)^n$ Ответ: $|z-i|<2$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin in}{(z-i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!}$ Ответ: $|z-i|>e$. 4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4 z^n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\cdot 2^n}$ Ответ: $1<|z|<2$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{(z+1)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$ Ответ: $|z+1|>2$. 6) $\frac{1}{z}+\sum_{n=0}^{\infty}z^n$ Ответ: $0<|z|<1$.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n(z-2+i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}(1+in)\cdot(z-2+i)^n$ Ответ: $1<|z-2+i|<1$.

8) $-\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ Ответ: $0<|z-1|<1$.