Министерство транспорта РФ

ФГОУ ВПО

**«НОВОСИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ
ВОДНОГО ТРАНСПОРТА»**

А.Ш. Готман

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

(Учебное пособие для аспирантов)

Новосибирск 2007

УДК 519.2(07)
Г 738

Готман А.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: [Текст} учебное пособие для аспирантов./А.Ш. Готман. - Новосибирск: Новосиб. гос. акад. вод. трансп., 2007

Учебное пособие подготовлено на основании курса лекций, читаемых аспирантам и преподавателям в процессе работы школы-семинара при кафедре ТУК НГАВТ в течение 2004-2007 годов. Основные разделы учебного пособия могут быть использованы студентами при изучении курса теории вероятностей и математической статистики.

Рецензенты:
Владимиров Ю.Н. – зав. кафедрой высшей математики Новосибирского государственного университета экономики и управления, канд. физ.-мат., доцент. Наук.
Линевич О.И. – зав. кафедрой высшей математики Новосибирской государственной академии водного транспорта, канд. техн. наук, доцент.

ГЛАВА I. Событие

Теория вероятностей изучает способы определения возможности появления того или иного события. В каждом разделе математики есть неопределимые понятия, через которые определяются все другие. **Событие** является именно таким понятием, потому что ему невозможно дать определение. Под **событием** понимается любой **исход** опыта, который может появиться в результате выполнения условий задачи. Например, выпадение шести очков при бросании кости – событие. Выпадение герба при броске монеты – событие. Провал учащегося на экзамене – событие. Сдача зачёта – событие и т.п.

§ 1. Основные определения

Определение 1.1 Событие **E** называется **достоверным**, если при выполнении данных условий α это событие обязательно происходит.

Пример 1.1 При температуре воды 100^{o} и давлении, равном одной атмосфере, происходит кипение воды в ста случаях из ста. Кипение воды при заданных условиях является **достоверным** событием.

Определение 2.1 Событие **O** называется **невозможным**, если при выполнении данных условий β это событие не может произойти.

Пример 2.1 Вынимание синего шара из урны, в которой есть только красные и жёлтые шары, является **невозможным** событием.

Определение 3.1 Если при выполнении комплекса условий γ событие **A** может произойти или не произойти, то событие **A** называется **случайным**.

Пример 3.1 Попадание в баскетбольную корзину при бросании мяча является **случайным** событием.

Определение 4.1 Относительной частотой p^* случайного события А называется отношение числа m^* появления данного события к общему числу проведенных одинаковых испытаний n, в каждом из которых могло произойти или не произойти данное событие

$$p^*(A) = p^* = \frac{m^*}{n}. \tag{1.1}$$

Пример 4.1 Пусть по некоторому объекту при данных условиях проведено три серии выстрелов:

I серия 5 выстрелов - 2 попадания,
II серия 10 выстрелов - 6 попаданий,
III серия 100 выстрелов - 49 попаданий.

Относительная частота соответственно равна

I $\quad p^* = \frac{2}{5} = 0{,}4$

II $\quad p^* = \frac{6}{10} = 0{,}6,$

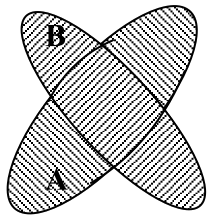
III $\quad p^* = \frac{49}{100} = 0{,}49.$

Замечание 1.1 В дальнейшем будет доказано, что разница между относительными частотами тем меньше, чем больше число проведенных опытов.

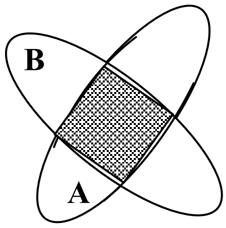
Определение 5.1 Два события **A** и **B** называются **несовместными**, если при появлении события **A** не может произойти событие **B** и наоборот.

Пример 5.1 Если при бросании монеты выпал герб, то выпадение цифры невозможно. Таким образом, выпадение герба и цифры при бросании одной монеты являются **несовместными** событиями.

Алгебра событий



A+B
Рис. 1.1



A × B
Рис. 2.1

Пусть даны два события **A** и **B.**
Определение 6.1 **Суммой** двух событий **A** и **B** называется третье событие **A + B,** **к**оторое наступает тогда, и только тогда, когда происходит **хотя бы одно** из событий **A** и **B.**
Замечание 2.1 Термин «**хотя бы одно»** означает, что произошло либо событие **A**, либо событие **B**, либо **A** и **B** одновременно. Если говорят о сумме, то говорят «**или A или B**» (геометрически сумма двух событий равна **объединению** их общей площади).
Замечание 3.1 Определение **6**.1 справедливо для любого числа событий.
а) **A + B + C** наступает тогда, когда наступает **хотя бы одно** из событий **A, B** или **C.**
Если речь идёт о n событиях, то сумма записывается так:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{i=1}^{n} A_i\,, \qquad (2.1)$$

Определение 7.1 **Произведением** двух событий **A** и **B** называется третье событие **A × B,** которое наступает тогда, и только тогда, когда происходят оба события **A** и **B (**произведение двух событий геометрически представляет собой их **пересечение).**

Замечание 4.1 Определение **7**.1 справедливо для любого числа событий.
б) **A × B × C** наступает тогда, когда наступают **все** три события **A, B** и **C.**
Замечание 5.1 Когда говорят о произведении, то используют союз «**и**».
Произведение n событий означает, что произошли все n событий одновременно, что записывается в виде

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i \qquad (3.1)$$

Теорема. Операции сложения и умножения событий связаны между собой распределительным законом.

$$(A + B) \times C = A \times C + B \times C \qquad (4.1)$$

Доказательство. Слева в равенстве (4.1) стоит событие, состоящее в наступлении события C и события $A + B$, то есть, хотя бы одно из событий A или B произойдёт вместе с событием C. Справа написано событие, состоящее в наступлении A одновременно с C или B одновременно с C. Ясно, что левая и правая части равенства (4.1) выражают одно и то же событие. Таким образом, теорема доказана.
Замечание 6.1 Распределительный закон справедлив для любого числа событий.
Определение 8.1 Пусть дано событие A. **Противоположным** событию A называется событие $\overline{A}$ (не A), состоящее в том, что событие A не произошло..
Замечание 7.1 **Сумма** событий A **и** $\overline{A}$ всегда равна **достоверному** событию E.

$$A + \overline{A} = E \qquad (5.1)$$

Можно сказать так: **достоверно**, что случайное событие A либо произойдёт, либо не произойдёт.

Замечание 8.1 Произведение событий А и $\overline{A}$ всегда равно невозможному событии

$$A \times \overline{A} = O \qquad (6.1)$$

Доказательство. Действительно, событие А не может одновременно произойти и не произойти.

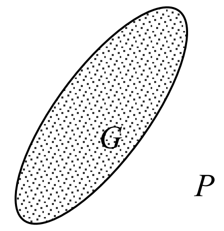


Рис. 3.1 К примеру7.1

Пример 6.1 Опыт состоит в бросании одной игральной кости.

Событие А – выпадение 6 очков,
Событие В – выпадение чётного числа очков,
Событие $\overline{A}$ - выпадение не более 5 очков,
Событие $\overline{B}$ - выпадение нечётного числа очков.

Пример 7.1 Опыт состоит в бросании точки *M* в квадрат *P*, содержащий область G.

Событие *A* состоит в попадании точки *M* в область G
Событие $\overline{A}$ состоит в непопадании точки *M* в область G.
Пример 8.1 Справедливы следующие равенства

$$\overline{E} = \text{O}, \quad \overline{\text{O}} = \text{E}. \qquad (7.1)$$

Невозможное событие противоположно **достоверному** и, наоборот, **достоверное** событие противоположно **невозможному.**
Определение 9.1 Событие *B* является **частным случаем** события *A* $(B \subset A)$, если из появления события *B* следует появление события *A,* но из появления события *A* не следует наступление события *B*.
Пример 9.1 Бросается игральная кость.
Событие А – выпадение 4 очков,
Событие В – выпадение чётного числа очков.
Очевидно, что $A \subset B$.(А – частный случай события В)
Пример 10.1 Дан квадрат **G** и его часть **К**
Событие **А –** попадание в область **К,**
Событие **В -** попадание в квадрат **G.**
Совершенно очевидно, что событие **А** является частным случаем события **В**

$$A \subset B.$$

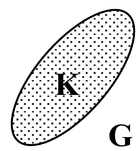


Рис. 4.1 К примеру 10.1

Определение 10.1 Система событий

$$A_1, A_2, ..., A_n \qquad (8.1)$$

называется **полной** (или **исчерпывающей**) системой событий, если в результате опыта **хотя бы одно** из этих событий произойдёт.
Замечание 9.1 Полную систему записывают так:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = E$$

Сумма всех событий **полной** системы равна **достоверному** событию.
Пример 11.1 События A и $\overline{A}$ образуют полную систему (группу) событий.

Пример 12.1 Опыт состоит в бросании игральной кости.
A_k событие, состоящее в выпадении k очков, где k принимает все значения от 1 до 6
Тогда события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ образуют полную группу.

Замечание 10.1 Сумма случайного события A и достоверного события E равна достоверному событию (так как **хотя бы** достоверное событие обязательно произойдёт)

$$A + E = E \tag{9.1}$$

Замечание 11.1 Произведение случайного события A и достоверного события E равно случайному событию (**пересечение** случайного и достоверного события происходит по случайному событию)

$$A \times E = A \tag{10.1}$$

Замечание 12.1 Произведение случайного события B и полной группы событий $\sum_{i=1}^{n} A_i = E$ равно случайному событию B (см. формулу 10.1)

$$B \times \sum_{i=1}^{n} A_i = B \times E = B$$

Определение 11.1 Система событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется **фундаментальной**, если выполняются следующие условия:

1) $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют **полную** систему; то есть, $\sum_{i=1}^{n} A_i = E$.

2) Всякие два события данной системы **несовместны**, то есть,

$$A_i \times A_j = O \quad \text{когда } i \neq j.$$

3) Все события $A_1, A_2, ..., A_n$ **равновозможны**, то есть, в условиях данного опыта ни одно событие не имеет преимущества по сравнению с другими в смысле возможности своего появления.

Пример 13.1 Бросается одна монета.

A_1 – появление герба,

A_2 – появление цифры.

События A_1 и A_2 образуют полную группу;

A_1 и A_2 - **несовместные** события,

A_1 и A_2 – **равновозможные** события.

Следовательно A_1 и A_2 образуют **фундаментальную** систему событий.

Пример 14.1 Бросается игральная кость. Выпадение очков 1, 2, 3, 4, 5, 6 образуют **фундаментальную** группу.

Пример 15.1 Извлечение из урны одного из n одинаковых шаров с номерами 1, 2, 3, , n образуют **фундаментальную** группу.

Пусть задана фундаментальная система событий $A_1, A_2, ..., A_n$. Пусть m событий $A_1, A_2, ..., A_m$ обладают свойством β, причём, $m \leq n$, а $A_{m+1}, A_{m+2}, ..., A_n$ этим свойством не обладают. Пусть A означает событие, состоящее в том, что в результате опыта произошло событие, обладающее свойством β. Тогда справедлива формула

$$A = \sum_{k=1}^{m} A_k \tag{11.1}$$

Определение 12.1 (Понятие **условной** вероятности). Допустим, что к первоначальному комплексу условий α добавлено ещё одно, то есть, произошло событие B. Вероятность события A при этом дополнительном условии B называется **условной вероятностью** события A. **Обозначение условной вероятности** события A при совершившемся B имеет вид

$$P(A/B) \tag{12.1}$$

§ 2. Вероятность

Классическое определение вероятности.

Пусть дана фундаментальная система, состоящая из n событий. Из них m событий обладают свойством β. Тогда **вероятностью** появления события A, обладающего свойством β, называется отношение числа событий, обладающих свойством β, к общему числу событий системы n, то есть,

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.2}$$

Пример 1.2 При бросании одной монеты вероятность выпадения герба равна $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$.

Пример 2.2 При бросании игральной кости вероятность выпадения шести очков равна $\frac{1}{6}$.

Пример 3.2 Пусть в урне 40 белых и 60 красных шаров. Вероятность извлечения белого шара равна $P(Б) = \frac{40}{100} = 0{,}4$.

Замечание 1.2 Классическое (элементарное) определение вероятности обладает следующими **недостатками**:

1) **ограниченность области применения**, так как не всегда можно описать событие как сумму конечного числа событий из фундаментальной системы (например, бросание точки в некоторую область нельзя описать как отношение числа событий);
2) определение содержит **логический круг**, так как подразумевает равную **вероятность** событий (слово «равновозможный» идентично слову «равновероятный»).

Эти недостатки привели к необходимости введения непротиворечивого аксиоматического определения.

Аксиоматическое определение вероятности

Число P называется вероятностью события А, если оно отвечает следующим основным аксиомам:

Аксиома I. Вероятность достоверного события равна единице

$$P(E) = 1 \tag{2.2}$$

Аксиома П. Если событие А является частным случаем события В $A \subset B$, то его вероятность меньше или равна вероятности события В

$$P(A) \le P(B) \text{ при условии } A \subset B \tag{3.2}$$

Аксиома Ш . Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий, то есть, если $A \times B = 0$, то

$$P(A+B) = P(A) + P(B) \tag{4.2}$$

Аксиома IV. Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного события на условную вероятность второго при совершившимся первым

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B/A) \tag{5.2}$$

$$P(A \times B) = P(B) \times P(A/B) \tag{6.2}$$

Пример 4.2 Пусть Q - квадрат, а G и H - области, расположенные в этом квадрате. *В* Q наудачу ставится точка.
Событие *А* – попадание точки в область G,
Событие *В* – попадание точки в область H.

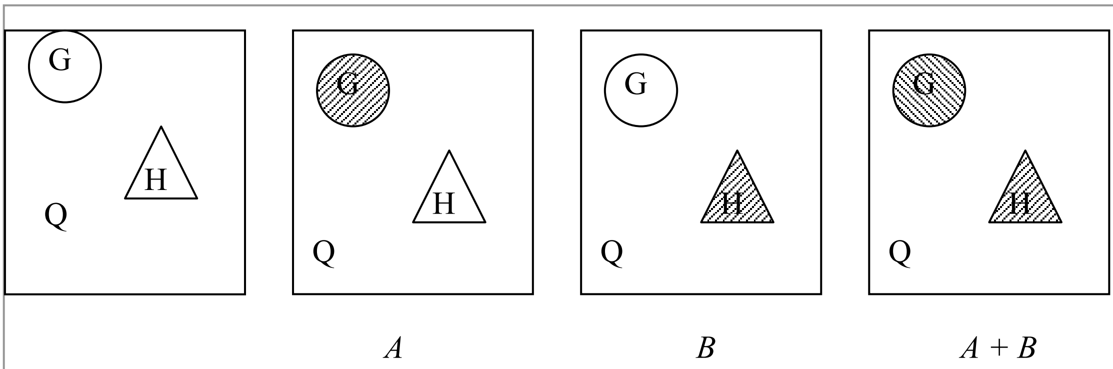


Рис. 1.2

Задача состоит в том, чтобы определить вероятность суммы событий *А* + *В*. Здесь события *А* и *В* несовместны, поэтому вероятность их суммы по **аксиоме Ш** равна сумме вероятностей

$$P(A) = \frac{S(G)}{S(Q)}, \quad P(B) = \frac{S(H)}{S(Q)},$$

$$P(A+B) = \frac{S(G)+S(H)}{S(Q)} = P(A)+P(B)$$

где $S(H)$ - площадь области H и $S(G)$ - площадь области G, $S(Q)$ - площадь области Q

Замечание 2.2 Такую вероятность называют **геометрической**.

Пример 5.2 Пусть в квадрате Q заданы области G и H, имеющие общую область *К*.
Событие А – попадание точки в область G,
Событие В – попадание точки в область H.

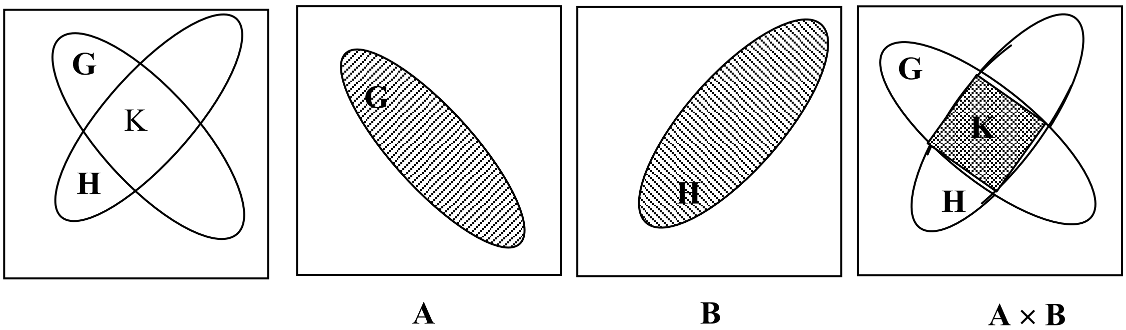


Рис. 2.2

Задача состоит в определении **вероятности произведения** событий А × В.
Попадание точки в любую точку квадрата Q. Равновозможно.

Вероятность попадания точки в область G равна $P(A) = \dfrac{S(G)}{S(Q)}$, Вероятность попадания точки в область H равна $P(B)=\dfrac{S(H)}{S(Q)}$,

Вероятность попадания точки в область K равна $P(A\times B)=\dfrac{S(K)}{S(Q)}$

Получим условную вероятность события A при совершившимся событии B, то есть, вероятность попадания точки в K при том, что K принадлежит H. Это равно

$$P(A/B)=\frac{S(.K)}{S(Q)}\Big/\frac{S(H)}{S(Q)}=\frac{S(.K)}{S(H)}=\frac{P(A\times B)}{P(B)}$$

Из этой формулы легко получить геометрическую интерпретацию **аксиомы IV**.

$$P(A\times B)=P(B)\times P(A/B)$$

Следствия из аксиоматического определения вероятности

Следствие I. Вероятность **противоположного** события $\overline{A}$ равна единице минус вероятность события A, то есть,

$$P(\overline{A})=1-P(A) \qquad (7.2)$$

Доказательство: Очевидно, что A и $\overline{A}$ события несовместные, потому что событие не может одновременно произойти и не произойти, то есть,

$$A\times\overline{A}=0$$

Тогда по **аксиоме Ш** $P(A+\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$

С другой стороны события А и $\overline{A}$ составляют полную группу, тогда

$$A+\overline{A}=E$$

Вероятность Е по **аксиоме I** $P(E)=1$

Отсюда легко видеть, что $P(A)+P(\overline{A})=1$, $P(\overline{A})=1-P(A)$, ч.т.д.

Следствие П. Вероятность **невозможного** события О равна нулю.

$$P(O)=0 \qquad (8.2)$$

Доказательство: Невозможное и достоверное события составляют полную группу, то есть, $E+O=E$, причём, эти события несовместные $E\times O=O$. Следовательно, по **аксиоме Ш** вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей, то есть,

$$P(E+O)=P(E)+P(O)=P(E)=1$$

Отсюда $P(O)=1-P(E)=1-1=0$, ч.т.д.

Следствие Ш. Если A случайное событие, то его вероятность заключена между нулём и единицей

$$0\le P(A)\le 1 \qquad (9.2)$$

Доказательство: Событие A заключено между невозможным и достоверным событием

$O\subset A\subseteq E$, тогда по **аксиомам I** и **П**, а также по **следствию П** получается

$$P(O)\le P(A)\le P(E), \qquad (10.2)$$

а отсюда получается $0\le P(A)\le 1$, ч.т.д.

Замечание 3.2 Первые три следствия определяют величину измерения вероятностей событий: **вероятность** события **не может быть отрицательной** и **не может быть больше единицы.**

Следствие IV. Аксиома Ш сохраняет свою силу для нескольких попарно несовместных событий.
Доказательство: Пусть события **A, B, C** попарно несовместные события, то есть,

$$A\times B = A\times C = B\times C = 0$$

Введём обозначение $D = A + B$, то есть D является суммой двух событий, докажем, что D несовместно с C, используя распределительный закон. Тогда.

$$D\times C = (A+B)\times C = A\times C + B\times C = 0$$

Отсюда $P(A+B+C) = P(D+C) = P(D)+P(C) = P(A+B)+P(C) = P(A)+P(B)+P(C)$ Тогда

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)\text{, ч.т.д.} \qquad (11.2)$$

Следствие V (**обобщённое правило сложения**). Сумма двух не обязательно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления

$$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A\times B) \qquad (12.2)$$

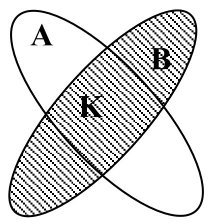


Рис. 3.2
К следствию V

Аналитическое доказательство: Пусть A и B не обязательно несовместные события. Нужно найти $P(A+B)$.

Исходим из тождества $A+B = A+\overline{A}\times B$, то есть мы рассматриваем область, состоящую из A и той части B, где нет A.
Покажем, что справа стоят несовместные события. Для этого получим их произведение
$A\times(\overline{A}\times B) = A\times\overline{A}\times B = O\times B = O$, потому что произведение невозможного события на случайное событие равно невозможному событию.
Тогда по **аксиоме Ш** можно записать

$$P(A+B) = P(A+(\overline{A}\times B)) = P(A)+P(\overline{A}\times B) \qquad (13.2)$$

Рассмотрим теперь событие B в виде произведения на полную группу $A+\overline{A}$, то есть,

$$B = (B\times A)+(B\times\overline{A}),$$

где справа стоят несовместные события. Тогда

$$P(B) = P(B\times A)+P(B\times\overline{A}),$$

откуда

$$P(B\times\overline{A}) = P(B)-P(B\times A)\,. \qquad (14.2)$$

Подставляя (13.2) в (12.2), получим $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(A\times B)$, ч.т.д.

Геометрическое доказательство: из рисунка видно, что при пересечении областей A и B область K входит два раза, поэтому из вероятности суммы A и B нужно вычесть вероятность попадания в область K, которая представляет собой пересечение A и B.

Замечание 4.2 Для трёх событий обобщённое правило сложения записывается так

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\times B)-P(A\times C)-P(B\times C)+P(A\times B\times C) \qquad (15.2)$$

Следствие VI. Для случая двух **независимых** событий **аксиома IV** имеет вид

$$P(A\times B) = P(A)\times P(B)\,, \qquad (16.2)$$

потому что в случае независимых событий вероятность появления события A не зависит от появления события B, и наоборот, поэтому условная вероятность A равна вероятности события A, а условная вероятность B равна вероятности B. То есть в случае, когда события A и B независимы

$$P(A/B)=P(A), \quad P(B/A)=P(B)$$

и формулы (5.2) и (6.2) заменяются одной формулой (15.2).

Следствие VII. **Аксиома IV** может быть распространена на **n** событий. Для произведения нескольких **зависимых** событий формула (15.2) заменяется формулой

$$P(\prod_{k=1}^{n} A_k)=P(A_1)\times P(A_2/A_1)\times P(A_3/A_1\times A_2) \quad ... \quad P(A_n/\prod_{k=1}^{n-1} A_k) \qquad (17.2)$$

Следствие VIII. Обобщённое правило сложения для двух совместных **зависимых** событий имеет вид

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B/A) \qquad (18.2)$$

а для случая совместных **независимых** событий формула имеет вид

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\times P(B) \qquad (19.2)$$

Замечание 5.2 При определении вероятности **суммы** событий следует проверять, **совместны** события или **несовместны**, а в случае определения вероятности **произведения** событий следует проверять, являются ли события **зависимыми** или **независимыми**.

Следствие IX. Теорема: Классическое (**элементарное**) определение вероятности является следствием первых трёх аксиом.

Доказательство: Рассматривается **фундаментальная группа** событий, которая по её первому свойству (полная группа) представляет собой достоверное событие $\sum_{i=1}^{n} A_i = E$. Так как события несовместны (по второму свойству фундаментальной группы), то можно записать

$$A_1\times A_2\times \quad ... \quad \times A_n = \text{O},$$

тогда по **аксиоме III** получается

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

или $P(A_1+A_2+ \quad ... \quad +A_n)=P(A_1)+P(A_2)+ \quad ... \quad +P(A_n)$,

но, с другой стороны, эта сумма вероятностей равна вероятности **достоверного** события, то есть,

$$P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=P(E)=1$$

По третьему свойству фундаментальной системы все события имеют равную вероятность в смысле своего появления, а это значит, что

$$P(A_1)=P(A_2)= \quad ... \quad =P(A_n),$$

и $\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=nP(A_k)=1$. Откуда вероятность каждого события равна $P(A_k)=\dfrac{1}{n}$, где $k=1, 2, 3,...,n$.

Предположим, что первые m событий обладают свойством β. Тогда вероятность появления события, обладающего свойством β, будет равна

$$P(A_1+A_2+ \quad ... \quad +A_m)=P(A_1)+P(A_2)+ \quad ... \quad +P(A_m)=m\cdot P(A_k)=\frac{m}{n}, \text{ ч.т.д.}$$

Следствие X. (Закон взаимности) Если событие *A* не зависит от события *B*, то и событие *B* не зависит от события *A*.

Доказательство: Из **аксиомы IV** следует, что формулы (5.2) и (6.2) равноправны и

$$P(A)\times P(B/A)=P(B)\times P(A/B)$$

Если левую и правую части разделить на произведение $P(A)\times P(B)$, то получим равенство двух отношений

$$\frac{P(B/A)}{P(B)}=\frac{P(A/B)}{P(A)}$$

Если событие *B* не зависит от события *A*, то $P(B/A)=P(B)$, и тогда в левой части дробь равна единице. Но в этом случае и правая дробь тоже равна единице и $P(A/B)=P(A)$, а это значит, что событие *A* не зависит от события *B*, ч.т.д.

Некоторые простейшие соотношения теории вероятностей

1) Справедливо равенство

$$(\overline{\overline{A}})=A \qquad (20.2)$$

Доказательство: $\overline{A}$ означает, что событие A не произошло, а $(\overline{\overline{A}})$- это событие противоположное событию $\overline{A}$, то есть A произошло.

2) $$\overline{\sum_{k=1}^{n}A_k}=\prod_{k=1}^{n}\overline{A}_k \qquad (21.2)$$

Доказательство: $\sum_{k=1}^{n}A_k$ означает, что произошло хотя бы одно из событий A_k, $\overline{\sum_{k=1}^{n}A_k}$ - противоположное событие означает, что ни одно из событий A_k не произошло, а $\prod_{k=1}^{n}\overline{A}_k$ означает, что одновременно не произошло ни одно из событий A_k.

Следовательно, в равенстве (20.2) слева и справа стоит выражение, означающее, что ни одно из событий A_k не произошло

.3) $$\overline{\prod_{k=1}^{n}A_k}=\sum_{k=1}^{n}\overline{A}_k \qquad (22.2)$$

Доказательство:

$\prod_{k=1}^{n}A_k$ означает, что одновременно произошли все события A_k.

$\overline{\prod_{k=1}^{n}A_k}$ противоположное событие означает, что хотя бы одно из событий A_k не произошло

$\sum_{k=1}^{n}\overline{A}_k$ означает, что не произошло хотя бы одно из событий A_k.

Следовательно, в равенстве (21.2) слева и справа стоит утверждения, что **хотя бы одно** из событий A_k не произошло.

§ 3. Типовые задачи

Метод обращения событий

Были получены следующие тождества:

1. $(\overline{\overline{A}}) = A$ противоположное противоположному событию равно самому событию (1.3)

2. $\overline{\sum_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{A}_k$ - все события полной группы не произошли. (2.3)

3. $\overline{\prod_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{k=1}^{n} \overline{A}_k$ - хотя бы одно событие не произошло. (3.3)

Эти тождества используются для разработки **метода обращения событий**. Суть **метода обращения событий** заключается в том, что вместо громоздкого вычисления вероятности данного события вычисляется вероятность противоположного события.

Выводы формул обращения события

Вывод формулы $\sum_{k=1}^{n} A_k = \overline{\prod_{k=1}^{n} \overline{A}_k}$

Пусть событие A представляет собой полную группу событий, то есть, $A = \sum_{k=1}^{n} A_k$. Получим противоположное событие. Если событие A состоит в том, что **хотя бы одно** из событий A_k произошло, то противоположное событие заключается в том, что ни одно из событий A_k не произошло. Это описано формулой (2.3). Отсюда легко написать противоположное событие, используя формулу (1.3)

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \overline{\prod_{k=1}^{n} \overline{A}_k} \tag{4.3}$$

В правой части стоит событие, противоположное произведению противоположных событий, то есть, противоположное утверждению (2.3). Это означает, что хотя бы одно событие произошло. Слева стоит сумма событий, что означает то же самое.

Запишем **первое следствие.** Теперь для вычисления вероятности события A используем первое следствие и получим выражение

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{\sum_{k=1}^{n} A_k}) .$$

Далее используем тождество (2.3). Тогда

$$P(A) = 1 - P(\overline{\sum_{k=1}^{n} A_k}) = 1 - P(\prod_{k=1}^{n} \overline{A}_k) \tag{5.3}$$

Замечание 1.3 Таким образом, вместо того, чтобы делать перебор возможных вариантов сумм событий полной группы, чтобы определить вероятность появления хотя бы одного из событий группы, мы вычислим вероятность противоположного события (все события не произошли) и вычтем из единицы.

Замечание 2.3 Формула (5.3) даёт нам возможность использовать для вычисления вероятности события A более простое вычисление вероятности противоположного события.

Пример 1.3 При увеличении напряжения в электрической цепи в 2 раза соответственно с вероятностью 0,3, 0,4 и 0,6 может произойти разрыв электрической цепи вследствие выхода из строя элементов 1, 2 или 3. Найти вероятность разрыва цепи.

Решение. Введём обозначения. Обозначим событие, состоящее в том, что k - тый элемент нормально работает, как A_k. Если элемент вышел из строя, то $\overline{A}_k$. То есть, нам нужно найти вероятность $\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{A}_k$. Если не применять метод обращения событий, то для решения нашей задачи нужно перебрать все возможные варианты разрыва цепи:

$$\overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1\overline{A}_2 A_3 + A_1 A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3 + \overline{A}_1 A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$$

Затем нам нужно вычислять вероятности всех произведений событий. Но мы воспользуемся формулой (5.3) для обращения событий. В нашем случае она имеет вид формулы (3.3)

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{A}_k\right) = 1 - P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right)$$

Противоположное событие состоит в том, что ни один элемент не вышел из строя $A_1 A_2 A_3$. Вспомним, что все элементы выходят из строя независимо друг от друга. Следовательно, по **следствию** 6 вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей

$$P(A_1 \times A_2 \times A_3) = P(A_1) \times P(A_2) \times P(A_3)$$

Найдём вероятности $P(A_1), P(A_2), P(A_3)$ через вероятности противоположных событий по формуле **следствия** 1. Из условия задачи нам известно, что:

$P(\overline{A}_1) = 0{,}3,\ \ P(\overline{A}_2) = 0{,}4,\ \ \ P(\overline{A}_3) = 0{,}6$

Отсюда

$P(A_1) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7,\ \ P(A_2) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6,\ \ \ P(A_3) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$

Используем формулу (5.3) **обращения** событий

$$P\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{A}_k\right) = 1 - P\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 1 - 0{,}168 = 0{,}832\ .$$

Таким образом, вычисления свелись к определению вероятности только одного случая вместо семи.

Пример 2.3 Давление в цилиндре машины A превосходит допустимый уровень с вероятностью 0,05, а в машине B – 0,03. Найти вероятность того, что

1) давление превысит допустимое в обеих машинах;

2) давление не будет превышено в обеих машинах;

3) давление будет превышено только в одной машине;
4) давление будет превышено хотя бы в одной машине;
5) давление не будет превышено хотя бы в одной машине.
Решение:
Примем обозначения.
Вероятность того, что в машине *A* давление будет превышено – *P(A)* = 0,05,
Вероятность того, что в машине *B* давление будет превышено – *P(B)* = 0,03,
Вероятность того, что в машине *A* давление не будет превышено – $P(\overline{A}) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$,
Вероятность того, что в машине *B* давление не будет превышено – $P(\overline{B}) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$.
1) давление превысит допустимое в обеих машинах с вероятностью

$$P(A \times B) = P(A) \times P(B) = 0{,}05 \cdot 0{,}03 = 0{,}0015$$

2) давление не будет превышено в обеих машинах

$$P(\overline{A} \times \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(\overline{B}) = 0{,}95 \cdot 0{,}97 = 0{,}9215$$

3) давление будет превышено только в одной машине.

$$P(\overline{A} \times B + A \times \overline{B}) = P(\overline{A}) \times P(B) + P(A) \times P(\overline{B} =$$
$$= 0{,}95 \cdot 0{,}03 + 0{,}05 \cdot 0{,}97 = 0{,}0285 + 0{,}0485 = 0{,}077$$

4) давление будет превышено хотя бы в одной машине. В этом случае всегда используется метод обращения событий.

$$P(A + B) = 1 - P(\overline{A} \times \overline{B}) = 1 - 0{,}9215 = 0{,}0785$$

5) давление не будет превышено хотя бы в одной машине

$$P(\overline{A} + \overline{B}) = 1 - P(A \times B) = 1 - 0{,}0015 = 0{,}9985$$

Пример 3.3 (к следствию **I**)
На книжной полке в случайном порядке стоит энциклопедический справочник, состоящий из шести томов. Найти вероятность того, что хотя бы один из томов стоит не на своём месте.
Решение: Событие *A* – хотя бы один том стоит не на своём месте.
Событие $\overline{A}$ - все тома стоят на своих местах.
По **следствию 1** $P(A) = 1 - P(\overline{A})$. Для того, чтобы найти $P(\overline{A})$, нужно знать общее число возможных перестановок из 6 элементов. Из комбинаторики известно, что число перестановок из n элементов равно $P_n = n!$, а значит, число перестановок из 6 томов равно $P_6 = 6! = 720$. И только одна перестановка возможна, когда все тома стоят на своих местах. Следовательно, $P(\overline{A}) = \dfrac{1}{720}$.

Отсюда $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{1}{720} = \dfrac{719}{720}$

Пример 4.3 (к **следствию 11**)
Есть 5 карточек, на каждой из которых написано по одной цифре от 1 до 5. Какова вероятность вынуть из этих пяти карточку с числом 7?

Решение: Здесь полную группу событий можно записать так:

$$A = \sum_{k=1}^{5} A_k \ ,$$

где A_k означает карточку, на которой написано число k. Тогда

$$\sum_{k=1}^{5} A_k = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = E$$

Карточки с числом 7 нет в этой группе, то есть, A_7 - это **невозможное** событие. Следовательно, нужно найти $P(O)$, где $O = \overline{E}$. По первой аксиоме $P(E) = 1$, по второму следствию

$$P(O) = 1 - P(E) = 1 - 1 = 0 \text{, т.е. } P(A_7) = 0$$

Пример 5.3 (к **следствию III**) Какова вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет нечётное число очков?

Решение: Пусть B_k событие, состоящее в выпадении k очков. Выпадение каждой грани игральной кости происходит с вероятностью $P(B_k) = \frac{1}{6}$. Нам требуется найти вероятность события, которое состоит из суммы трёх несовместных событий $B_1 + B_3 + B_5$. Тогда по следствию **III** получаем

$$P(B_1 + B_3 + B_5) = P(B_1) + P(B_3) + P(B_5) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Пример 6.3 (к **следствию V**)

Два стрелка A и B стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень стрелка A равна $P(A) = 0{,}8$, а стрелка B - $P(B) = 0{,}9$. Найти вероятность поражения мишени при одновременных выстрелах A и B.

Решение: События A и B независимы, но не являются несовместными, потому что стрелки могут оба попасть или оба не попасть в мишень. Следовательно, вероятность поражения мишени нужно определять по обобщённому правилу сложения для совместных событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

Тогда $P(A + B) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}8 \times 0{,}9 = 0{,}98$

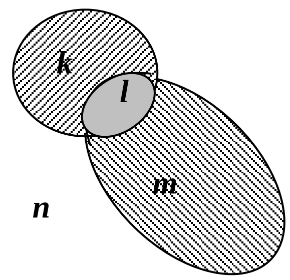


Рис. 1.3 Случайная выборка

Задача о случайной выборке

Пусть в множестве из n элементов, имеется k элементов, обладающих некоторым свойством β. Наудачу выбирается m элементов. Определить вероятность того, что l из них обладают свойством β.

Решение. Обозначим интересующее нас событие буквой *А*. Нам нужно найти вероятность *P(A)*. Будем её искать в виде отношения числа интересующих нас вариантов к общему числу возможных событий.

Общее число способов вынуть m элементов из n элементов, отличающихся хотя бы одним элементов, равно числу сочетаний из n по m

$$\boxed{C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}} \qquad (6.3)$$

Но из этих возможных способов нас интересуют только те, в которых из m выбранных элементов ровно l выбрано из *k*. Число способов, которыми можно выбрать l элементов из k элементов, равно числу сочетаний из k по l, то есть, C_k^l. Остальные $m - l$ элементов выбираются из $n - k$, но число возможных вариантов выбрать $m - l$ из $n - k$ равно C_{n-k}^{m-l}

Таким образом, число интересующих нас случаев равно $C_k^l \, C_{n-k}^{m-l}$.

Отсюда вероятность интересующих нас событий равна

$$P(A) = \frac{C_k^l C_{n-k}^{m-l}}{C_n^m} \tag{7.3}$$

Пример 7.3 Пусть среди 20 деталей ровно 3 бракованных. Какова вероятность того, что при выборе наудачу 5 деталей среди них будет ровно одна бракованная?
Решение. Это типичная задача о случайной выборке.
Подставляя наши данные в формулу (7.3), получим

$$P(A) = \frac{C_3^1 C_{17}^4}{C_{20}^5} = \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{17!}{4!13!} \cdot \frac{5!15!}{20!} = \frac{3 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20} =$$

$$= \frac{3 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 5}{18 \cdot 19 \cdot 20} = \frac{7 \cdot 15}{6 \cdot 19 \cdot 2} = \frac{105}{228} \approx 0{,}46$$

Замечание 3.3 Здесь показан наиболее удобный способ вычисления дробей с факториалами.

Геометрическая вероятность

Допустим, что пространство элементарных исходов представляет собой ограниченную область в виде отрезка прямой, круга, многоугольника, параллелепипеда, шара и т.п. часть n-мерного пространства (прямой, плоскости, трёхмерного пространства, ….) В этом случае нельзя прямо применить классическое определение вероятности на такую схему, так как нельзя посчитать число исходов. В этом случае вводится понятие **геометрической вероятности**.

Пусть имеется отрезок $[0, 1]$. На этот отрезок бросают точку *M*. Считается, что точка может попасть на любой элементарный интервал (a,b) этого отрезка, такой, что $[0 \le a < b \le 1]$ с вероятностью, равной длине (a,b), то есть,

$$P(a,b) = b - a \, . \tag{*}$$

Аналогично определяется **геометрическая вероятность** для области любого измерения.
(площадь, пространство и т.д.) Если обозначить всю плоскую область как Q, а выделенную в ней область как А, то вероятность точки М попасть в область А равна

$$P(A) = \frac{S\,(A)}{S(Q)}$$, где $S\,(A), S(Q)$ - площади соответствующих областей(**)

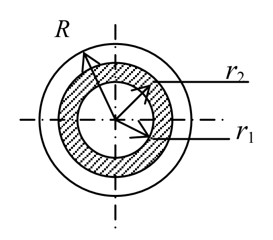


Рис. 2.3 К примеру 8.3

Пример 8.3 В круге радиуса R, выделено кольцо с внутренним радиусом r_1 и внешним радиусом r_2, где $0 \le r_1 < r_2 \le R$. Найти вероятность бросаемой точки М попасть в это кольцо.
Решение. По определению геометрической вероятности (**) получается

$$P(A) = \frac{\pi\, r_2^2 - \pi\, r_1^2}{\pi\, R^2} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{R^2}$$

Пример 9.3 (задача **о встрече**) Два человека *A* и *B* договорились встретиться с 5 часов вечера до 6 часов возле почтамта. Пришедший первым ждёт 10 минут, а потом уходит. Какова вероятность того, что они встретятся?

Решение. Эта задача решается с помощью **геометрической вероятности** событий. Для этого нужно свести задачу к отношению площадей или отрезков. Отложим на осях x и y по 60 минут – время в течение которого должны встретиться A и B. Время ожидания 10 минут отложим от любого момента прихода для A параллельно оси Ox, а для B параллельно оси y. Итак, время, во время которого A и B могут встретиться, получается в виде суммы двух заштрихованных трапеций. Вероятность того, что A и B встретятся, равна отношению заштрихованной площади $OACDEGO$ к площади квадрата OBDFO. Площадь заштрихованной области равна площади квадрата $OBDFO$ минус сумма площадей двух треугольников ABC и EFG.

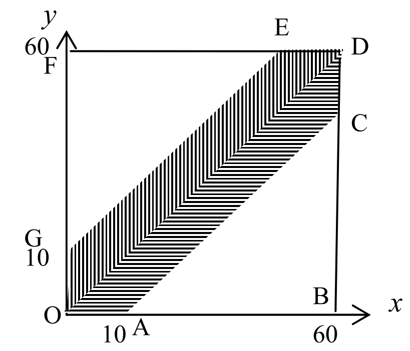


Рис. 3.3 К задаче о встрече

$$P(встречи) = \frac{60^2 - 50^2}{60^2} = \frac{3600 - 2500}{3600} \approx 0{,}306$$

Пример 10.3 (**задача Бюффона**) Плоскость разграфлена параллельными прямыми, расположенными на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу бросается тонкая игла длиной $2l$ $(l < a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую

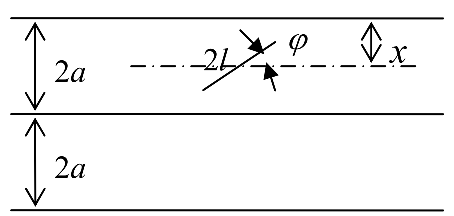


Рис. 4.3 К задаче Бюффона

Решение. Так как игла бросается произвольным образом, то её середина может попасть в любую точку плоскости между прямыми, и игла может оказаться под произвольным углом φ $0 \le \varphi \le \pi$. Кроме того, положение середины иглы не влияет на угол φ. Это можно изобразить следующим образом. Здесь x - расстояние от центра иглы до ближайшей прямой. Следовательно, положение иглы зависит от x и φ. Легко видеть, что для того, чтобы игла пересекла какую-нибудь линию, расстояние x должно быть меньше $l\sin\varphi$. Отсюда искомая вероятность должна быть равна отношению заштрихованной области к площади прямоугольника со сторонами a и φ.

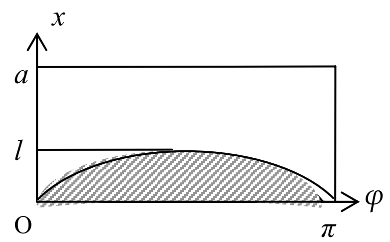


Рис 5.3 Решение задачи Бюффона

$$P = \frac{1}{a\pi}\int_0^{\pi} l\sin\varphi \, d\varphi = \frac{-l\cos\varphi\big|_o^{\pi}}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi}$$

Замечание 4.3 Этот опыт можно использовать для определения числа π.

$$\pi = \frac{2l}{aP},$$

где можно определить вероятность P как отношение числа пересечений иглой линии к общему числу бросков. Такой опыт был проделан Вольфом. Он бросил иглу 5000 раз и насчитал 2532 случаев попадания на линию. У него параллельные линии находились на расстоянии 45 мм, а игла имела длину 36 мм. Отсюда получается

$$\pi = \frac{36 \cdot 5000}{22{,}5 \cdot 2532} \approx 3{,}1596 \quad (\pi \approx 3{,}1415926...)$$

Задача о повторяющемся опыте

Рассматривается серия из n независимых опытов, в результате которых может произойти событие A. Пусть p - вероятность появления события A в каждом из опытов, а $q=1-p$ вероятность того, что событие A не произошло. Если в результате опыта событие A произошло, то опыт называется «удачным». Пусть $B_{n,m}$ - событие, состоящее в том, что в результате проведения n опытов было ровно m удач. Вероятность этого события обозначается в виде $P_{n,m}$.

Вывод формулы для определения $P_{n,m}$

1) Определим вероятность того, что все опыты были неудачны $P_{n,0}$. Эта вероятность равна $P(B_{n,0})=P(\overline{A}_1\times\overline{A}_2\times\overline{A}_3\times....\times\overline{A}_n)$. Так как по условию задачи все опыты независимые, то $P(\overline{A}_1\times\overline{A}_2\times\overline{A}_3\times....\times\overline{A}_n)=P(\overline{A}_1)\times P(\overline{A}_2)\times(\overline{A}_3)\times...\times P(.\overline{A}_n)=q^n$
2) Определим вероятность того, что ровно один опыт оказался удачным $P_{n,1}$.
   Событие, вероятность которого нас интересует, запишется в виде
   $B_{n,1}=(A_1\times\overline{A}_2\times\overline{A}_3\times....\times\overline{A}_n)+(\overline{A}_1\times A_2\times\overline{A}_3\times....\times\overline{A}_n)+...+(\overline{A}_1\times\overline{A}_2\times\overline{A}_3\times....\times A_n)$
   Таким образом, $B_{n,1}$ состоит из n слагаемых, в каждом из которых один удачный опыт и $n-1$ неудач. Все слагаемые попарно несовместны,, следовательно, из следствий 4 и 7 вероятность этого события равна
   $$P_{n,1}=n\,p\,q^{n-1}$$
3) Число опытов, в которых две удачи и $n-2$ неудачи, равно числу сочетаний из n по 2, то есть C_n^2. Тогда
   $$P_{n,2}=C_n^2p^2q^{n-2}$$
   Отсюда легко написать **формулу Бернулли**

$$\boxed{P_{n,m}=C_n^m p^m q^{n-m}} \quad \text{где } m=0,1,2,3,....,n \qquad (8.3)$$

Замечание 5.3 Сочетания из n по m элементов, входящие в эту формулу, являются коэффициентами **бинома Ньютона**

$$\boxed{(p+q)^n=p^n+n\,p^{n-1}q+C_n^2p^2q^{n-2}+...+C_n^{n-2}p^{n-2}q^2+n\,p^{n-1}q+q^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^kq^kp^{n-k}}$$

Пример 11.3 Какова вероятность того, что при 5 бросаниях игральной кости ровно 2 раза выпадет шестёрка,

Решение: Вероятность удачи (выпадения шестёрки) при одном броске игральной кости равно $p=\dfrac{1}{6}$. Вероятность неудачи равна $q=1-p=\dfrac{5}{6}$. В нашем случае $n=5$, а $m=2$. По формуле (8.3) получается

$$P_{5,2}=C_5^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{5!}{2!3!}\frac{5^3}{6^5}=\frac{4\cdot5}{1\cdot2}\frac{5^3}{6^5}=\frac{5^4}{3\cdot6^4}\approx0{,}161$$

Пример 12.3. Определить вероятность того, что в n независимых повторяющихся опытах будет **хотя бы один** удачный.

Решение: Если нужно определить вероятность появления события A **хотя бы один** раз, всегда используется вероятность противоположного события. Противоположным является событие, состоящее в том, что удача не появится ни разу. В данном случае формула имеет вид

$$P_{n,(1,2,3...n)} = 1 - q^n \qquad (9.3)$$

Пример 13.3. Какова вероятность того, что при 5 бросаниях монеты хотя бы раз выпадет герб?

Решение. Эта задача всегда решается через противоположное событие, то есть, по формуле (9.3). Вероятность удачи в данном примере равна $p = \frac{1}{2}$, и неудачи $q = \frac{1}{2}$, $n = 5$, а $m = 1$ или $m = 2$, или $m = 3$, или $m = 4$, или $m = 5$. Если решать непосредственно, то придётся вычислить 5 разных значений, а потом получить их сумму. Но по формуле (9.3) мы сразу получим нужный ответ.

$$P_{5,(1,2...5)} = 1 - P_{5,0} = 1 - \frac{1}{2^5} = 1 - \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

Типовая задача 3. Обозначим через $D_{n,m}$ событие, состоящее в том, что событие А появилось не менее m раз при проведении n опытов.

Решение. Вероятность события $D_{n,m}$ обозначим как $R_{n,m}$.

$$D_{n,m} = B_{n,m} + B_{n,m+1} + B_{n,m+2} + ... + B_{n,n} \qquad (10.3)$$

Отсюда по следствию 4 получается

$$R_{n,m} = P_{n,m} + P_{n,m+1} + P_{n,m+2} + ... + P_{n,n} \qquad (11.3)$$

или

$$R_{n,m} = \sum_{k=m}^{n} P_{n,k} \qquad (12.3)$$

Замечание 6.3 Иногда удобнее пользоваться обращённой формулой

$$R_{n,m} = 1 - \sum_{k=1}^{m-1} P_{n,k}$$

Пример 14.3 Какова вероятность выиграть в шахматы у равносильного противника не менее одной и не более 4 партий из пяти?

Решение: Используем формулу (12.3).

$$R_{5,4} = \sum_{k=1}^{4} P_{5,k} = P_{5,1} + P_{5,2} + P_{5,3} + P_{5,4} \qquad (*)$$

Обозначим выигрыш k - той партии буквой A_k. Итак полная группа событий состоит из

$A = \sum_{k=0}^{5} A_k$ В данном случае удобнее посчитать вероятность противоположного события – либо проиграть, либо выиграть все пять партий.

$$P_{5,0}+P_{5,5}=C_5^5 p^5 q^0+q^5=\frac{5!}{5!0!}\frac{1}{2^5}\cdot 1+\frac{1}{2^5}=\frac{2}{32} \qquad (**)$$

Тогда искомая нами вероятность равна $1-\frac{2}{32}=\frac{30}{32}$.

Непосредственный подсчёт даёт

$$P_{5,1}+P_{5,2}+P_{5,3}+P_{5,4}=C_5^1\frac{1}{2}\frac{1}{2^4}+C_5^2\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^3}+C_5^3\frac{1}{2^3}\frac{1}{2^2}=C_5^4\frac{1}{2^4}\frac{1}{2}=$$

$$=(\frac{5!}{1!4!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{4!1!})\frac{1}{32}=(5+\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}+\frac{4\cdot 5}{1\cdot 2}+5)\frac{1}{32}=\frac{30}{32}$$

Задача 4. Определение «наивероятнейшего» числа k_o удачных опытов. Примем без доказательства формулу для определения k_o

$$(n+1)\,p-1\le k_o\le(n+1)\,p \qquad (13.3)$$

Замечание 7.3 Если $(n+1)\,p$ - целое число, то за k_o можно принять любое из чисел $(n+1)\,p-1$ или $(n+1)\,p$. Если $n\,p$ - целое число, то

$$\boxed{k_o=n\,p.} \qquad (14.3)$$

Пример 15.3 Найти наивероятнейшее число выпадения шестёрки при бросании игральной кости 50 раз.

Решение. Вероятность выпадения шестёрки равна $p=\frac{1}{6}$, $n=50$. Отсюда наивероятнейшее число выпадений шестёрки равно

$$\frac{51}{6}-1\le k_o\le\frac{51}{6}$$

$$7{,}5\le k_o\le 8{,}5$$

Приближённо можно посчитать по формуле (7) $k_o=n\,p.=50\cdot\frac{1}{6}\approx 8$.

Ответ: наивероятнейшее число выпадений шестёрки при 50 бросках игральной кости равно **8.**

Полная вероятность сложного события

Предположим, что для появления события А необходимо выполнение одного из событий *H₁*, *H₂*, …., *Hₙ*. Тогда событие А записывается в виде

$$A=(H_1\times A)+(H_2\times A)+....+(H_n\times A)$$

Предположим, что события H_k образуют полную группу несовместных событий, то есть,

$$\sum_{k=1}^{n}H_k=E\text{, где }H_i\times H_j=0,\quad i\ne j \qquad (15.3)$$

Определение. Событие A называется **сложным**, если для того, чтобы оно произошло, необходимо выполнение одного из событий $H_1, H_2, ..., H_n$ – которые называются **гипотезами**.

Замечание 8.3 Следует помнить, что **сумма вероятностей всех гипотез** должна равняться **единице**, то есть, $P\left(\sum_{k=1}^{n} H_k\right) = P(E) = 1$. При этом необходимо учитывать **совместность** или **несовместность** гипотез.

На основании аксиом Ш и IV вероятность события А равна

$$P(A) = P(H_1 \times A) + P(H_2 \times A) + ... + P(H_n \times A) =$$
$$= P(H_1) \times P(A/H_1) + P(H_2) \times P(A/H_2) + ... + P(H_n) \times P(A/H_n)$$

Таким образом, **полная вероятность сложного события** записывается в виде

$$\boxed{P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \times P(A/H_k)} \qquad (16.3)$$

Вывод. *Полная вероятность сложного события равна сумме произведений вероятности каждой из гипотез на условную вероятность сложного события при условии, что очередная гипотеза имела место.*

Пример 16.3 Имеется две урны. В первой 4 белых и 5 красных шаров, а во второй 5 белых и 2 красный шара. Какова вероятность вынуть красный шар из наудачу выбранной урны?

Рис. 6.3 К примеру 16.3

Решение: Здесь две гипотезы - H_1 выбор первой урны, H_2 - выбор второй урны. Вероятности этих гипотез равны $H_1 = H_2 = \frac{1}{2}$. Условные вероятности события А – выбора красного шара из первой урны $P(A/H_1) = \frac{5}{9}$, из второй - $P(A/H_2) = \frac{2}{7}$. Отсюда по формуле (16.3) получается

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \times P(A/H_k) = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7} = \frac{1}{2}\frac{35+18}{63} = \frac{53}{126} \approx 0{,}421$$

Условная вероятность гипотезы

Определение 1.3 Вероятность гипотезы, задаваемая при вычислении полной вероятности сложного события, называется **априорной**.

Задаваемые в предыдущей задаче вероятности гипотез являются априорными. Но задача может быть поставлена иначе. Предположим. что опыт окончился появлением события А. Требуется найти вероятность того, что событие А появилось в результате осуществления i - той гипотезы H_i, то есть, $P(H_i / A)$.

Определение 2.3 Эта вероятность называется **условной вероятностью i - той гипотезы** после осуществления события А. $P(H_i / A)$. - называется **апостериорной** вероятностью.

Условную вероятность гипотезы можно определить из **закона взаимности** (Следствие **X**)

$$\frac{P(H_i / A)}{P(H_i)} = \frac{P(A / H_i)}{P(A)}$$

Отсюда получается **формула Байеса** условной вероятности гипотезы

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{P(A)} \qquad (17.3)$$

Замечание 9.3 Используя формулу (16.3) полной вероятности сложного события, получим эту формулу в другом виде

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A / H_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k) \times P(A / H_k)} \qquad (18.3)$$

Вывод: *Условная вероятность гипотезы равна дроби, знаменатель которой равен полной вероятности сложного события , а числитель –то слагаемое, взятое из знаменателя, которое соответствует i - той гипотезе.*

Пример 17.3. При условии предыдущего примера 16.3 найти вероятность того, что извлечённый наудачу красный шар был взят из первой урны.
Решение. Для решения используем формулу Байеса (18.3)

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{18}}{53/126} = \frac{5 \cdot 126}{53 \cdot 18} \approx 0{,}660$$

Этот результат легко проверить логически. Так как в первой урне количество красных шаров относительно больше, чем во второй, то вероятность того, что красный шар извлечён из первой урны, больше априорной вероятности 0,5. Кроме того, так как сумма вероятностей всех гипотез равна единице, можно без дополнительных вычислений получить условную вероятность того, что красный шар извлечён из второй урны. Она равна $1 - 0{,}660 \approx 0{,}340$.

Пример 18.3 Событие A – выпадение чётного числа очков на игральной кости, событие B - выпадение нечётного числа очков. События A и B несовместны, поэтому при наступлении события A событие B не может произойти, поэтому **условная вероятность** $P(B / A) = 0$.

Пример 19.3 Событие A – выпадение 4 и 5 очков при бросании игральной кости. Событие B – выпадение чётного числа очков. Так как событие A принадлежит событию B, то при наступлении события A событие B обязательно произойдёт. Отсюда **условная вероятность** $P(B / A) = 1$**.**

Пример 20.3 Событие A – выпадение чётного числа очков на игральной кости. Событие B – выпадение не менее 5 очков. Если событие A наступило, то произошёл один из трёх элементарных исходов: выпало 2, 4 или 6 очков. Но из этих трёх исходов для наступления события B нужен один исход – выпадение шестёрки. Отсюда в соответствии с классическим определением вероятности **условная вероятность** $P(B / A) = \frac{1}{3}$**.**

Вывод: *Из этих примеров видно, что условная вероятность может равняться безусловной вероятности, а также может быть больше или меньше неё.*

Саму условную вероятность $P(B/A)$ события B при условии наступления события A естественно определить как отношение числа исходов $A\times B$, благоприятных для совместного осуществления событий *A* и *B*, к числу исходов *A*, благоприятных для появления события *A*, то есть,

$$P(B/A)=\frac{P(A\times B)}{P(A)}.$$

Замечание 10.3 Последняя формула может служить общим определением условной вероятности. Так

$$P(E/A)=1,\quad P(O/A)=0\,,\ P(B/A)=\frac{P(A\times B)}{P(A)}.$$

Иногда бывает полезно использовать обращение событий, то есть,

$$P(\overline{B}/A)=1-P(B/A)\,.$$

Это получается из выражения

$$1=P(E/A)=P[(B+\overline{B})/A]=P(B/A)+P(\overline{B}/A)\,.$$

Пример 21.3 При подбрасывании монеты 3 раза **выпало 2 герба** (событие *A*). Определим вероятность того, что **при втором** подбрасывании **выпал герб** – событие *B*. В этом случае событие *AB* происходит, при следующих двух исходах: «герб – герб – цифра» или « цифра – герб – герб». Поскольку всего может быть 8 исходов

ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ЦЦГ, ЦГЦ, ГЦЦ, ЦЦЦ

Отсюда $P(AB)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. Событию *A* благоприятствуют 3 исхода, то есть, $P(A)=\frac{3}{8}$. Отсюда

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.=\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{3}=\frac{2}{3}$$

ГЛАВА 2. Случайная величина

§ 1 Основные определения

Определение 1.1 Переменная величина x, принимающая в результате испытания одно из конечной или бесконечной последовательности значений $x_1, x_2, ..., x_k, ...$, называется **случайной величиной**, если каждому значению x_k соответствует определённая вероятность p_k того, что переменная величина x примет значение x_k.

Определение 2.1 Случайная величина X называется случайной величиной **дискретного** типа, если множество её значений можно **пронумеровать**.

Пример 1.1 X - количество очков, выпавших на игральной кости. X - случайная величина дискретного типа.

Определение 3.1 Всякое соотношение между возможными значениями случайной величины и вероятностями этих значений называется **законом распределения** случайной величины.

Случайная величина дискретного типа

Простейшая форма **закона распределения** - это ряд, представленный в виде таблицы

Таблица 1.1.

X	x_1	x_2		x_n
p	p_1	p_2		p_n

Пример 2.1 Опыт состоит в бросании трёх игральных костей. X – число костей, на которых выпал герб. Построить ряд распределения

Решение. Всего возможно 8 вариантов: ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ЦЦГ, ЦГЦ, ГЦЦ, ЦЦЦ. Вероятность появления каждого события (варианта) равна $\frac{1}{8}$. Ряд распределения (закон распределения) имеет вид:

Таблица 2.1

X	0	1	2	3
p	1/8	3/8	3/8	1/8

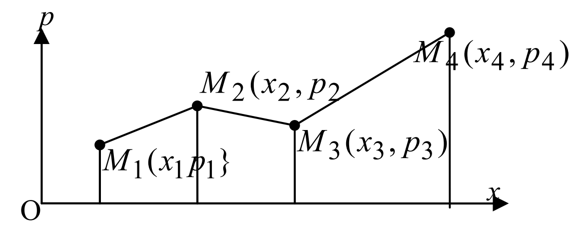


Рис. 1.1 Многоугольник распределения

Определение 4.1 Графическое изображение распределения случайной величины X и соответствующих вероятностей p называется **многоугольником распределения**.

Определение 5.1 **Функцией распределения** (интегральной функцией распределения) случайной величины X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что случайная величина примет значения, меньшие выбранного значения *x*, то есть, $F(x) = p(X < x)$

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i , \qquad (1.1)$$

где суммирование ведётся для всех i, для которых $x_i < x$.

Пример 3.1 Опыт состоит в том, что производится один выстрел. Случайная величина представляет собой попадание или промах при одном выстреле. Вероятность попадания равна 0,3. Составить закон и многоугольник ряда распределения.
Решение:

При $x \le 0$ $F(x) = 0$,
при $0 \le x < 1$ $F(x) = 0{,}7$,
при $x > 1$ $F(x) = 1$..

Ряд распределения в данном случае имеет вид:

Таблица 3.1

x	0	1
p	0,7	0,3

Функция распределения имеет вид

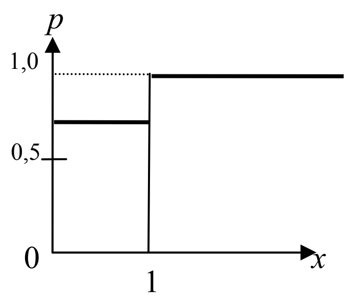


Рис. 2.1 Функция распределения

Случайная величина непрерывного типа и законы её распределения

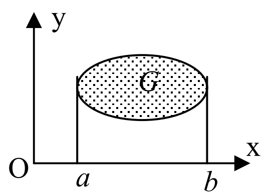


Рис. 3.1 Случайная величина непрерывного типа

Определение 6.1 Случайная величина X называется случайной величиной **непрерывного** типа, если множество её значений заполняет целиком некоторый отрезок числовой оси.
Пример 4.1 В области G наудачу ставится точка. Абсцисса этой точки X является случайной величиной непрерывного типа, множество значений которой заполняет интервал (a,b).

Функция распределения (закон распределения) случайной величины непрерывного типа имеет вид

$$F(x) = P(-\infty < X < x) \qquad (2.1)$$

Свойства функции распределения

Свойство 1.1 Функция распределения есть неубывающая функция своего аргумента, то есть, при $x_2 > x_1$ $F(x_2) \ge F(x_1)$.
Доказательство. Рассмотрим случайную величину X как случайную точку x на оси Ox, которая в результате опыта может занять любое положение. Функция распределения $F(x)$ есть вероятность того, что случайная точка X в результате опыта попадёт левее точки x. Если перемещать x вправо, то $F(x)$ не может уменьшаться, так как вероятность попасть левее точки x увеличивается.
Свойство 2.1 На минус бесконечности функция распределения равна нулю

$$F(-\infty) = 0 \qquad (3.1)$$

Доказательство: Если x перемещать влево, то попасть левее невозможно, то есть при $x \to -\infty$, $\underset{x\to-\infty}{p(X < x)} \to 0$.

Свойство 3.1 На плюс бесконечности функция распределения равна единице

$$F(\infty) = 1 \qquad (4.1)$$

Доказательство: Когда x стремится к бесконечности, вероятность попасть левее становится всё больше и больше и стремится к единице (попадание левее становится достоверным событием).

Свойство 4.1 Вероятность попасть на отрезок (a,b) равна

$$p(a \le x \le b) = F(b) - F(a) \qquad (5.1)$$

Доказательство: Представим отрезок (a,b) в виде суммы

$$\{-\infty < x < b\} = \{-\infty < x < a\} + \{a \le x \le b\}$$

откуда

$$\{a \le x \le b\} = \{-\infty < x < b\} - \{-\infty < x < a\}$$

Тогда

$$p\{-\infty < x < b\} = F(b)$$
$$p\{-\infty < x < a\} = F(a)$$
$$p\{a \le x \le b\} = F(b) - F(a)$$

Свойство 5.1 (**теорема**) Если в точке x_o функция распределения имеет скачок, величина которого равна h, то вероятность того, что случайная величина примет значение x_o равна скачку функции распределения в этой точке.

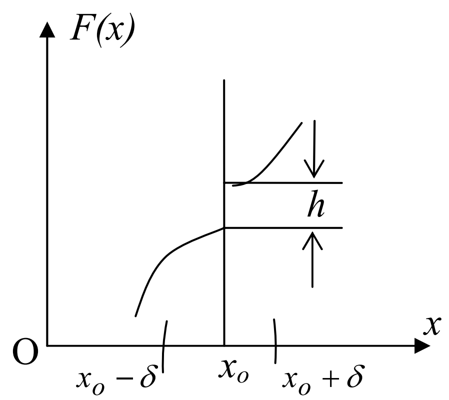


Рис. 4.1 Скачок функции распределения

Доказательство:

Опишем около точки x_o δ - окрестность и рассмотрим полусегмент $[x_o - \delta, x_o + \delta)$. По свойству 4

$$P(x_o - \delta < x < x_o + \delta) = F(x_o + \delta) - F(x_o - \delta)$$

Если $\delta \to 0$, то $F(x_o + \delta) - F(x_o - \delta) = h$, откуда получается, что $P(x_o - \delta < x < x_o + \delta)$ при $\delta \to 0$

$$P(X = x_o) = h \text{, ч.т.д.} \qquad (6.1)$$

Следствие 1.1 Если в некоторой точке x_o функция распределения случайной величины X непрерывна, то вероятность попадания случайной величины X в эту точку равна нулю

$$P(X = x_o) = 0, \qquad (7.1)$$

т.е. принять значение x_o возможно, но с нулевой вероятностью.

Следствие 2.1 Если функция распределения случайной величины всюду непрерывна, то свойство **4.**1 можно записать в виде

$$P(a < X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) \qquad (8.1)$$

Плотность распределения случайной величины

Рассмотрим элементарный отрезок$[x, x+\Delta x]$ и определим вероятность того, что случайная величина X попадёт на этот отрезок, то есть, $P(x < X < x+\Delta x)$.

Определение 7.1 Отношение величины $P(x < X < x+\Delta x)$ к длине отрезка Δx называется **средней плотностью** вероятностей на этом элементарном отрезке.

$$f_{cp}(x) = \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x} \qquad (9.1)$$

Определение 8.1 **Плотностью распределения** вероятностей $f(x)$ называется предел средней плотности вероятностей на элементарном отрезке $[x, x+\Delta x]$ при $\Delta x \to 0$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x+\Delta x)}{\Delta x}. \qquad (10.1)$$

Свойства плотности распределения вероятностей

Свойство I.1 Плотность распределения $f(x)$ есть производная от функции распределения

Доказательство: Вспомним формулу

$$P(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$$

Тогда

$$P(x \le X \le x+\Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x).$$

Это можно рассматривать как приращение функции распределения

$$\Delta F(x) = F(x+\Delta x) - F(x)$$

Тогда предел отношения равен

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} = F'(x) \qquad (11.1)$$

Свойство II.1 Плотность распределения и функция распределения связаны следующим образом:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \qquad (12.1)$$

Доказательство: Это свойство является следствием свойства **1.**1 функции распределения и свойства **I.**1 плотности распределения.

Свойство III.1 Плотность распределения неотрицательная функция $f(x) \ge 0$.

Доказательство: Из **I.**1 - го свойства плотности распределения и **2.**1-го свойства функции распределения следует, что так как $F(x)$- неубывающая функция своего аргумента, то её производная не отрицательна, а так как производная совпадает с $f(x)$, то $f(x)$ - неотрицательная функция.

Свойство IV.1. Интеграл от плотности распределения равен

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = P(a \le X \le b) \qquad (13.1)$$

Доказательство:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) = P(a \le X \le b)$$

Свойство V.1 Интеграл от плотности распределения по всей оси равен единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \qquad (14.1)$$

Доказательство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = F(\infty) - F(-\infty) = P(-\infty < X < \infty) = 1$$

Замечание 1.1 Из свойств **IV.**1 и **V**.1 следует, что $F(x)$ - **интегральная** характеристика случайной величины, а $f(x)$ - **дифференциальной**.

Геометрические свойства плотности распределения

Свойство VI.1. Вся кривая плотности распределения лежит не ниже оси Оx.
Следствие VII.1. Вся площадь под кривой плотности распределения равна единице.

$$S = 1 \qquad (15.1)$$

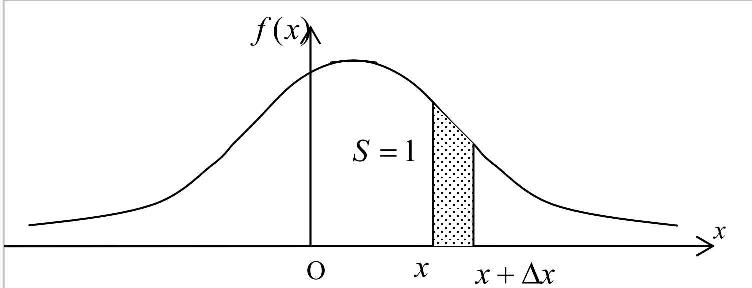


Рис. 5.1 Элемент вероятности

Определение 9.1 **Элементом вероятности** называется выражение $f(x)\Delta x$, которое равно

$$\Delta S = P(x \le X \le x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x \qquad (16.1)$$

Замечание 2.1 Функция распределения $F(x)$ является **безразмерной** величиной (так как является вероятностью)

Замечание 3.1 Плотность распределения $f(x)$ имеет размерность**, обратную размерности** случайной величины x.

§ 2. Числовые характеристики случайной величины

Определение 1.2 **Числовыми характеристиками** случайной величины называются такие характеристики, которые в сжатой форме выражают **основные** особенности распределения случайной величины.

Числовые характеристики делятся на
а) характеристики **положения** случайной величины,
б) характеристики **рассеяния** случайной величины.

Характеристики положения

К характеристикам положения относятся **математическое ожидание, мода, медиана, начальные моменты случайной величины.**

$$\boxed{M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i} \qquad (1.2)$$

Определение 2.2 Математическим ожиданием случайной величины называется сумма произведений всех возможных **значений случайной величины** на **вероятность** этих значений.

Замечание 1.2 Иногда математическое ожидание называют **средним значением**.

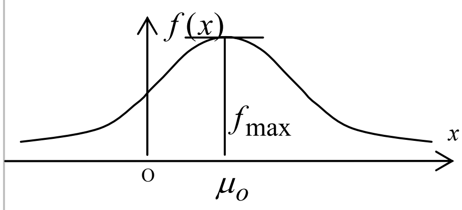


Рис. 1.2 Модное значение

Пусть случайная величина принимает значения

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

с вероятностями $\quad p_1, p_2, ..., p_n$

Найдём среднее взвешенное

$$M[X] = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Учитывая, что $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$, получим $M[X] = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$

Замечание 2.2 Можно дать математическому ожиданию механическую интерпретацию. Пусть в точках $x_1, x_2, ..., x_n$ сосредоточены массы $p_1, p_2, ..., p_n$, причём, $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$. Тогда $M[X\} = m_x$ есть не что иное, как абсцисса центра тяжести данной системы материальных точек..

Замечание 3.2 Математическое ожидание связано со средним арифметическим значением случайной величины такой же зависимостью, как частота m^*/n^* с вероятностью m/n, так как при большом числе опытов средне-арифметическое наблюдённых значений случайной величины сходится по вероятности к её математическому ожиданию.

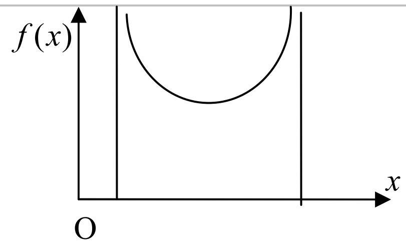


Рис. 2.2 Безмодальное распределение

Замечание 4.2 Для непрерывной случайной величины математическое ожидание выражается не суммой, а интегралом

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \qquad (2.2)$$

Замечание 5.2 Если ряд (см. таблицу 4.1) или интеграл (2.2) расходятся, то случайная величина **не имеет** математического ожидания.

Таблица 4.1

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_{max}	$\cdots$	x_n
p	p_1	p_2	$\cdots$	p_{max}	$\cdots$	p_n

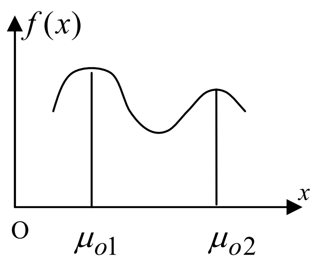


Рис. 3.2 Многомодальное распределение

Определение 3.2 Если случайная величина дискретного типа, то **модой** μ_o называется то значение X, которому соответствует наибольшая вероятность (**модное** значение), а для непрерывной случайной величины **модой** μ_o является то значение случайной величины, у которого график плотности распределения имеет максимум, т.е. $f'(x_{max}) = 0$

Замечание 6.2 Бывают безмодальные распределения. Например, нет моды у распределения туманных дней в Лондоне (рис. 2.2).

Замечание 7.2 Бывают многомодальные распределения (рис. 3.2)

Определение 4.2 **Медианой** случайной величины называется то её значение μ_e, относительно которого можно утверждать, что значения случайной величины, меньшие, чем $X=\mu_e$, имеют ту же вероятность , что и значения, большие, чем $X=\mu_e$.

$$P(x<\mu_e)=P(x>\mu_e)=\frac{1}{2} \qquad (3.2)$$

Замечание 8.2 Математическое ожидание, мода и медиана **не всегда совпадают** друг с другом.

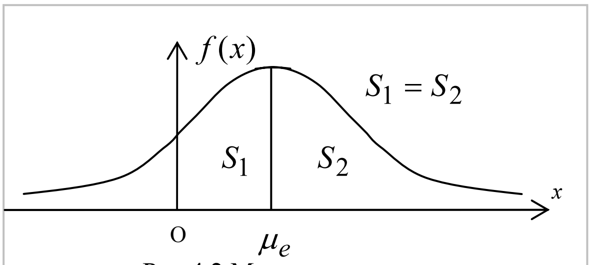


Рис.4.2 Медиана

Начальные моменты

Определение 5.2 **Начальным** моментом k - того порядка случайной величины X дискретного типа называется число

$$\alpha_k[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \,, \qquad (4.2)$$

где $x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n$ - возможные значения X, а $p_1, p_2, ..., p_i, ..., p_n$ соответствующие вероятности $p_i = p(X = x_i)$. Если случайная величина непрерывного типа, то начальный момент имеет вид

$$\alpha_k[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x^k\, f(x)\, dx \qquad (5.2)$$

Частные случаи начальных моментов

1) $k=0 \quad \alpha_o[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i^o p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ и $\alpha_o[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x^o\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$

2) $k=1 \quad \alpha_1[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = m_x; \quad \alpha_1[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx = m_x$ **- математическое ожидание.**

Замечание 9.2 Начальные моменты более высокого порядка используются редко.

Числовые характеристики рассеяния

К числовым характеристикам рассеяния относятся дисперсия, СКВО (средне квадратичное отклонение) и центральные моменты случайной величины.

Пример 1.2 Пусть один стрелок стреляет с рассеянием вида (рис. 5.2)

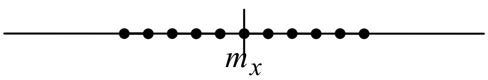


Рис. 5.2 Большой разброс

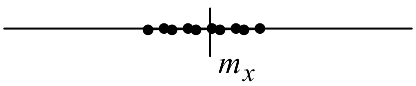


Рис. 6.2 Малый разброс

а второй стреляет более кучно (рис. 6.2).

Эти случаи должны быть описаны численно. Совершенно очевидно, что чем больше отклонение точек от математического ожидания, тем больше рассеяние.

Определение 6.2 **Отклонением** случайной величины *X* называется **разность** между значениями случайной величины и её математическим ожиданием $(x_1 - m_x), (x_2 - m_x), ..., (x_n - m_x)$.

Пусть дан ряд распределения

Таблица 1.2

X	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
p	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Можно составить таблицу отклонений от математического ожидания

Таблица 2.2

$X - m_x$	$x_1 - m_x$	$x_2 - m_x$	$\dots$	$x_i - m_x$	$\dots$	$x_n - m_x$
p	p_1	p_2	$\dots$	p_i	$\dots$	p_n

Если составить сумму $\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)p_i$, то она всегда будет **равна нулю**, так как $\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)p_i = \sum_{i=1}^{n}x_i p_i - m_x\sum_{i=1}^{n}p_i = m_x - m_x = 0$, поэтому иногда берут сумму от модуля отклонений $\sum_{i=1}^{n}|x_i - m_x|\ p_i$. Эта сумма называется **средним отклонением** случайной величины. Эта величина почти не используется, так как она имеет неудачные математические свойства. Меру рассеяния берут как математическое ожидание от **квадрата отклонений**.

Определение 7.2 **Дисперсией** называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания.

$$D[X] = \sigma_x^2 = M[(x - m_x)^2] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i \qquad (6.2)$$

Если *X* непрерывная случайная величина, то её дисперсия имеет вид

$$D_x = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x)\,dx \qquad (7.2)$$

Замечание 10.2 За меру рассеяния принимают **квадратный корень из дисперсии**, который называется средним квадратическим отклонением или *СКВО* случайной величины

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \qquad (8\ .2)$$

Замечание 11.2 *СКВО* является **средней ошибкой** измерений.

Рабочая формула для вычисления дисперсии

Запишем величину $\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i$ в виде

$$\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a - m_x - a)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n}[(x_i - a)^2 - 2(x_i - a)(m_x - a) + m_x - a)^2]p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 p_i - 2(m_x - a)\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)p_i + (m_x - a)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 p_i - 2(m_x - a)[\sum_{i=1}^{n} x_i p_i - a\sum_{i=1}^{n} p_i] + (m_x - a)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i$$

Здесь следует учесть, что $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = m_x$ является математическим ожиданием, а сумма вероятностей равна единице . Тогда

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 p_i - 2(m_x - a)[\sum_{i=1}^{n} x_i p_i - a\sum_{i=1}^{n} p_i] + (m_x - a)^2 \sum_{i=1}^{n} p_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 p_i - 2(m_x - a)^2 + (m_x - a)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 p_i - (m_x - a)^2\end{aligned} \quad (9.2)$$

И окончательно получается формула

$$D_x = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 p_i - (m_x - a)^2 \quad (10.2)$$

Если положить $a = 0$, то эта формула примет вид:

$$D[X] = \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x^2 \quad (11.2)$$

Для непрерывной случайной величины эта формула запишется так:

$$D[X] = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - m_x^2 \quad (12.2)$$

Формула (12.2) является **рабочей** формулой для вычисления дисперсии.

Определение 8.2 **Центральным** моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание k - той степени отклонения этой величины.

Если случайная величина дискретного типа, то формула имеет вид:

$$\mu_k = M[(x_i - m_x)^k] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^k p_i \quad (13.2)$$

Для непрерывной случайной величины она записывается в виде

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^k f(x)\,dx \quad (14.2)$$

Частные случаи центральных моментов

1) $k = 0$ $\mu_0 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^o p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

2) $k=1$ $\mu_1=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)p_i=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i-m_x\sum_{i=1}^{n}p_i=m_x-m_x=0$

.3) $k=2$ $\mu_2=M[(x_i-m_x)^2]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i=D_x$ - дисперсия.

4) $k=3$ $\mu_3=M[(x_i-m_x)^3]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^3 p_i$ - асимметрия,

или
$$\mu_3=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^3 f(x)\,dx \qquad (15.2)$$

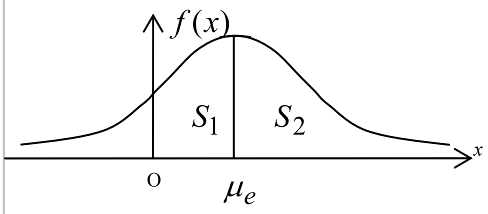


Рис.5.2 $\eta_x=0$

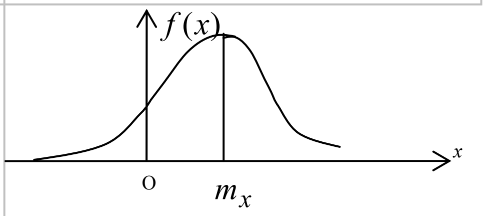


Рис.6.2 $\eta_x<0$

Для того, чтобы не рассматривать размерную величину, μ_3 делят на третью степень СКВО и получают величину

$$\eta_x=\frac{\mu_3}{\sigma_x^3}, \qquad (16.2)$$

которая называется **коэффициентом асимметрии**.

5) $k=4$ $\mu_4=M[(x_i-m_x)^4]=\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^4 p_i$

(17.2)

$$\mu_4=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^4 f(x)\,dx \qquad (18.2)$$

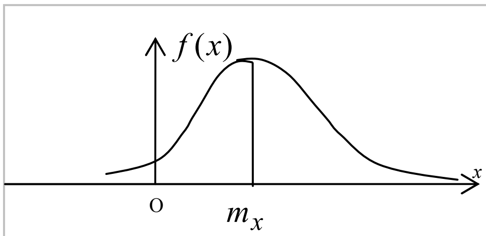


Рис.7.2

Центральный момент 4 – го порядка характеризует **сплющенность** графика плотности распределения . Безразмерная характеристика выражается в виде

$$\varepsilon_x=\frac{\mu_4[X]}{\sigma_x^4}-3 \qquad (19.2)$$

и называется - **эксцесс распределения**. Для **нормального** распределения эксцесс равен нулю $\varepsilon_x=0$. Если $\varepsilon_x>0$, то вершина кривой плотности распределения более острая

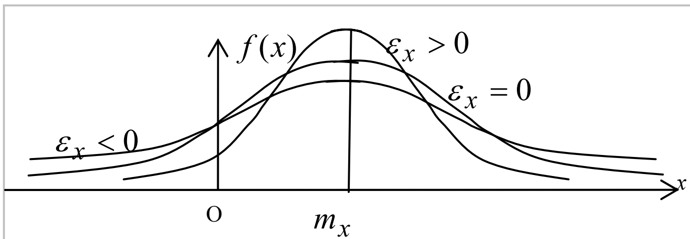


Рис.8.2 Эксцесс

Свойства математического ожидания

Свойство 1.2 Размерность математического ожидания $M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ имеет размерность случайной величины.

$$M[X]=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\ ,$$

так как вероятность p_i безразмерная величина.

Свойство 2.2 Если к случайной величине *X* прибавить неслучайное число *a*, то к её математическому ожиданию прибавиться это же неслучайное число.

$$M[X+a]=\sum_{i=1}^{n}[x_i+a]p_i=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i + a\sum_{i=1}^{n} p_i = m_x + a\text{, ч.т.д.} \tag{20.2}$$

Свойство 3.2 Умножение случайной величины на постоянное число *C* изменяет математическое ожидание в *C* раз

$$M[CX]=\sum_{i=1}^{n} Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = Cm_x \tag{21.2}$$

Общая формула может быть записана в виде

$$M[CX+a]=\sum_{i=1}^{n} Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = Cm_x + a \tag{22.2}$$

или

$$m_{cx+a} = Cm_x + a \tag{22'.2}$$

Свойство 4.2 Математическое ожидание суммы двух случайных величин *X* и *Y* равно сумме математических ожиданий этих величин

$$M[X+Y]=M[X]+M[Y] \tag{23.2}$$

$$m_{x+y} = m_x + m_y \tag{23'.2}$$

Свойства дисперсии

Свойство 1.2 **Размерность** дисперсии равна **квадрату размерности** случайной величины. Размерность СКВО равна размерности случайной величины.

Свойство 2.2 Дисперсия **неслучайной** величины равна **нулю**.

Свойство 3.2 При прибавлении к случайной величине неслучайной величины ни дисперсия, ни СКВО не меняются.

$$\begin{aligned} D[X+a] &= \sum_{i=1}^{n}[(x_i+a)-(m_x+a)]^2 p_i = \sum_{i=1}^{n}[x_i+a-m_x-a]^2 p_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n}[x_i-m_x]^2 p_i = D[X] \end{aligned} \tag{24.2}$$

Свойство 5.2 Если случайную величину умножить на неслучайный множитель *К*, то её дисперсия умножится на K^2

$$D[KX]=\sum_{i=1}^{n}(Kx_i-Km_x)^2 p_i = K^2\sum_{i=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_i = K^2 D[X] \tag{25.2}$$

или

$$\sigma_{kx}^2 = K^2\sigma_x^2 \tag{25'.2}$$

Общая формула имеет вид

$$\sigma^2_{kx+a} = K^2 \sigma^2_x$$

Свойство 6.2 Дисперсия суммы двух **независимых** случайных величин равна сумме их дисперсий $D[X+Y] = M[(x-m_x)^2 + (y-m_y)^2] = M[(x-m_x)^2 + M[(y-m_y)^2] = D[X] + D[Y]$ (26.2)

§ 3. Основные законы распределения случайной величины

1. Равномерное распределение

Определение 1.3 Случайная величина X называется величиной с **равномерным** распределением вероятностей, если:

1) существует конечный интервал (a,b) такой, что попадание случайной величины X в этот интервал достоверно;
2) плотность распределения $f(x)$ равна положительной постоянной на этом интервале и нулю вне его

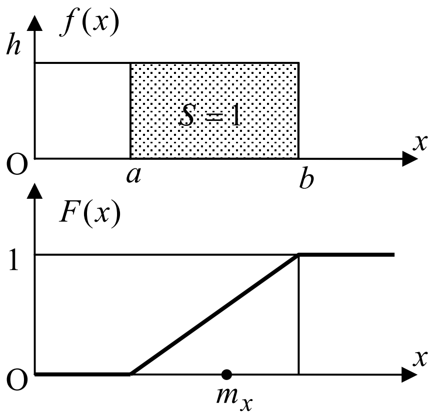


Рис. 1.3 Равномерное распределение

$$f(x) = \begin{cases} h, & a < x < b \\ 0, & \text{вне интервала } (a,b) \end{cases} \qquad (1.3)$$

Величина h легко находится из условий 1) и 2):

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{b}^{\infty} f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{b} h\,dx + \int_{b}^{\infty} 0\,dx = h\,(b-a)$$

Отсюда получаем

$$h = \frac{1}{b-a} \qquad (2.3)$$

Следовательно, **закон равномерной плотности** равен

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{вне } (a,b) \end{cases} \qquad (3.3)$$

Найдём функцию распределения $F(x)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} 0\,dx + \int_{a}^{x} \frac{dx}{b-a} = 0 + \left.\frac{x}{b-a}\right|_a^x = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x \le b, \\ 1, & x > b. \end{cases} \qquad (4.3)$$

Числовые характеристики случайной величины X с равномерным распределением вероятностей

а) **Математическое ожидание**

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}\,dx = \left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2} \qquad (5.3)$$

б) **Дисперсия**

Формула (12.2) является **рабочей** формулой для вычисления дисперсии.

$$D_x = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b (x - \frac{a+b}{2})^2\,dx = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (6.3)$$

Замечание 1.3 Дисперсия $D[X]$ является возрастающей функцией интервала (a,b).

3) СКВО равно

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} \quad (7.3)$$

4) Коэффициент **асимметрии** $\eta_x = 0$, так как график плотности распределения симметричен относительно математического ожидания.

Примеры случайных величин с **равномерным распределением** вероятности:

Пример 1.3 Угол X, составленный с выбранным направлением некоторого радиуса-вектора вала или колеса, остановившихся в результате трения.

Пример 2.3 Время ожидания X поезда метрополитена от 0 до 2 минут есть случайная величина с равномерным распределением вероятности.

Смешанное распределение

Определение 2.3 Если функция распределения $F(x)$ на некоторых участках непрерывна, а в отдельных точках имеет разрывы, то случайная величина называется **смешанной**.

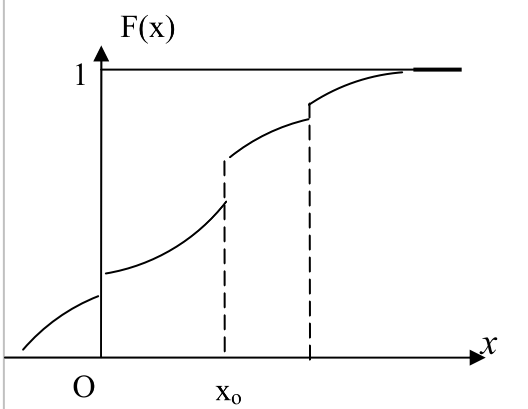


Рис. 2.3 Смешанное распределение

Теорема. Если в точке x_o функция распределения имеет скачок, величина которого равна h, то вероятность того, что случайная величина примет значение x_o равна скачку функции распределения в этой точке.

$P(X = x_o) = h$

Пример 3.3 На перекрёстке стоит автоматический светофор, в котором 1 мин горит зелёный свет и 0,5 мин - красный, затем опять 1 мин горит зелёный свет и 0,5 мин – красный и т.д. Некто подъезжает к перекрёстку на машине в случайный момент, не связанный с работой светофора. 1) Найти вероятность того, что он проедет перекрёсток, не останавливаясь; 2) найти закон распределения и числовые характеристики времени ожидания у перекрёстка $T_{ож}$; 3) построить функцию распределения $F(t)$ времени ожидания $T_{ож}$.

Решение: Момент проезда автомашины через перекрёсток распределён равномерно в интервале, равном периоду смены цветов в светофоре. Этот период равен 1 + 0,5 = 1,5 мин (рис. 3.3)

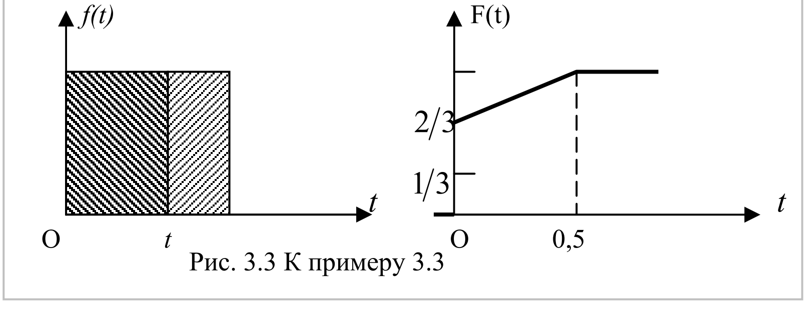


Рис. 3.3 К примеру 3.3

Для того, чтобы машина переехала через перекрёсток, не останавливаясь, достаточно, чтобы момент проезда пришёлся на интервал времени (0, 1). Для случайной величины, распределённой равномерно в интервале (0; 1,5), вероятность того, что она попадёт на участок (0, 1), равна $2/3$. Время ожидания $T_{ож}$ есть смешанная случайная величина, с вероятностью $2/3$ она равна нулю, а с вероятностью $1/3$ принимает с одинаковой плотностью вероятности любое значение между 0 и 0,5 мин., поэтому $h = \dfrac{1}{b-a} = \dfrac{1}{0{,}5}$.

Среднее время ожидания у перекрёстка

$$M[T_{ож}] = 0 \cdot 2/3 + \int_0^{0{,}5} t \frac{dt}{0{,}5} 1/3 = 0{,}25 \cdot 1/3 = 0{,}083 \text{ мин}$$

Дисперсия времени ожидания

$$D[T_{ож}] = \alpha_2[T_{ож}] - (M([T_{ож}]^2) = 0^2 \cdot 2/3 + \frac{1}{3}\int_0^{0{,}5} t^2 \frac{dt}{0{,}5} - (0{,}083)^2 \approx 0{,}0208 \text{ мин}^2$$

$\sigma_{t_{ож}} \approx 0{,}141$ мин.

2. Биномиальное распределение

Рассматривается задача о повторяющемся опыте. Вероятность появления события А в каждом отдельном испытании равна p. «Неудача» появляется с вероятностью q. Испытание проводится n раз. Известно, что вероятность того, что из n опытов ровно m будет удачных, вычисляется по формуле Бернулли

$$P_{n,m} = C_n^m p^m q^{n-m} \tag{8.3}$$

Известно, что сочетания C_n^m вычисляются по формуле $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ и являются коэффициентами бинома Ньютона

$$(p+q)^n = p^n + n\,p^{n-1}q + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \ldots + C_n^{n-2} p^{n-2} q^2 + n\,p^{n-1}q + q^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}$$

Замечание 2.3 Если m и n большие числа, то вычисление факториалов выполняется по приближённым формулам: либо применяют таблицы логарифмов факториалов $\ln n!$, которые применяют до $n < 100$; либо по формуле, полученной из **формулы Стирлинга**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$$

в виде

$$n! \approx \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}. \tag{9.3}$$

Замечание 3.3 При решении практических задач с биномиальным законом распределения обычно ищут вероятность числа удач в интервале (m_1, m_2) в виде суммы

$$P(m_1 \le m \le m_2) = P_{n,m_1} + P_{n,m_{1+1}} + P_{n,m_{1+2}} + \ldots + P_{n,m_2} = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m} \tag{10.3}$$

Числовые характеристики случайной величины, подчиняющейся биномиальному закону

1) **Математическое ожидание** случайной величины, подчиняющейся биномиальному закону распределения

$$M[m] = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (11.3)$$

Если учесть из бинома Ньютона, что

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} ,$$

то дифференцируя это выражение по p и домножая на p, получим

$$pn(p+q)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m}$$

Учитывая, что $p+q=1$, а справа стоит m_x, получим

$$m_x = n\,p \qquad (12.3)$$

2) Дисперсия

$$\sigma_x^2 = \sum_{m=0}^{n} (m-np) C_n^m q^m p^{n-m} \qquad (13.3)$$

Для вычисления дисперсии рассмотрим i - тый опыт, в котором X_i - число удач. Тогда ряд распределения имеет вид

Таблица 1.3

X_i	0	1
P	1- p	p

В каждом опыте $m_x = 0\cdot(1-p)+1\cdot p = p$. Следовательно, в n опытах математическое ожидание равно

$$m_x = n\,p$$

Дисперсия при проведении одного опыта равна

$$D[X] = \sum_{i=1}^{2} (X_i - m_x)^2 p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{2} X_i^2 p_i - m_x^3 = 0^2(1-p)+1^2 p - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = p\,q$$

Следовательно, при проведении n опытов дисперсия равна

$$D[X] = n\,p\,q \qquad (14.3)$$

3) **СКВО** при биномиальном распределении равно

$$\sigma_x = \sqrt{n\,p\,q} \qquad (15.3)$$

Пример 4.3 При игре в «орлянку» монету бросили 100 раз. При этом герб выпал 75 раз. Доказать, что монету бросал жулик.

Решение. Находим математическое ожидание и дисперсию в виде

$$m_x = np = 100\cdot 0{,}5 = 50 \text{ , а } \sigma_x = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5} = 5$$

Следовательно, разброс должен находится в пределах

$$45 < m_x < 55 .$$

3. Распределение Пуассона

Предположим, что событие А (удача) редкое, то есть вероятность p этого события А очень мала. В этом случае используется формула для вероятности редких событий. Число опытов n велико, p – мало.

Вывод формулы вероятности редких явлений получается из формулы Бернулли для повторяющихся опытов:

$$P_{n,m} = C_n^m p^m q^{n-m} = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!m!} p^m (1-p)^{n-m} =$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2).....(n-m+1)}{m!} p^m (1-p)^{n-m} = \frac{n^m (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}).....(1-\frac{m-1}{n})}{m!} p^m (1-p)^{n-m}$$

При $n \to \infty$, малом р и учёте $m_x = np$ получается

$$P_{n,m} = \frac{(n\,p)^m}{m!}(1-p)^{n-m} = \frac{{m_x}^m}{m!}(1-p)^{n-m}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{{m_x}^m}{m!} \frac{(1-\frac{m_x}{n})^n}{(1-\frac{m_x}{n})^m} = \frac{{m_x}^m}{m!} \lim_{n\to\infty} (1-\frac{m_x}{n})^n = \frac{{m_x}^m}{m!} e^{-m_x}$$

Отсюда получается **закон Пуассона** распределения числа «удач»

$$P_m = \frac{{m_x}^m}{m!} e^{-m_x} \qquad (16.3)$$

Применение. Применяется эта формула в экономике, в статистических вопросах физики и т.п.
Пример 5.3 В цехе 800 станков. Вероятность аварии для каждого станка равна p = 0,005.
Найти: 1) вероятность того, что за смену произойдёт ровно 4 аварии,.
2) вероятность того, что за смену будет не больше 8 аварий.
Решение. Необходимо найти математическое ожидание

$$m_x = np = 800 \cdot 0{,}005 = 4$$

1). $P_4 = \frac{4^4}{4!} e^{-4} \approx 0{,}195$

2) $P_{m\le 8} = P_o + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 \approx 0{,}979$

Такие вычисления, какие требуются, чтобы ответить на второй вопрос, слишком громоздкие, поэтому существуют таблицы функции $Q(m,a) = 1 - P(m,a)$, где a – это математическое ожидание. Имея такие таблицы, для ответа на второй вопрос берётся величина

$$P_{m\le 8} = P_o + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 + P_7 + P_8 =$$
$$= 1 - Q(8{,}4) = 1 - 0{,}0214 \approx 0{,}979$$

Замечание 4.3 Таблицы функций $Q(m,a)$ есть в книге Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров 1983 Прикладные задачи теории вероятностей. М. Радио и связь. 416 с.

Числовые характеристики случайной величины, распределённой по закону Пуассона

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \qquad (17.3)$$

Пусть дан закон распределения

Таблица 2.3

X	0	1	2	3	….	m
P	p_o	p_1	p_2	p_3		p_m

1) Сумма всех вероятностей, когда $0 \le m \le \infty$, равна

$$\sum_{m=0}^{\infty} p_m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} (1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + ...) = e^{-a} e^a = 1$$

2) **Математическое ожидание** m_x совпадает с a. Докажем это

$$m_x = \sum_{m=0}^{\infty} m\, p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{m!} =$$

$$= e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n a}{n!} = e^{-a} e^a a = a$$

т.е.

$$m_x = a \tag{18.3}$$

3) Дисперсия D_x

$$D_x = \sum_{m=0}^{\infty} (m - m_x)^2 p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 p_m - m_x^2$$

Рассмотрим интеграл

$$\sum_{m=0}^{\infty} m^2 p_m = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{a^m}{m!} e^{-a} = a \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} = a \sum_{m=1}^{\infty} [(m-1)+1] \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} =$$

$$= a \sum_{m=1}^{\infty} (m-1) \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} + a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} e^{-a} = a^2 + a$$

Тогда

$$D_x = a^2 + a - a^2 = a,$$

т.е.

$$D_x = a \tag{19.3}$$

Получилось, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины , подчинённой закону Пуассона, равны между собой

$$m_x = D_x \tag{20.3}$$

Замечание 5.3 Такое равенство присуще **только закону Пуассона.**

Пример 6.3 Электронная лампа работает исправно в течение случайного времени T, распределённого по показательному закону:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & \text{если } t \ge 0 \end{cases}$$

По истечении времени T лампа выходит из строя, после чего её немедленно заменяют новой. Найти вероятность того, что за время τ: а) лампу не придётся заменять; б) лампу придётся заменять ровно три раза; в) лампу придётся заменять не меньше трёх раз.

Решение. Отказы ламп образуют простейший поток с плотностью λ. Математическое ожидание числа отказов X за время τ равно $a = \lambda\tau$

а) $P_0 = e^{-\lambda\tau}$; б) $P_3 = \dfrac{(\lambda\tau)^3}{3!} e^{-\lambda\tau}$;

в) $R_3 = 1 - (P_0 + P_1 + P_2) = 1 - e^{-\lambda\tau}[1 - \lambda\tau - \dfrac{(\lambda\tau)^2}{2})]$.

Пример 7.3 Искусственный спутник Земли, движущийся по своей орбите в течение n суток, может случайным образом сталкиваться с метеоритом. Метеориты, пересекающие орбиту и сталкивающиеся со спутником, образуют пуассоновский поток с плотностью λ (метеоритов в сутки). Метеорит, попавший в спутник, пробивает его оболочку с вероятностью p_o. Метеорит, пробивший оболочку, с вероятностью p_1 выводит из строя аппаратуру спутника. Найти вероятности следующих событий:
А – за время полёта спутника его оболочка будет пробита;
В – за время полёта спутника его аппаратура будет выведена из строя;
С – за время полёта спутника будет пробита только оболочка спутника, а аппаратура будет действовать.

Решение. Математическое ожидание числа метеоритов, пробивающих оболочку: $a_0 = \lambda\, n\, p_0$. Математическое ожидание числа метеоритов, пробивающих оболочку и поражающих аппаратуру: $a_1 = \lambda\, n\, p_1 p_o$.

$$P(A) = 1 - e^{-a_o} = 1 - e^{-\lambda n p_o};$$

$$P(B) = 1 - e^{-a_1} = 1 - e^{-\lambda n p_1 p_o};$$

$$P(C) = P(A) - P(B) = e^{-\lambda n p_1 p_o} - e^{-\lambda n p_o}.$$

Пример 8.3 При работе некоторого прибора в случайные моменты времени возникают неисправности. Время Т работы прибора от его включения до возникновения неисправности распределено по показательному закону с параметром λ:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & при \;\; t < 0 \\ \lambda e^{-\lambda t}, & при \;\; t \ge 0 \end{cases}$$

При возникновении неисправности она мгновенно обнаруживается , и прибор поступает в ремонт. Ремонт продолжается время t_o, после чего прибор снова включается в работу.

Найти плотность распределения $f^*(t)$ и функцию распределения $F^*(t)$ промежутка времени Т* между двумя соседними неисправностями. Найти его математическое ожидание и дисперсию. Найти вероятность того, что время Т* будет больше $2t_o$.

Решение. . $T^* = T + t_o$

$$f^*(t) = \begin{cases} 0, & при \;\; t < t_o \\ \lambda e^{-\lambda(t - t_o)}, & при \;\; t > t_o \end{cases},$$

$$F^*(t) = \begin{cases} 0, & при \;\; t < t_o \\ 1 - e^{-\lambda(t - t_o)}, & при \;\; t > t_o \end{cases},$$

$$M[T^*] = \frac{1}{\lambda} + t_o; \quad D[T^*] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

$$P(T^* > 2t_o) = 1 - F^*(2t_o) = e^{-\lambda t_o}.$$

Пример 9.3 (для самостоятельного решения).

При работе ЭВМ время от времени возникают сбои. Поток сбоев можно считать простейшим. Среднее число сбоев за сутки равно 1,5. Найти вероятность следующих событий:
А – за двое суток не будет ни одного сбоя;
В – в течение суток произойдёт хотя бы один сбой;
С - за неделю работы машины произойдёт не менее трёх сбоев.

Ответ: $P(A) = 0{,}050; \quad P(B) = 0{,}777; \quad P(C) = 0{,}998.$

Функция надёжности

Определение 3.3 **Элементом** называют некоторое устройство, независимо от того, «простое» оно или «сложное».

Пусть элемент начинает работать в момент времени $t_o = 0$, а в момент t происходит отказ. Обозначим через T непрерывную случайную величину – длительность времени безотказной работы элемента, а через λ - интенсивность отказов (средне число отказов в единицу времени).

Часто длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение, функция распределения которого

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (\lambda > 0)$$

определяет **вероятность отказа** элемента за время длительностью t.

Определение 4.3 **Функцией надёжности** $R(t)$ называют функцию, определяющую **вероятность безотказной работы** элемента за время длительностью t

Пример 10.3 Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-0,01t}$ $(t > 0)$. Найти вероятность того, что за время длительностью $t = 50$ часов: а) элемент откажет; б) элемент не откажет.

Решение. а) Так как функция распределения $F(t) = 1 - e^{-0,01t}$ определяет вероятность отказа элемента за время длительностью t, то подставив $t = 50$ в функцию распределения, получим вероятность отказа:

$$F(50) = 1 - e^{-0,01 \cdot 50} = 1 - e^{-0,5} = 1 - 0,606 = 0,394.$$

б) получим вероятность события, состоящего в безотказной работе элемента, что представляет собой событие, противоположное событию «отказа элемента». Тогда

P(безотказной работы за 50 часов) = 1 – 0,394 = 0,606.

Замечание 6.3 Этот же результат можно получить непосредственно, пользуясь формулой надёжности $R(t) = e^{-\lambda t}$, которая определяет вероятность безотказной работы элемента за время длительностью t:

$$R(50) = e^{-0,01 \cdot 50} = e^{-0,5} = 0,606$$

Пример 11 3 (для самостоятельного решения) Испытывают два независимо работающих элемента. Вероятность безотказной работы первого элемента $F_1(t) = 1 - e^{-0,02t}$, второго - $F_2(t) = 1 - e^{-0,05t}$. Найти вероятность того, что за время длительностью 6 часов: а) оба элемента откажут; б) оба элемента не откажут; в) только один элемент откажет; г) хотя бы один элемент откажет.

Ответы: а) 0,03; б) 0,66; в) 0,31; г) 0,34.

4. Нормальный закон распределения

Если на случайную величину действует много разных факторов, то при большом их числе суммарное влияние подчиняется нормальному закону. Например, при многократном взвешивании монеты каждый раз получается немного разный результат. Это объясняется влиянием температуры, влажности, движением воздуха и т. п.

Нормальное распределение – это наиболее часто встречающееся распределение. Этому закону подчиняется целый класс случайных величин, называемых ошибками измерения.

Кроме того, в некоторых предельных случаях биномиальное распределение и распределение Пуассона приближаются к нормальному. Ляпунов доказал теорему о том, что если случайная величина представляет собой сумму бесконечного числа случайных величин, то она распределяется по нормальному закону, независимо от распределения слагаемых.

Определение 5.3 О случайной величине X говорят, что она распределена по **нормальному** закону, если её плотность распределения вероятности имеет вид

$$f(x) = C\,e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

В этой зависимости 3 параметра , но плотность должна подчиняться условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

из которого можно определить С.

Лемма. Интеграл Эйлера – Пуассона имеет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \sqrt{2\pi}$$

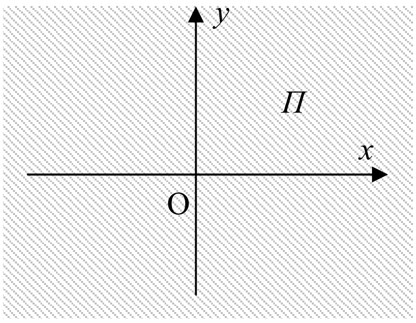


Рис. 4.3 Безграничная плоскость

Доказательство. Запишем этот интеграл в виде

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \quad \text{и} \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy$$

Перемножим эти интегралы и получим двойной интеграл по плоскости П в виде:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy \quad .$$

Этот интеграл легко перевести в систему полярных координат

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}}\rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{0}^{2\pi} d\varphi \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\left(\frac{\rho^2}{2}\right) = -2\pi e^{-\frac{\rho^2}{2}}\Bigg|_{0}^{\infty} = 2\pi$$

Отсюда $I^2 = 2\pi$, откуда $I = \sqrt{2\pi}$, ч.т.д.

Используя эту лемму, определим константу C

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

делаем замену переменной $t = \dfrac{x-m}{\sigma}, \quad x = m + t\sigma, \quad dx = \sigma\, dt$. Тогда

$$1 = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\sigma\, dt = C\sigma\sqrt{2\pi}$$

Отсюда

$$C = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Нормальный закон распределения имеет плотность в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \qquad (21.3)$$

Замечание 7.3 При любых значениях m и σ это выражение является плотностью распределения.

Кривая Гаусса

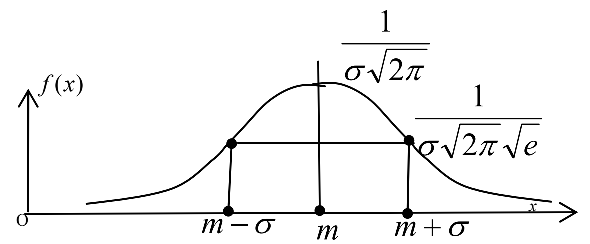


Рис. 5.3 Плотность распределения

Для построения кривой необходимо выполнить полный анализ функции (21.3) , но мы ограничимся только тем, что найдём экстремум и точки перегиба по её уравнению.

Определение **экстремума**

Производная плотности распределения равна

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} [-\frac{1}{2\sigma^2} 2(x-m)]$$

Она равна нулю только в точке

$$x = m. \qquad (22.3)$$

Для определения *точек перегиба* необходимо получить вторую производную:

$$f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} + e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} [-\frac{1}{\sigma^2}(x-m)^2] \right\} = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{(x-m)^2}{\sigma^2} \right]$$

Отсюда, когда $f''(m) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} < 0$, то в точке $x = m$ имеется максимум, который равен

$$f(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \qquad (23.3)$$

Две точки перегиба определяются из уравнения $1-(x-m)^2/\sigma^2 = 0$, то есть, они находятся в точках

$$x = m \pm \sigma. \qquad (24.3)$$

Вероятностный смысл параметров m и σ

Определение **математического ожидания**

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (m+t\sigma) e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma\, dt =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} m e^{-\frac{t^2}{2}} d t + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} d t \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[m\sqrt{2\pi} \right] = m$$

Здесь второй интеграл в квадратной скобке равен нулю, интеграл от нечётной функции в симметричных пределах. Отсюда

$$m_x = m. \qquad (25.3)$$

Дисперсия

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma^3\, dt = \sigma^2$$

а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = -t e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$

б) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} \Bigg| \quad \lim_{t\to\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{\frac{t^2}{2}}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t e^{\frac{t^2}{2}}} = 0.$

Отсюда $$D_x = \sigma^2 \qquad (26.3)$$

Тогда СКВО $\sigma_x = \sigma$.

Функция распределения случайной величины, подчиняющейся нормальному закону

Функция распределения непрерывной случайной величины определяется по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

где $f(t)$ - плотность распределения, которая в данном случае равна

$$. \ f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Тогда

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt$$

Делается подстановка

$$z = \frac{t-m}{\sigma}, \quad t = m + \sigma z, \quad dt = \sigma\, dz.$$

Тогда

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}\sigma\, dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz+\int_{0}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz\right].$$

Здесь первый интеграл равен половине интеграла Эйлера – Пуассона, поэтому получается

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi_o\left(\frac{x-m}{\sigma}\right) \qquad (27.3)$$

где

$$\Phi_o\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \qquad (28.3)$$

или

$$\Phi^*\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-m}{\sigma}} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \qquad (29.3)$$

Определение 6.3 Функции $\Phi_o(u)$ и $\Phi^*(u)$ называются функциями Лапласа или интегралами вероятности.

Свойства функции Лапласа $\Phi_o(u)$

$$\Phi_o(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{u} e^{-\frac{z^2}{2}}dz \qquad (30.3)$$

Свойство 1.3 Функция $\Phi_o(u)$ является возрастающей функцией своего аргумента u.

Доказательство: возьмём первую производную

$$\frac{d\Phi_o(u)}{du}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}>0,$$

а из математического анализа известно, что если первая производная положительна на некотором интервале, то график функции возрастает на этом интервале.

Свойство 2.3 Функция $\Phi_o(u)$ является нечётной функцией

$$\Phi_o(-u)=-\Phi_o(u). \qquad (31.3)$$

Доказательство: для доказательства в интеграле

$$\Phi_o(-u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{-u} e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

поменяем направление оси интегрирования . Тогда

$$\Phi_o(-u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{-u} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{u} e^{-\frac{(-z)^2}{2}}(-dz)=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{u} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=-\Phi_o(u),$$

что и требовалось доказать.

Свойство 3.3 В начале координат функция Лапласа равна нулю $\Phi_o(0)=0$.

Доказательство:

$$\Phi_o(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{0} e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0, \qquad (32.3)$$

как определённый интеграл с равными пределами интегрирования.

Свойство 4.3 На бесконечности функция Лапласа стремится к $\frac{1}{2}$.

Доказательство: Входящий в функцию Лапласа интеграл равен половине интеграла Эйлера - Пуассона

$$\Phi_o(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{1}{2}, \text{ ч.т.д.} \qquad (33.3)$$

Свойство 5.3 На минус бесконечности функция Лапласа стремится к $-\frac{1}{2}$.

Доказательство: Для доказательства используется свойство 2 функции Лапласа, то есть,

$$\Phi_o(-\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2\pi} = -\frac{1}{2}, \text{ ч.т.д.} \quad (34.3)$$

На основании полученных свойств можно построить график.

График функции Лапласа

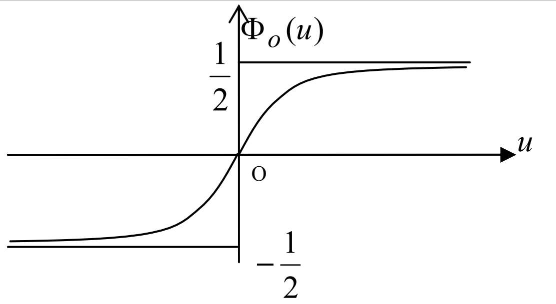


Рис.6.3 График функции $\Phi_o(u)$

Замечание 8.3. При $u = 3$ значение функции Лапласа $\Phi_o(3) = 0{,}4987$ (почти 0,5).

Замечание 9.3 При $u = 3{,}891$ значение функции Лапласа $\Phi_o(3{,}891) = 0{,}4999 \approx 0{,}5$.

Функция Лапласа табулирована и даётся, как правило, во всех учебниках и задачниках, а также имеется в расчётных программах для ЭВМ.

Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины на заданный отрезок (a, b)

Для решения этой задачи определяется $p(a \le x \le b) = F(b) - F(a)$

В нашем случае

$$F(b) = \frac{1}{2} + \Phi_o(\frac{b-m}{\sigma}), \text{ а } F(a) = \frac{1}{2} + \Phi_o(\frac{a-m}{\sigma}).$$

Отсюда

$$P(a \le X \le b) = F(b) - F(a) = \frac{1}{2} + \Phi_o(\frac{b-m}{\sigma}) - \frac{1}{2} - \Phi_o(\frac{a-m}{\sigma}).$$

Откуда

$$P(a \le X \le b) = \Phi_o(\frac{b-m}{\sigma}) - \Phi_o(\frac{a-m}{\sigma}). \qquad (35.3)$$

Замечание 10.3 Математическое ожидание и СКВО полностью определяют величину вероятности случайной величины, подчиняющейся нормальному закону распределения.

Вероятность отклонения случайной величины от её математического ожидания

Рассмотрим частный случай, когда отрезок $[a,b]$ симметричен относительно математического ожидания

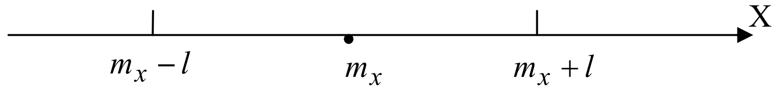


Рис. 7.3 Отклонение случайной величины

Используя формулу (35.3), получим

$$P(m_x - l \le X \le m_x + l) = \Phi_o(\frac{l}{\sigma}) - \Phi_o(-\frac{l}{\sigma}). = 2\Phi_o(\frac{l}{\sigma}) \qquad (36.3)$$

или

$$P(|X - m_x| < l) = 2\Phi_o(\frac{l}{\sigma}) \qquad (36'.3)$$

Определение 7.3 Величина $X - m_x$ называется отклонением случайноё величины.

Вывод: вероятность того, что отклонение случайной величины не превосходит l , равна удвоенной величине функции Лапласа.

Правило «сигмы»

В двух третьих случаев отклонение случайной величины не превосходит по абсолютной величине СКВО.

Доказательство:

$$P(|X - m_x| < \sigma) = 2\Phi_o(\frac{\sigma}{\sigma}) = 2\Phi_o(1) \cong 2 \cdot 0{,}3413 \approx 0{,}683 \approx \frac{2}{3}$$

Правило «трёх сигм»

Практически достоверно, что отклонение случайной величины не превосходит по абсолютной величине 3σ.

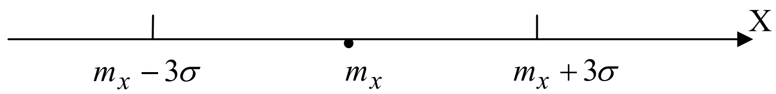


Рис. 8.3

Доказательство:

$$P(|X - m_x| < 3\sigma) = 2\Phi_o(\frac{3\sigma}{\sigma}) = 2\Phi_o(3) \cong 2 \cdot 0{,}4987 \approx 1$$

Если вероятность события равна единице, то оно достоверно, ч.т.д.

Вероятностное отклонение случайной величины

Определение 8.3 Число E называется вероятностным отклонением случайной величины, если оно удовлетворяет следующему условию:

$$P(|X - m_x| \le E) = \frac{1}{2} \qquad (37.3)$$

В этом случае совершенно очевидно, что также $P(|X-m_x|\ge E)=\dfrac{1}{2}$.

Замечание 11.3 Вследствие этих двух неравенств отклонение, равное E, называют **срединным** отклонением.

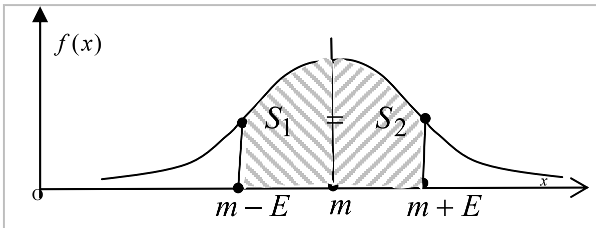


Рис. 9.3 Срединное отклонение

Замечание 12.3 Если случайная величина X является ошибкой измерения, то E – **срединная** ошибка.

Замечание 13.3 Эта характеристика приводится в паспортах приборов.

Связь срединного отклонения E со СКВО

Рассмотрим неравенство

$$P(|X-m_x|\le E)=2\Phi_o(\frac{E}{\sigma})=\frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\Phi_o(\frac{E}{\sigma})=\frac{1}{4}$$

Это уравнение имеет единственное решение

$$u_o=\frac{E}{\sigma}=0{,}6745,$$

откуда

$$E=0{,}6745\sigma \qquad (38.3)$$

Замечание 14.3 Иногда обозначают так:

$$u_o=\sqrt{2}\rho$$

тогда

$$\rho\approx 0{,}477$$

и

$$E=\rho\sqrt{2}\,\sigma \qquad (39.3)$$

Замечание 15.3 Эта формула указывает на линейную зависимость между Е и σ. Следовательно, Е тоже является характеристикой разброса возможных значений случайной величины относительно математического ожидания.

Пример 12.3 Отклонение диаметра шарика подшипника определяет диапазон случайной величины, найденный в результате опытов, равно $\approx 2{,}5$ микрона. Найти СКВО.

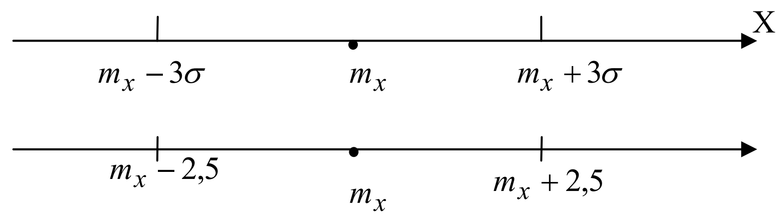


Рис. 10.3 К примеру 12.3

Решение. По условию задачи значения отклонений определяются так

Из рисунка 10.3 видно, что $3\sigma = 2{,}5$. Следовательно, СКВО равно $\sigma = \frac{2{,}5}{3} = \frac{5}{6}$.

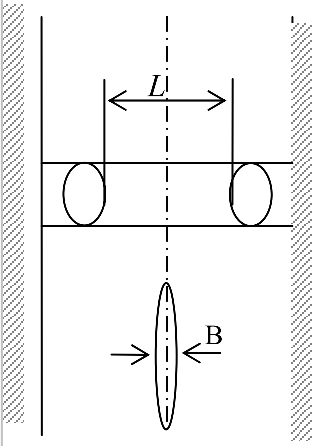


Рис. 11.3 К примеру 13.3

Пример 13.3 Рассматривается движение судна по реке. Судно должно двигаться прямо, но при этом возможны отклонения вследствие

1) систематических ошибок;
2) грубых промахов;
3) случайной ошибки, на которую влияют мелкие неисправности самого судна, течение и ветер, личные особенности судоводителя.

Навигационные ошибки движения подчиняются нормальному закону. При этом математическое ожидание всегда равно нулю, СКВО принимается $\sigma = 5$ м. Ширина судна В = 6 м, Расстояние между быками моста $L = 30$ м. Найти вероятность безопасного прохождения судном этого участка пути.

Решение. Диапазон безошибочного прохождения
$-12 < X < 12$

Отсюда

$$P(-12 < X < 12) = P(|X| < 12) = 2\Phi_o(\frac{12}{5}) = 2 \cdot 0{,}4918 = 0{,}9836$$

Пример 14.3 Опытом установлено, что ошибка прибора для измерения дальности подчиняется нормальному закону со срединной ошибкой Е = 10 м. Определить вероятность того, что определённая этим прибором дальность будет отклоняться от истинной не более, чем на 15 м.
Решение. Отклонение от математического ожидания $X - m_x = 15$, Е = 10.

Учитывая связь с СКВО, получим

$$\sigma = \frac{E}{0{,}6745} = 14{,}85$$

$$P(-15 < X < 15) = P(|X| < 15) = 2\Phi_o(\frac{15}{14{,}85}) = 2 \cdot 0{,}3437 \cong 0{,}69$$

Есть таблицы для $\hat{\Phi}\left(\frac{X}{E}\right)$. Тогда $P(-15 < X < 15) = \hat{\Phi}\left(\frac{15}{10}\right) = \hat{\Phi}(1{,}5) \cong 0{,}6883$

Формулы Муавра – Лапласа

Если в схеме Бернулли, наряду с числом испытаний n, велики также np и nq, то следует применять **локальную** и **интегральную** формулы Муавра – Лапласа.. При этом **локальную** формулу Муавра – Лапласа, как следует из самого названия, необходимо применять в том случае, когда нас интересует **вероятность получить ровно** m успехов в n испытаниях, а **интегральную** – если определяется **вероятность числа успехов, заключённых в пределах от** m_1 **до** m_2 **.**

Замечание 16.3. Как и теорема Пуассона, локальная и интегральная формулы Муавра – Лапласа приводится к «инженерной» трактовке.

Локальная теорема Муавра- Лапласа. Если вероятность p появления события А в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность P_n того, что событие А появится в n испытаниях ровно m раз , приближённо равна (тем точнее, чем больше n) значению функции (локальная формула Муавра – Лапласа)

$$P_n(m) \approx \varphi(x) \Big/ \sqrt{npq}\,, \tag{40.3}$$

где

$$x = (m - np) \Big/ \sqrt{npq}\,, \tag{41.3}$$

а

$$\varphi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \Big/ \sqrt{2\pi}\,. \tag{42.3}$$

Замечание 2. Одно из первых доказательств теоремы было основано на формуле Стирлинга

$$n!e^n n^{-n}(2\pi n)^{-\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\to} 1 \text{ .или } \quad n! \approx \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n} \tag{43.3}$$

Доказательство. Считая, что n и $n-m$ достаточно велики, и подставляя в формулу Бернулли вместо $n!, m!$ и $(n-m)!$ их приближённые значения, вычисленные по формуле Стирлинга, получим из $P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$

$$P_n(m) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m} \approx\approx \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n} \cdot \frac{e^m}{m^m\sqrt{2\pi m}} \cdot \frac{e^{n-m}}{(n-m)^{n-m}\sqrt{2\pi(n-m)}} p^m q^{n-m}$$

С учётом равенства $\dfrac{e^m e^{n-m}}{e^n} = 1$, получим

$$P_n(m) \approx \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi(n-m)}\sqrt{2\pi m}\cdot m^m(n-m)^{n-m}} p^m q^{n-m} = \frac{p^m q^{n-m} n^n}{m^m (n-m)^{n-m}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{m(n-m)}}$$

Введя обозначение

$$A = \frac{p^m q^{n-m} n^n}{m^m (n-m)^{n-m}} \tag{44.3}$$

и умножая числитель и знаменатель на $\sqrt{npq}$, получим

$$P_n(m) \approx \frac{A}{\sqrt{npq}\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n^2 pq}{m(n-m)}} \tag{45.3}$$

Для определения А логарифмируют выражение (5). Тогда

$$\ln A = m\ln p + (n-m)\ln q + n\ln n - m\ln m - (n-m)\ln(n-m) =$$

$$= m\ln\frac{p}{m} + (n-m)\ln\frac{q}{n-m} + [(n-m)+m]\ln n = m\ln\frac{pn}{m} + (n-m)\ln\frac{qn}{n-m}$$

Учитывая (2), то есть, $x = (m-np)\Big/\sqrt{npq}$, отсюда $m = np + x\sqrt{npq}$. Подставляя $p = 1-q$, получим $m = n - nq + x\sqrt{npq}$, а отсюда $n - m = nq - x\sqrt{npq}$.

Подставляя в $\ln A$, имеем

$$\ln A = m\ln\frac{pn}{m} + (n-m)\ln\frac{qn}{n-m} = -\left\{(np + x\sqrt{npq})\ln\frac{m}{pn} + (nq - x\sqrt{npq})\ln\frac{n-m}{qn}\right\}.$$

Итак

$$\ln A = -\left\{(np + x\sqrt{npq})\ln\left(1 + x\sqrt{\frac{q}{np}}\right) + (nq - x\sqrt{npq})\ln\left(1 - x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\right\} \tag{46.3}$$

Поскольку при больших n корни $\sqrt{q/(np)}$ и $\sqrt{p/(nq)}$ малы. Разложим логарифмы в ряд Маклорена $f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots$ по степеням x до второго порядка. Тогда

$$\ln\left(1+x\sqrt{\frac{q}{np}}\right)\approx\sqrt{\frac{q}{np}}x-\frac{q}{np}\frac{x^2}{2}\ldots \quad \text{и} \quad \ln\left(1-x\sqrt{\frac{p}{nq}}\right)\approx -x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{p}{nq}$$

Учитывая, что $m/(np)\approx 1$ и $(n-)m/(nq)\approx 1$ при фиксированном x и больших n, из (7) получим

$$\ln A\approx-\left\{(np+x\sqrt{npq})\left(x\sqrt{\frac{q}{np}}-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{q}{np}\right)+(nq-x\sqrt{npq})\cdot\left(-x\sqrt{\frac{p}{nq}}-\frac{x^2}{2}\cdot\frac{p}{nq}\right)\right\} \tag{47.3}$$

$$\approx-\frac{x^2}{2}(p+q)=-\frac{x^2}{2}$$

Следовательно,

$$A\approx e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{48.3}$$

Наконец, учитывая, что $m/(np)\approx 1$ и $(n-)m/(nq)\approx 1$ при фиксированном x и больших n, получаем

$$\sqrt{\frac{n^2pq}{m(n-m)}}\approx 1, \tag{49.3}$$

и получаем формулу (1), то есть, утверждение теоремы доказано.

Интегральная теорема Муавра- Лапласа

Если в схеме Бернулли число испытаний n велико, то для вероятности $P(m_1\le\mu\le m_2)$ того, что число успехов μ заключено в пределах m_1 до m_2, справедливо приближённое соотношение (интегральная формула Муавра – Лапласа)

$$P(m_1<\mu<m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1) \tag{50.3}$$

где

$$x_1=(m_1-np)\big/\sqrt{npq},\ x_2=(m_2-np)\big/\sqrt{npq} \tag{51.3}$$

$$\Phi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \tag{52.3}$$

Замечание 19.3 Доказательство основано на локальной теореме Муавра – Лапласа.

Основные формулы нормального распределения случайной величины – это плотность распределения $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ и функция Лапласа. $\Phi_O(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^u e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

Эти формулы Муавр применяет к случаю повторяющегося опыта, когда математическое ожидание равно np, а дисперсия равна - npq (СКВО $=\sqrt{npq}$). Для вывода интегральной формулы рассматривается малая окрестность точки *x,* где $x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$, что позволяет использовать локальную формулу Муавра – Лапласа, тогда в качестве плотности распределения принимается функция $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. График этой функции показан на рисунке 7.3

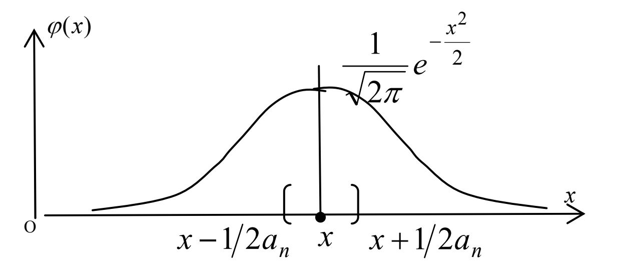


Рис. 12.3 График функции $\varphi(x)$

Рассматривается выражение

$$\varphi(x)-a_n\int\limits_{x-1/(2a_n)}^{x+1/(2a_n)}\varphi(y)\,dy\,. \qquad (53.3)$$

В качестве пределов интегрирования выбираются границы окрестности точки x, которые при $n\to\infty$ стремятся к нулю, то есть стремятся к точке x слева и справа.

Замечание 20.3 К интегралу применяется **теорема о среднем** *Если подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка «с», для которой справедлива формула*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=f(c)\cdot(b-a)$$

Применение этой формулы к интегралу формулы (53.3) даёт

$$\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_n\int\limits_{x-1/(2a_n)}^{x+1/(2a_n)}\varphi(y)dy=\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_n(x+1/[2a_n)-x+1/(2a_n)]\cdot e^{-\frac{x_c^2}{2}}=$$

$$=\varphi(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}a_n\cdot 1/a_n[e^{-\frac{x_c^2}{2}}]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}[e^{-\frac{x^2}{2}}-e^{-\frac{x_c^2}{2}}]$$

При $n\to\infty$ выражение в квадратной скобке стремится к нулю, так как точка $x_c\to x$.

Поэтому, полагая $a_n=\sqrt{npq}$, из локальной теоремы Муавра – Лапласа находим

$$P_n(m)=\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)+o(\frac{1}{\sqrt{n}})=\int\limits_{x-1/(2a_n)}^{x+1/(2a_n)}\varphi(y)dy+o(\frac{1}{\sqrt{n}}), \qquad (54.3)$$

где $x=(m-np)/\sqrt{npq}$.

Замечание 21.3 Здесь использована теорема о том, что приращение функции равно дифференциалу плюс бесконечно малая функция $\Delta y=dy+\alpha(x)\cdot\Delta x$. В данном случае бесконечно малая имеет порядок $1/\sqrt{n}$.

Суммируя по всем m от m_1 до m_2, окончательно получим

$$P_n(m_1\le\mu\le m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2}P_n(m)=\int\limits_{x-1/(2\sqrt{npq})}^{x+1/(2\sqrt{npq})}\varphi(y)dy\approx\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(y)dy. \qquad (55.3)$$

Таким образом, утверждение теоремы **доказано**.

Здесь пределы интегрирования равны соответственно

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}}..$$

Замечание 22.3 Эту формулу можно получить непосредственно из формулы (35.3), положив

$$a=m_1,\quad b=m_2,\ m=np,\quad \sigma=\sqrt{npq}$$

Из формулы (35.3) с учётом $\Phi_o(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^u e^{-\frac{z^2}{2}}dz$ и определения функции Лапласа

$\Phi_o(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^u e^{-\frac{z^2}{2}}dz$, а также учитывая формулу (28.3), получают

$$P(m_1 \le x \le m_2) = \Phi_o(\frac{m_2 - m}{\sqrt{npq}}) - \Phi_o(\frac{m_1 - m}{\sqrt{npq}}). = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}}^{\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Откуда

$$P(m_1 \le x \le m_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \text{ ч.т.д.} \qquad (56.3)$$

Замечание 23.3 Интегральную формулу Муавра – Лапласа можно записать так:

$$P(x_1 \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le x_2) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Замечание 24.3 В силу чётности $\varphi(x)$ функция **стандартного нормального** распределения обладает свойством

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x), \qquad (57.3)$$

поэтому в таблицах приводятся значения не $\Phi(x)$, а интеграл Лапласа

$$\Phi_o(x) = \int\limits_0^x \varphi(y) dy \qquad (58.3)$$

и только для положительных значений x. Вспомним, что $\Phi_o(x)$ является нечётной функцией, то есть $\Phi_o(-x) = -\Phi_o(x)$ и, кроме того, $\Phi(x) = \Phi_o(x) + 1/2$.

Замечание 25.3 В терминах интеграла Лапласа **интегральная формула Муавра – Лапласа** имеет вид

$$P_n(m_1 \le \mu \le m_2) = \Phi_o(x_2) - .\Phi_o(x_1) \qquad (59.3)$$

Именно этой формулой пользуются чаще всего.

Замечание 26.3 Распределение Пуассона, плотность и функция стандартного нормального распределения играют в приложениях столь существенную роль, что таблицы их значений содержатся практически в любом справочнике, учебнике или задачнике по теории вероятностей и математической статистике.

Замечание 27.3 Следует помнить, что довольно часто в таблицах приводятся не значения функции стандартного нормального распределения, а значения интеграла Лапласа $\Phi_o(x)$ или даже $\Phi^*(x) = \int\limits_x^\infty \varphi(y) dy = 1 - \Phi(x)$, поэтому, прежде чем пользоваться таблицей, необходимо внимательно посмотреть, значения какой функции приведены в таблице.

Пример 15.3 Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажутся непроверенными от 70 до 100 деталей.

Решение. По условию $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n = 400$, $m_1 = 70$, $m_2 = 100$.

Воспользуемся интегральной формулой Муавра – Лапласа

$$P(a \le X \le b) = \Phi_o\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_o\left(\frac{a-m}{\sigma}\right).$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{-10}{8} = -1{,}25; \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = \frac{20}{8} = 2{,}5$$

Тогда

$$P(m_1 \le x \le m_2) = \Phi_o(x_2) - \Phi_o(x_1) = \Phi_o(2{,}5) - \Phi_o(-1{,}25) =$$
$$= 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$$

Ответ : $P(70 \le x \le 100) = 0{,}8882$

5. Экспоненциальное распределение

Определение 10.3 Случайная величина подчиняется **экспоненциальному** (показательному) закону, если она имеет плотность распределения вида

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x \ge 0 \end{cases} \tag{60.3}$$

где $\lambda > 0$ - параметр экспоненциального распределения.
Функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x \ge 0 \end{cases} \tag{61.3}$$

Графики плотности и функции распределения имеют вид

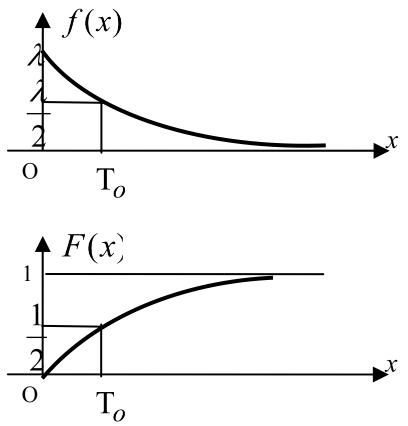


Рис. 13.3 Экспоненциальное распределение

Замечание 28.3 Экспоненциально распределённая случайная величина может принимать **только положительные** значения.

Замечание 29.3 Экспоненциальному распределению случайной величины подчиняется время распада атомов различных элементов.

Замечание 30.3 Число $T = 1/\lambda$ называется средним временем распада.

Замечание 31.3 Период полураспада вводится как $T_o = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$. Название основано на физическом соображении. Пусть вначале имелось n атомов. Через время T_o каждый атом распадается с вероятностью $p = F(T_o) = 1 - e^{-\lambda \frac{ln2}{\lambda}} = 1 - e^{ln\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Поэтому в силу независимости отдельных распадов число распавшихся за время T_o атомов имеет биномиальное распределение с вероятностью $p = q = 1/2$. Но при больших n это число будет равно примерно $n\,p = n/2$, то есть период полураспада T_o представляет собой не что иное, как время , в течение которого распадается половина имеющегося вещества.

Замечание 32.3 Экспоненциально распределённая случайная величина обладает свойством **отсутствия последействия.**

Доказательство: пусть ξ - время распада атома. Рассмотрим событие $A = \{x_1 < \xi < x_1 + x_2\}$ и найдём условную вероятность события А при условии выполнения события $B = \{\xi > x_1\}$. Произведение $AB = A$, поэтому

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)}$$

Рассмотрим вероятности событий А и В по известным формулам $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$.

Тогда

$$P(A) = P(x_1 < \xi < x_1 + x_2) = [1 - e^{-\lambda(x_1 + x_2)}] - [1 - e^{-\lambda\, x_1}] = e^{-\lambda\, x_1}(1 - e^{-\lambda\, x_2})$$

$$P(B) = P(\xi > x_1) = 1 - P(\xi < x_1) = e^{-\lambda\, x_1}$$

Отсюда

$$P(A/B) = \frac{e^{-\lambda\, x_1}(1 - e^{-\lambda\, x_2})}{e^{-\lambda\, x_1}} = (1 - e^{-\lambda\, x_2}) \quad \text{[см. стр. 41)]} \qquad (62.3)$$

Получилось, что **вероятность распада атома за время** x_2 при условии, что перед этим он уже прожил время x_1, совпадает с **безусловной** вероятностью распада того же самого атома за время x_2.. Это свойство и представляет собой **отсутствие последействия** (закон распада атома сохраняется в течение всей его жизни).

.**Замечание 33.**3 **Отсутствие последействия** является характеристическим свойством **экспоненциально** распределённой случайной величины.

Замечание 34.3 **Экспоненциальный** закон тесно связан с распределением **Пуассона.**

Замечание 35.3 Дискретным аналогом экспоненциального распределения является геометрическое распределение.

Математическое ожидание

$$\int_0^\infty x\,f(x)dx = \int_0^\infty x\,\lambda\,e^{-\lambda\,x}dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty (\lambda x)\; e^{-\lambda\,x} d(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}$$

Положим $\lambda\,x = y$ и возьмём по частям полученный несобственный интеграл

$$\int_0^\infty y\; e^{-y}dy = -\lim_{A\to\infty}\int_0^A y\; d\,e^{-y} = -\lim_{A\to\infty} y\,e^{-y}\Big|_0^A + \lim_{A\to\infty}\int_0^A e^{-y}dy = -\lim_{A\to\infty} e^{-y}\Big|_0^A = 1$$

$$\lim_{y\to\infty} y\,e^{-y} = \lim_{y\to\infty}\frac{y}{e^y} = \lim_{y\to\infty}\frac{1}{e^y} = 0$$

Дисперсия

$$D_x = \int_0^{\infty} x^2 f(x)dx - m_x^2 \qquad \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty} (\lambda x)^2 \; e^{-\lambda x} d(\lambda x) = \frac{2}{\lambda^2}$$

Тогда

$$D_x = \int_0^{\infty} x^2 f(x)dx - m_x^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2} \qquad (63.3)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\lambda} \qquad (64.3)$$

Замечание 36.3 В распределении Пуассона математическое ожидание m_x равно дисперсии D_x, а в экспоненциальном распределении математическое ожидание m_x равно СКВО.

Примеры случайной величины, подчиняющейся **экспоненциальному** (показательному) закону.
Пример 16.3 **Время** между падениями метеоритов.
Пример 17.3 **Время** между поступлениями вызовов на телефонной станции.
Пример 18.3 Если **времена** между последовательными наступлениями некоторого события представляют собой независимые **экспоненциально** распределённые (с одним и тем же параметром λ) случайные величины, то **число наступлений** этого события за время t распределяется по **закону Пуассона** с параметром λt.

Пример 19.3 Момент T наступления какого-то события A есть случайная величина, распределённая по показательному закону: $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$. В момент τ стало известно, что событие A ещё не произошло. Найти условную плотность $\varphi(t)$ времени ϑ, которое осталось до наступления события.

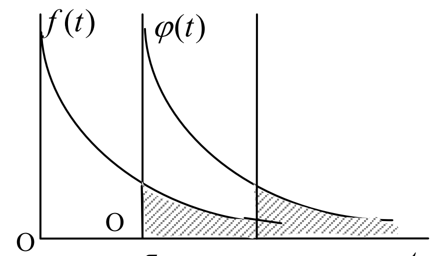


Рис. 14.3 К примеру 19.3

Решение. Наблюдалось событие B = (событие A ещё не наступило до момента τ).

$$P(B) = 1 - \int_0^{\tau} f(t)dt = 1 - \int_0^{\tau} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 + \int_0^{\tau} e^{-\lambda t} d(-\lambda t) = 1 + e^{-\lambda t}\Big|_0^{\tau} = 1 + e^{-\lambda \tau} - 1 = e^{-\lambda \tau}$$

Условная плотность равна

$$f(t/B) = f(t)/P(B) = \lambda e^{-\lambda t} / e^{-\lambda \tau} = \lambda e^{-\lambda (t-\tau)} \quad (t > \tau)$$

Случайная величина $\Theta = T - \tau$ имеет условную плотность $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$, то есть, совпадающую с $f(t)$ (см. рисунок 14.3).

Таким образом, условное распределение времени ϑ, оставшегося до наступления события, при показательном распределении T не зависит от того, сколько времени мы уже ожидали появления события.

Замечание 37.3 Показательное распределение – единственное, обладающее таким свойством.
Замечание 38.3 Интервал времени между двумя соседними событиями в простейшем потоке распределен именно по показательному закону: время, оставшееся до наступления очередного события не зависит от того, сколько времени мы его уже ожидали (это следует из отсутствия последствия в простейшем потоке).

6. Распределение Вейбулла

Определение 11.3 Случайная величина распределена по закону Вейбулла, если она имеет плотность распределения

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0\\ \alpha\beta\, x^{\beta-1}\,e^{-\alpha\, x^{\beta}}, & \text{если } x\ge 0\end{cases}\qquad (\alpha>0,\quad \beta>0). \qquad (65.3)$$

Функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0,\\ 1-e^{-\alpha\, x^{\beta}}, & \text{если } x\ge 0.\end{cases} \qquad (66.3)$$

Замечание 39.3 Распределение Вейбулла является **двухпараметрическим** (параметры α .и β)

Замечание 40.3 Для представления распределения Вейбулла нужно задавать заранее параметры α .и β

Математическое ожидание

$$\int_0^{\infty} x\,f(x)dx=\int_0^{\infty} x\,\alpha\beta\, x^{\beta-1}\,e^{-\alpha\, x^{\beta}}\,dx==-\lim_{A\to\infty}\int_0^{A} x\,e^{-\alpha\, x^{\beta}}\,d(-\alpha\, x^{\beta})=$$

$$=-\lim_{A\to\infty}\int_0^{A} x\,de^{-\alpha\, x^{\beta}}=-\lim_{A\to\infty}\left[xe^{-\alpha\, x^{\beta}}\Big|_0^{A}+\int_0^{A} e^{-\alpha\, x^{\beta}}\,dx\right]=\frac{1}{\beta}\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma(1/\beta) \qquad (67.3)$$

где учтено, что $\lim\limits_{A\to\infty} xe^{-\alpha\, x^{\beta}}\Big|_0^{A}=\lim\limits_{A\to\infty} Ae^{-\alpha\, A^{\beta}}-0=\lim\limits_{A\to\infty}\dfrac{A}{e^{-\alpha\, A^{\beta}}}=0$

(Интеграл взят из справочника И.С. Градштейна и И.М. Рыжика **3.478**)

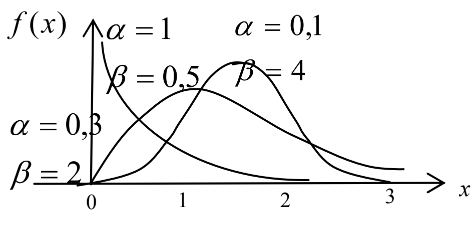
Дисперсия

$$\int_0^{\infty} x^2\,f(x)dx-m_x^2=\frac{2}{\beta}\alpha^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma(1/\beta)-\frac{1}{\beta^2}\alpha^{-\frac{2}{\beta}}\Gamma^2(1/\beta)$$

$$\int_0^{\infty} x^2\,\alpha\beta\, x^{\beta-1}\,e^{-\alpha x^{\beta}}\,dx==-\lim_{A\to\infty}\int_0^{A} x^2\,e^{-\alpha x^{\beta}}\,d(-\alpha\, x^{\beta})=$$

$$=-\lim_{A\to\infty}\int_0^{A} x^2\,de^{-\alpha x^{\beta}}=-\lim_{A\to\infty}\left[x^2\,e^{-\alpha x^{\beta}}\Big|_0^{A}+2\int_0^{A} x\,e^{-\alpha x^{\beta}}dx\right]$$

(68.3)



Графики плотности распределения и функции распределения Вейбулла

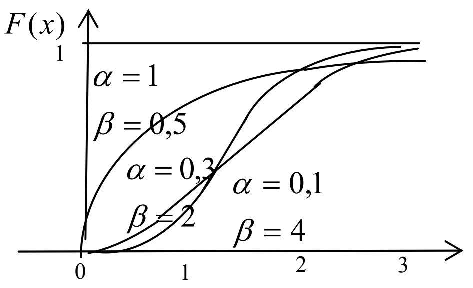


Рис. 15.3 Распределения Вейбулла

Замечание 41.3 Закону Вейбулла подчиняется время безотказной работы многих технических устройств.

Замечание 42.3 Если $\beta = 1$, то распределение Вейбулла переходит в **экспоненциальное** распределение.

Замечание 43.3 Если $\beta = 2$, то распределение Вейбулла переходит в распределение **Рэлея.**

7. Гамма – распределение

Определение 12.3 Гамма – распределением называется случайная величина, плотность распределения которой равна

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \dfrac{\lambda^{\gamma} x^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} e^{-\lambda x}, & \text{если } x \geq 0 \end{cases} \qquad (\lambda > 0, \quad \gamma > 0). \qquad (69.3)$$

где $\Gamma(\gamma) = \int\limits_0^{\infty} x^{\gamma-1} e^{-x} dx$ - гамма-функция Эйлера.

Замечание 44.3 Следующие свойства гамма - функции

$$\Gamma(\gamma+1) = \gamma\,\Gamma(\gamma), \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

являются полезными при изучении гамма – распределения.

Графики плотности и функции гамма – распределения

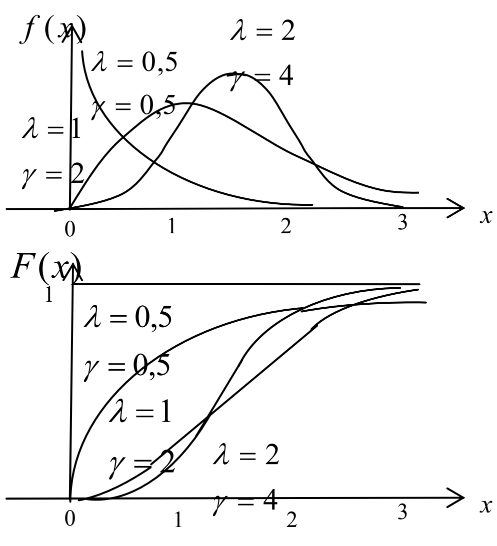


Рис16.3 Гамма - распределение

Замечание 45.3 Распределение Вейбулла и гамма – распределение близки между собой.

Задача 1. Показать, что функция вида

$$f_s(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \\ \beta x^s e^{-\alpha^2 x^2}, & \text{если } x \ge 0 \end{cases},$$

где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ - некоторые постоянные и s - натуральное число (s =1, 2, 3, …), обладает свойствами плотности распределения. Определить параметры α и β, исходя из заданного математического ожидания m_x и найти дисперсию D_x.

Решение. Параметры α и β, определяются из условий

$$\int_0^\infty \beta x^s e^{-(\alpha x)^2} dx = 1 \quad \int_0^\infty \beta x^{s+1} e^{-(\alpha x)^2} dx = m_x$$

Написанные выше интегралы заменой $(\alpha x)^2 = t$ приводятся к гамма – функции Эйлера :

$$\int_0^\infty x^s e^{-(\alpha x)^2} dx = \frac{1}{2\alpha^{s+1}} \int_0^\infty t^{\frac{s-1}{s}} e^{-t} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\alpha^{s+1}},$$

где $\Gamma(m) = \int_0^\infty x^{m-1} e^{-t} dt \ (m > 0)$, причём $\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$ и для целых $n = 1, 2, ...$ получаем

$$\Gamma(n+1) = n!, \ \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}, \quad (2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5 ... (2n-1)...$$

Из заданных условий находим

$$\beta \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\alpha^{s+1}} = 1, \quad \beta \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)}{2\alpha^{s+2}} = m_x,$$

откуда
$$\beta = \frac{2\alpha^{s+1}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}, \quad \alpha = \frac{1}{m_x} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}.$$

Второй начальный момент

$$\alpha_2[X] = \int_0^\infty \beta x^{s+2} e^{-(\alpha x)^2} dx = \beta \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{s+3}{2}\right)}{2\alpha^{s+3}} = \beta \frac{\frac{s+1}{2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\alpha^{s+1}\alpha^2} = \frac{s+1}{2\alpha^2},$$

откуда

$$D_x = \alpha_2[X] - m_x^2 = \frac{s+1}{2\alpha^2} - m_x^2 = m_x^2 \left[\frac{(s+1)\Gamma^2\left(\frac{s+1}{2}\right)}{2\Gamma^2\left(\frac{s+2}{2}\right)} - 1 \right].$$

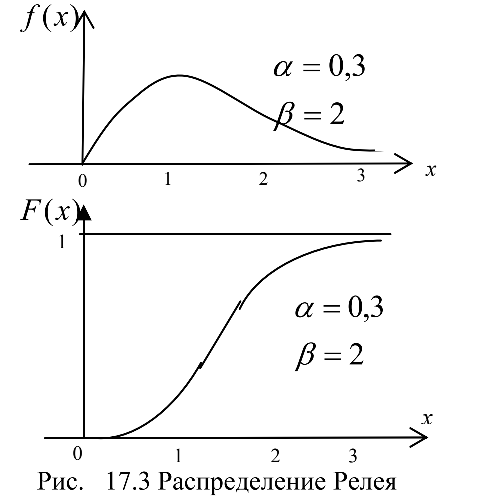


Рис. 17.3 Распределение Релея

Замечание 46.3 Некоторые из законов вида $f_s(x)$ имеют определённые названия.

1) $f_1(x)$ называется **законом Релея,** для которого $s = 1$.

$$f_1(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \beta x e^{-\alpha^2 x^2}, & x \ge 0 \end{cases}$$

имеем соотношения

$$\beta = 2\alpha^2 = \frac{\pi}{2m_x^2}, \quad \alpha = \frac{1}{m_x} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2}., \quad D_x = 2m_x^2 \left[\frac{4}{\pi} - 1 \right]$$

Вид графиков плотности и функции для закона Релея показан на рис. 17 .3

2) $f_2(x)$ называется **законом Максвелла**, для которого $s = 2$.

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \beta x^2 e^{-\alpha^2 x^2}, & x \ge 0 \end{cases}$$

имеем соотношения

$$\beta = \frac{4\alpha^3}{\sqrt{\pi}} = \frac{32}{\pi^2 m_x^3}, \quad \alpha = \frac{2}{m_x\sqrt{\pi}}., \quad D_x = 2m_x^2 \left[\frac{3\pi}{8} - 1 \right]$$

Замечание 47.3 Все законы вида

$$f_s(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \beta x^s e^{-\alpha^2 x^2}, & x \ge 0 \end{cases}$$

при заданном s являются однопараметрическими, то есть зависят только от одного параметра, в качестве которого можно задать, например, математическое ожидание или дисперсию.

Таблица 3.3

Частные случаи гамма - распределения				
Вариант	γ	λ	Вид распределения	Область применения
1	$\gamma - k$, где k - целое число		Распределение Эрлинга	Теория массового обслуживания
2	$\gamma = k/2$ полуцелое	$\lambda = k/2$ полуцелое	Распределение χ^2 «хи – квадрат»	Математическая статистика, где k - число степеней свободы
3	$\gamma = 1$		Экспоненциальное распределение	

8. Геометрическое распределение

Из схемы Бернулли получается ещё один вид распределения дискретной случайной величины - это **геометрическое** распределение.

Задача ставится так: пусть X - число испытаний, которое необходимо провести **до первого** успешного испытания. Тогда X – случайная величина, принимающая последовательно значения 1, 2, 3, и т..д. Ряд распределения такой случайной величины имеет вид

Таблица 4.3

X	1	2	3	…	n	…
P	p	qp	qqp	...	$q^{n-1}p$	…

Определение математического ожидания и дисперсии геометрически распределенной случайной величины, когда она начинается с единицы.

Часто рассматривают ряд, который начинается с единицы, то есть, в число опытов включают тот, который оказался удачным. В этом случае таблица имеет вид

Таблица 5.3

X	1	2	3	…	m	…
P	p	qp	qqp	...	$q^{m-1}p$	…

Здесь p – вероятность удачи, $q = 1 - p$ - вероятность неудачи.

Замечание 48.3 Для дальнейших выводов необходимы следующие ряды

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^n + .. = \sum_{m=0}^{\infty} q^m .$$

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{1-2q+q^2} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + ... + n\,q^{n-1} + ... = \sum_{m=1}^{\infty} m\,q^{m-1}$$

Из этих рядов очевидны формулы

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^m =.\frac{1}{1-q} \tag{70.3}$$

$$.\sum_{m=1}^{\infty} m\,q^{m-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \tag{71.3}$$

Определение суммы вероятностей

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i = \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} p = p \sum_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1, \text{ ч.т.д} \tag{72.3}$$

Числовые характеристики случайной величины, распределённой геометрически, когда ряд начинается с единицы

Математическое ожидание можно получить не по готовой формуле, а как производную от геометрической прогрессии. Дисперсию можно получить, также используя производную от суммы, входящей в математическое ожидание. Отсюда математическое ожидание с использованием формулы (71.3) получается в виде

$$m_x = p \sum_{m=1}^{\infty} m\,q^{m-1} = p \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = p \cdot \frac{1}{p^2} = \frac{1}{p} \tag{73.3}$$

$$m_x = \frac{1}{p} \tag{74.3}$$

Для получения дисперсии $D\{m\}$ необходимо получить математическое ожидание m^2, потому что формула дисперсии имеет вид

$$D[X] = D[m] = \sum_{m=1}^{n} m^2 q^{m-1} p - m_x{}^2 \qquad (75.3)$$

Продифференцируем по q формулу $.\sum_{m=1}^{\infty} m q^{m-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$. Тогда слева получится

$$\sum_{m=1}^{n} (m^2 - m) q^{m-2} = \frac{1}{q}[\sum_{m=1}^{n} m^2 q^{m-1} - \sum_{m=1}^{n} m q^{m-1}], \qquad (*)$$

Производная правой части этой же формулы получается в виде

$$\left[\frac{1}{(1-q)^2}\right]_q' = \frac{2}{(1-q)^3}. \qquad (**)$$

Приравнивая (*) и (**), получим

$$\frac{1}{q}[\sum_{m=1}^{n} m^2 q^{m-1} - \sum_{m=1}^{n} m q^{m-1}] = \frac{2}{(1-q)^3}. \qquad (76.3)$$

Отсюда легко получить искомую сумму

$$\sum_{m=1}^{n} m^2 q^{m-1} - \sum_{m=1}^{n} m\, q^{m-1} = \frac{2q}{(1-q)^3}, \quad \sum_{m=1}^{n} m^2 q^{m-1} - \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{2q}{(1-q)^3}$$

$$\sum_{m=1}^{n} m^2 q^{m-1} = \frac{1}{(1-q)^2} + \frac{2q}{(1-q)^3} = \frac{1-q+2q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{(1-q)^3}$$

Отсюда

$$\sum_{m=1}^{n} m^2 q^{m-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3} \qquad (77.3)$$

Тогда **дисперсия** получается в виде

$$D[X] = \sum_{m=1}^{n} m^2 q^{m-1} p - m_x{}^2 = p\frac{1+q}{(1-q)^3} - \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1+q}{(1-q)^2} - \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{p^2} \qquad (78.3)$$

Числовые характеристики случайной величины, распределённой геометрически, когда ряд начинается с нуля

Рассмотрим случай, когда ряд начинается не с единицы, а с нуля

Таблица 6.3

X	0	1	2	…	n	…
P	p	qp	qqp	...	$q^n p$	…

Рассмотрим сумму вероятностей

$$P = \sum_{m=0}^{\infty} q^m p = p\sum_{m=0}^{\infty} q^m = p\frac{1}{1-q} = p\frac{1}{p} = 1, \text{ ч.т.д} \qquad (79.3)$$

Математическое ожидание

$$M[X] = \sum_{m=0}^{n} m q^m p = p q \sum_{m=0}^{n} m q^{m-1} = p q \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = (1-q)q \cdot \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{q}{(1-q)} = \frac{q}{p}$$

Окончательно получается

$$M[X]=\frac{q}{p} \qquad (80.3)$$

Дисперсия определяется по формуле, подобной (78.3)

$$D[X]=pq\sum_{m=0}^{n} m^{2}q^{m-1}-m_x^{2}=\left[\frac{(2-p)}{(1-q)^2}-\frac{1}{(1-q)^2}\right]=\frac{1-p}{p^2}=\frac{q}{p^2} \qquad (81.3)$$

и равна $D[X]=\frac{q}{p^2}$.

Замечание 49.3 Разница между рядом, начинающимся с единицы, и рядом, начинающимся с нуля, состоит только в том, что во втором случае математическое ожидание сдвигается влево, так как величина q/p меньше величины $1/p$.

Замечание 50.3 Дисперсия не зависит от того, с какой величины начинается ряд.

Пример 20.3 Независимые испытания аппаратуры производятся до тех пор, пока не произойдёт отказ. Вероятность **отказа** от испытания к испытанию не меняется и равна *p*. Найти математическое ожидание и дисперсию числа безотказных испытаний.

Решение. Составим ряд распределения, в котором случайная величина X – это число безотказных испытаний, предшествующих отказу. Этот ряд полностью соответствует второму ряду распределения, то есть (получается геометрическое распределение)

Таблица 7.3

X	0	1	2	…	n	…
P	p	qp	qqp	...	$q^n p$	…

Мы получили решение в виде $M[X]=\frac{q}{p}$ и $D[X]=\frac{q}{p^2}$.

В задачнике ответ такой: $M[X]=\frac{q}{p}$, $D[X]=\frac{q^2}{p^2}+\frac{q}{p}$. Можно легко доказать, что ответы совпадают. $\frac{q^2}{p^2}+\frac{q}{p}=\frac{(1-p)^2+(1-p)p}{p^2}=\frac{1-2p+p^2+p-p^2}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}=\frac{q}{p^2}$

ГЛАВА 3 Системы случайных величин

На практике часто приходится иметь дело не с одной, а с несколькими случайными величинами, образующими комплекс или систему случайных величин.. Например, точка попадания снаряда определяется абсциссой и ординатой, каждая из которых является случайной величиной. Рост и вес человека, диаметр и вес цилиндра и т.п. тоже случайные величины.

Система случайных величин обозначаются заглавными латинскими буквами. X,Y,Z,U,V,W.

Кроме свойств случайных величин, входящих в систему, приходится изучать связь между случайными величинами.

Пусть (X,Y) система случайных величин. Геометрически эту систему можно изобразить, как показано на рисунке 1.1, в виде точки M(x,y), координаты которой принимают значения случайных величин X и Y. Можно рассматривать систему случайных величин как вектор, а случайные величины как его проекции. Система трёх случайных величин – это облако точек в трёхмерном пространстве или вектор в пространстве.

§ 1. Закон и функция распределения системы случайных величин

1) Система двух **дискретных** случайных величин представляется в виде таблицы

Таблица 1.1

X \ Y	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$.	p_{2n}
…	…	…	…	….	….	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}		p_{ij}		p_{in}
…	…	…	…	….	….	…
x_m	p_{m1}	p_{m2}	$\cdots$	p_{mj}		p_{mn}

Здесь определяется вероятность следующим образом

$$p_{ij} = P\begin{pmatrix} X = x_i \\ Y = y_j \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Нужно учитывать, что

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 \tag{2.1}$$

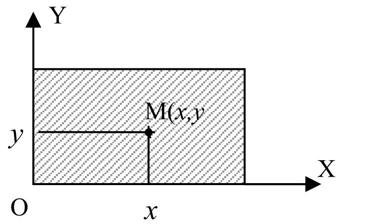


Рис. 1.1 Система случайных величин

2) Система двух **непрерывных** случайных величин может быть схематично изображена в виде прямоугольной области (заштрихованная часть).

Для задания закона распределения необходимо знать вероятность попадания значений случайных величин в каждую точку заштрихованной области. Для этого необходимо определить **плотность и функцию распределения вероятности каждой случайной величины и вероятность их совместного появления**.

Определение 1.1 **Функцией распределения** $F(x, y)$ системы двух случайных величин называется вероятность осуществления следующих двух неравенств:

$$\begin{aligned} -\infty < X < x \\ -\infty < Y < y \end{aligned} \tag{3.1}$$

или

$$F(x, y) = P\begin{pmatrix} -\infty < X < x \\ -\infty < Y < y \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Замечание 1.1 Функция распределения равна вероятности попадания случайной точки в бесконечный квадрат, расположенный ниже и левее точки $M(x, y)$.

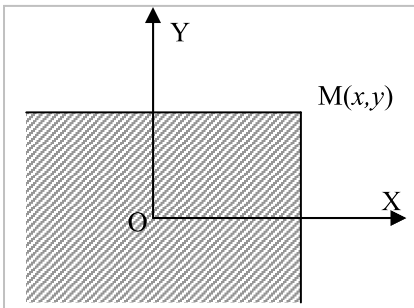


Рис. 2.1 К определению 1.1

Свойства функции распределения

Свойство. **I** Функция $F(x, y)$ - неубывающая функция обоих аргументов, то есть,

$$F(x_2, y) \geq F(x_1, y), \text{ если } x_2 > x_1 \tag{5.1}$$

$$F(x, y_2) \geq F(x, y_1)\text{, если } y_2 > y_1 \qquad (6.1)$$

Доказательство: из рисунка 3.1 видно, что площадь до x_2 больше, следовательно, вероятность попасть на большую площадь больше.

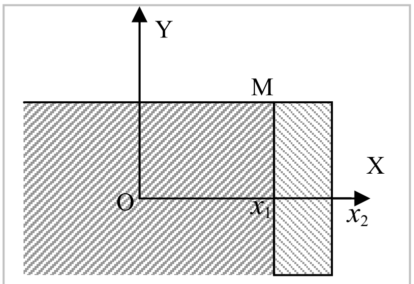


Рис. 3.1 К свойству **I**

Свойство II. Функция распределения при увеличении площади до минус бесконечности в любом направлении равна нулю, то есть

$$F(x,-\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty,-\infty) = 0 \qquad (7.1)$$

Доказательство: если верхняя или правая граница сдвигаются на минус бесконечность, то площадь стремится к нулю, и вероятность попасть в неё тоже стремится к нулю.

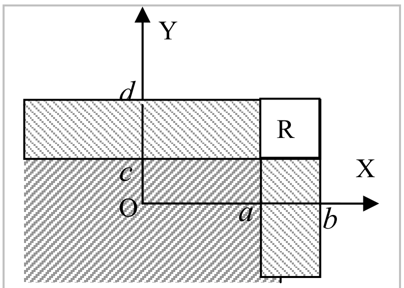


Рис. 4.1 К задаче 1.1

Свойство Ш. При удалении верхней и правой границ на плюс бесконечность функция распределения равна единице.

$$F(\infty,\infty) = 1 \qquad (8.1)$$

Доказательство: площадь расширяется во все стороны до бесконечности, так что попадание в неё становится достоверным событием.

Задача 1.1 Найти вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник R

Решение

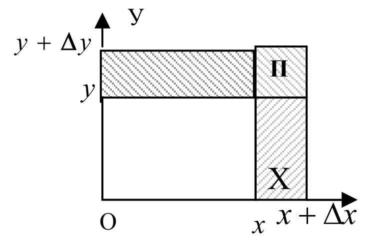


Рис. 5.1 К плотности распределения

$$P[(x, y) \subset R] = F(b,d) - F(b,c) - F(a,d) + F(a,c) \quad (9.1)$$

что видно из геометрических соображений (из рис. 5.1).

Плотность распределения системы случайных величин

Рассмотрим на плоскости элементарный прямоугольник **П**, заданный условиями 10.1

$$\begin{aligned} x \leq X \leq x + \Delta x,\\ y \leq Y \leq y + \Delta y \end{aligned} \qquad (10.1)$$

Найти вероятность того, что (X, Y) примет значения, заключённые в этом прямоугольнике. Из формулы (9.1) имеем

$$P[(x, y) \subset \Pi] = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x + \Delta x, y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y) \qquad (11.1)$$

Определение 2.1 Отношение вероятности $P(M \subset \Pi)$ к площади прямоугольника **П** называется **средней плотностью** вероятности в элементарном прямоугольнике.

Определение 3.1 **Плотностью вероятности** системы двух случайных величин называется предел средней плотности распределения в элементарном прямоугольнике при условии, что $\Delta x \to 0, \quad \Delta y \to 0$

$$f(x, y) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{P(M \subset \Pi)}{\Delta x \cdot \Delta y} \qquad (12.1)$$

Теорема. Плотность распределения вероятности равна смешанной производной от функции распределения системы двух случайных величин

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} \qquad (13.1)$$

Доказательство:

$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)-F(x,y+\Delta y)+F(x,y)}{\Delta x\Delta y}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\dfrac{F(x+\Delta x,y+\Delta y)-F(x+\Delta x,y)}{\Delta y}-\dfrac{F(x,y+\Delta y)-F(x,y)}{\Delta y}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{\partial F(x+\Delta x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\Delta x}=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

Элемент вероятности системы двух случайных величин

Рассмотрим определение плотности вероятности системы двух случайных величин по формуле (12.1)

$$f(x,y)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P(M\subset \Pi)}{\Delta x\cdot\Delta y}$$

и применим к нему теорему о связи предела и бесконечно малой функции. Тогда получим

$$\frac{P(M\subset \Pi)}{\Delta x\cdot\Delta y}=f(x,y)+\alpha(\Delta x,\Delta y)$$

где $\alpha(\Delta x,\Delta y)$ - бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $f(x,y)$.
Отсюда

$$P(M\subset \Pi)=f(x,y)\cdot\Delta x\cdot\Delta y+\alpha\cdot\Delta x,\Delta y$$

С точностью до бесконечно малой высшего порядка можно написать, что

$$P(M\subset \Pi)\approx f(x,y)\cdot\Delta x\cdot\Delta y \qquad (14.1)$$

Определение 4.1 **Функция** $f(x,y)\Delta x\Delta y$ называется **элементом вероятности** в точке на плоскости (XY).

Следствие 1.1 Вероятность попадания точки в область D на плоскости (XY) равна

$$P(M\subset \Pi)\approx\iint_{\Pi} f(x,y)\,dxdy \qquad (15.1)$$

Следствие 2.1 **Функция распределения** системы двух **непрерывных** случайных величин определяется по формуле

$$F(x,y)=P\begin{pmatrix}-\infty<X<x\\ -\infty<Y<y\end{pmatrix}=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)dxdy \qquad (16.1)$$

Условные законы распределения и плотности распределения вероятности случайных величин, входящих в систему

Определение 5.1 **Условной плотностью распределения** $f(x/y)$ величины X из системы (XY) называется плотность распределения величины X, вычисленная **при условии**, что Y **сохраняет постоянное значение** (аналогично для $f(y/x)$)

Формулы условного и маргинального законов распределения

Пусть

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dy\,dx \tag{17.1}$$

Определение 6.1 Законы распределения $F(\infty,y)$ и $F(x,\infty)$, когда **одна** из случайных величин принимает **все значения**, называются **маргинальными**.

Найдём законы распределения $F(\infty,y)$ и $F(x,\infty)$

$$F(x,\infty)=F_1(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy\,dx \tag{18.1}$$

$$F(\infty,y)=F_2(y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy \tag{19.1}$$

Определение соответствующих **маргинальных плотностей** из (18.1) и (19.1)

$$f_1(x)=F'(x,\infty)=\frac{d}{dx}\left[\int_{-\infty}^{x}[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy]\,dx\right]$$

Применяя к этому выражению **теорему о производной** от интеграла с переменным верхним пределом[1] и получим

$$f_1(x)=F'(x,\infty)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy \tag{20.1}$$

Определение 7.1 **П**лотность распределения вероятности системы $f(x,y)$ называется **совместной плотностью** вероятности.

Аналогично формуле (20.1) получим маргинальную плотность $f_2(y)$

$$f_2(y)=F'(\infty,y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx \tag{21.1}$$

Замечание 2.1 Формулы (20.1) и (21.1) **связывают маргинальные плотности вероятности** с **совместной плотностью** распределения системы двух случайных величин.

Замечание 3.1 Из (20.1) и (21.1) видно, что, **зная совместную плотн**ость распределения системы, можно легко получить **маргинальные плотности**, но по маргинальным плотностям определить совместную плотность **сложнее**.

Определение 8.1 Условным законом распределения случайной величины **X**, входящей в систему двух случайных величин (X, Y) называется закон распределения этой величины **X** при условии, что другая величина приняла фиксированное значение.

$$F(X/Y)=P(-\infty<X<x/Y=y) \tag{22.1}$$

Тогда $f(x/y)$ - **условная плотность** распределения определяется как производная от $F(X/Y)$.

Замечание 4.1 $F(X/Y)$ получается с помощью следующих рассуждений: найдём вероятность того, что случайная точка *M* попадёт в прямоугольник $\Pi(\Delta x,\Delta y)$

$$P\begin{Bmatrix} x\le X\le x+\Delta x\\ y\le Y\le y+\Delta y\end{Bmatrix}=f(x,y)dxdy \tag{23.1}$$

---

[1] Производная от интеграла с переменным верхним пределом $\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$ по верхнему пределу равна подынтегральной функции $\Phi'(x)=f(x)$.

С другой стороны, мы вычисляем вероятность произведения двух событий $\{x \le X \le x+\Delta x\}$ и $\{y \le Y \le y+\Delta y\}$, то есть, с учётом того, что случайные величины X и Y системы являются зависимыми, то по 4 – ой аксиоме аксиоматического определения вероятности получим

$$\begin{aligned} &P\{x \le X \le x+\Delta x\} \times P\{y \le Y \le y+\Delta y\} = \\ &= P\{x \le X \le x+\Delta x\} \times P\{y \le Y \le y+\Delta y / X = x\} \end{aligned} \qquad (24.1)$$

Здесь определяется $P\{x \le X \le x+\Delta x\} = f_1(x)dx$ при условии, что y принимает <u>любые</u> значения, а $P\{y \le Y \le y+\Delta y / X = x\}$.- вероятность того, что Y принимает любые значения на Δy при условии, что $X = x$. Отсюда ясно, что

$$P\{y \le Y \le y+\Delta y / X = x\} = f(y/x)dy \qquad (25.1)$$

С учётом 4-ой аксиомы, можно записать

$$P\begin{Bmatrix} x \le X \le x+\Delta x \\ y \le Y \le y+\Delta y \end{Bmatrix} = f_1(x)\, f(y/x)dxdy = f_2(y)\, f(x/y)dxdy \qquad (26.1)$$

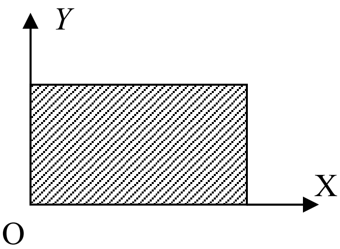


Рис.6.1 Система независимых величин

В формулах (23.1) и (25.1) левые части равны, следовательно, равны и правые. Тогда

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f_1(x)\, f(y/x) \\ f(x,y) &= f_2(y)\, f(x/y) \end{aligned} \qquad (27.1)$$

Вывод: совместная плотность распределения системы $f(x,y)$ равна **произведению маргинальной** плотности одной из случайных величин $f_1(x)$ или $f_2(y)$, входящих в систему, на **условную плотность** распределения другой случайной величины системы $f(y/x)$.или $f(x/y)$ соответственно.

Замечание 5.1 Отсюда видно, что совместную плотность распределения можно получить, только если известны маргинальные и условные плотности распределения.

Зависимость и независимость случайных величин системы и закон взаимности

Условные плотности распределения выражают наличие **зависимости** или **независимости** между случайными величинами X и Y системы.

Пример независимости

Из рисунка 6.1 видно, что здесь X постоянно при любых значениях y и соответственно Y постоянно при любых значениях x. Следовательно, X и Y не зависят друг от друга и

$$f(y/x) = f_2(y) \qquad (28.1)$$

$$f(x/y) = f_1(x) \qquad (29.1)$$

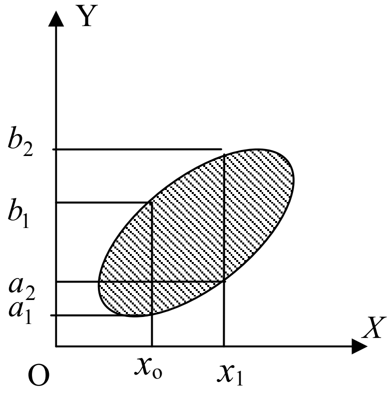


Рис. 7.1.Система зависимых величин

Пример зависимости

Из рисунка 7.1 видно, что при разных значениях x случайная величина Y принимает разные значения, то есть,

$$f(y/x) \neq f_2(y) \qquad (30.1)$$

$$f(x/y) \neq f_1(x) \qquad (31.1)$$

Определение 9.1 Если условная плотность распределения случайной величины системы $f(x/y)$ совпадает с маргинальной плотностью $f_1(x)$, то говорят, что случайная величина X не зависит от случайной величины Y, Аналогично, если $f(y/x) = f_2(y)$ означает независимость Y от X.

Закон взаимности случайных величин системы

Из равенства

$$f(x,y) = f_1(x)\, f(y/x) = f_2(y)\, f(x/y) \qquad (32.1)$$

.

следует соотношение

$$\boxed{\frac{f(y/x)}{f_2(y)} = \frac{f(x/y)}{f_1(x)}} \qquad (33.1)$$

Отсюда видно, что если X не зависит от Y и выполняется условие $f(x/y) = f_1(x)$ и $\frac{f(x/y)}{f_1(x)} = 1$, то отношение слева тоже будет равно единице и $f(y/x) = f_2(y)$, то есть, Y тоже не зависит от X.

Определение 10.1 Соотношение (33.1) называется законом взаимности случайных величин системы.

Из формулы (32.1) получается **формула Байеса** для определения **условной вероятности** каждой из случайных величин системы

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}, \quad f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} \qquad (34.1)$$

Подставляя сюда выражения для маргинальных плотностей (20.1) и (21.1), получим

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx}, \quad f(y/x) = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy} \qquad (35.1)$$

Критерий независимости случайных величин, входящих в систему

Теорема. Для того, чтобы две случайные величины системы были независимыми, необходимо и достаточно, чтобы **совместная** плотность распределения системы этих случайных величин была равна произведению их **маргинальных** плотностей распределения.

$$f(x,y) = f_1(x) \times f_2(y) \qquad (36.1)$$

Вывод. Если случайные величины системы (X,Y) независимы, то знания их маргинальных плотностей $f_1(x)$ и $f_2(y)$ достаточно для определения совместной плотности $f(x,y)$.

Пример 1.1 Если X и Y независимы и распределены по нормальному закону, то их совместная плотность распределения равна

$$f(x,y)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2}\right]} \qquad (37.1)$$

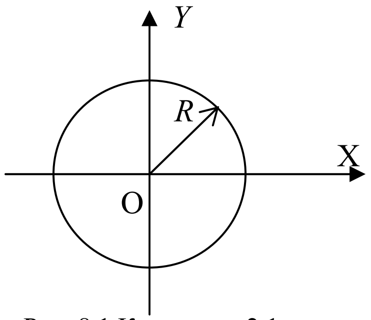


Рис. 8.1 К примеру 2.1

Пример 2.1 Дана система случайных величин, распределённых равномерно в круге радиуса R (рис. 8.1)

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & x^2+y^2\ge R^2\\ C, & x^2+y^2<R^2\end{cases}$$

Найти совместную, маргинальные и условные плотности распределения случайных величин X и Y.

Решение.

1) Определение **совместной** плотности распределения $f(x,y)$, для чего нужно найти C.. Для этого используем известное равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy=1$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}Cdxdy=C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}dxdy=C\int_{0}^{2\pi}d\varphi\int_{0}^{R}\rho\, d\rho=C\cdot\pi R^2=1,$$

откуда $C=\frac{1}{\pi R^2}$ при $x^2+y^2<R^2$

Таким образом, совместная плотность распределения системы равна

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi R^2} \text{ внутри круга } x^2+y^2<R^2$$

2) Определение **маргинальных** плотностей $f_1(x)$ и $f_2(y)$. Зная совместную плотность, можно найти маргинальные плотности по формулам (20.1) и (21.1)

$$f_1(x)=\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{1}{\pi R^2}dy=\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}$$

и

$$f_1(y)=\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}}\frac{1}{\pi R^2}dx=\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}$$

Замечание 6.1 Знание только маргинальных плотностей $f_1(x)$ и $f_2(y)$, не позволяет найти совместную плотность распределения $f(x,y)$.

3) Определение **условных** плотностей распределения по формулам (34.1) и (35.1)

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\frac{1}{\pi R^2}\bigg/\frac{2\sqrt{R^2-y^2}}{\pi R^2}=\frac{\pi R^2}{\pi R^2\cdot 2\sqrt{R^2-y^2}}=\frac{1}{2\sqrt{R^2-y^2}},$$

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\frac{1}{\pi R^2}\bigg/\frac{2\sqrt{R^2-x^2}}{\pi R^2}=\frac{\pi R^2}{\pi R^2\cdot 2\sqrt{R^2-x^2}}=\frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}},$$

§ 2. Числовые характеристики системы случайных величин

Числовые характеристики одной случайной величины присущи случайным величинам системы, но добавляются характеристики связи между ними.

Начальные моменты системы

Определение 1.2 **Начальным моментом порядка** $k+s$ системы двух случайных величин **дискретного** типа называется число

$$\alpha_{k,s}[X,Y]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i^k y_j^s P_{ij} \tag{1.2}$$

Определение 2.2 **Начальным моментом порядка** $k+s$ системы двух **непрерывных** случайных величин называется число

$$\alpha_{k,s}[X,Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x^k y^s f(x,y)\,dxdy \tag{2.2}$$

1) Существует только **один момент нулевого порядка** момент нулевого порядка

$$\alpha_{0,0}[X,Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dxdy=1 \tag{3.2}$$

так как вероятность попадания на всю плоскость является достоверным событием.
2) Существуют **два начальных момента первого порядка**. Это математические ожидания m_x и m_y.

$$\alpha_{1,0}[X,Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x\,f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}xdx\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_1(x)dx=m_x \tag{4.2}$$

$$\alpha_{0,1}[X,Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}y\,f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}y\,dy\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}y\,f_2(y)\,dy=m_y \tag{5.2}$$

Определение 3.2 Точка на плоскости с координатами m_x и m_y $C(m_x,m_t)$ называется центром распределения системы.
3) Существует **три момента 2-го порядка** при $k=0, s=2, k=1, s=1, k=2, s=0$, но они используются только как вспомогательные величины.

Центральные моменты системы

Определение 4.2 **Центральным моментом порядка** $k+s$ системы двух случайных величин **дискретного** типа называется число

$$\mu_{k,s}[X,Y]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)^k\,(y_j-m_y)^s P_{ij} \tag{6.2}$$

Определение 5.2 **Центральным моментом порядка** $k+s$ системы двух **непрерывных** случайных величин называется число

$$\mu_{k,s}[X,Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^k(y-m_y)^s f(x,y)\,dxdy \qquad (7.2)$$

1) Центральный момент нулевого порядка, как и начальный момент нулевого порядка равен единице.

$$\mu_{0,0}[X,Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dxdy=1 \qquad (8.2)$$

2) Центральные моменты первого порядка равны нулю

$$\begin{aligned}\mu_{1,0}[X,Y]&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)\,f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)dx\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\\&=\int_{-\infty}^{\infty}x\,f_1(x)dx-m_x\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dxdy=m_x-m_x=0\end{aligned} \qquad (9.2)$$

Аналогично доказывается, что

$$\mu_{0,1}[X,Y]=0 \qquad (10.2)$$

3) Центральные моменты второго порядка при $k=0,\ s=2,\ k=1,\ s=1,\ k=2,\ s=0$

Дисперсия X - D_x

$$\begin{aligned}\mu_{2,0}[X,Y]&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2\,f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2dx\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy=\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)^2\,f_1(x)dx=D_x\end{aligned} \qquad (11.2)$$

Дисперсия Y - D_y

$$\begin{aligned}\mu_{0,2}[X,Y]&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)^2\,f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)^2dy\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx=\\&=\int_{-\infty}^{\infty}(y-m_y)^2 f_2(y)\,dy=D_y\end{aligned} \qquad (12.2)$$

Для центрального момента порядка $\mu_{1,1}[X,Y]$ вводится название к**орреляционный момент** и специальное обозначение K_{xy}

$$\mu_{1,1}[X,Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)\,f(x,y)\,dxdy=K_{xy} \qquad (13.2)$$

Свойства момента корреляции

Замечание 1.2 **Корреляция** – это связь между случайными величинами

Замечание 2.2 Вспомним, что $(x - m_x)$, $(y - m_y)$ являются отклонениями случайных величин от математического ожидания, поэтому ,чем больше отклонения, тем больше момент корреляции.

Недостатки характеристики $\mu_{1,1}[X,Y]$:

1. $\mu_{1,1}[X,Y]$ - это размерная величина;

2. на неё влияет разброс случайных величин.

Замечание 3.2 Для того, чтобы устранить недостатки корреляционного момента, вместо него рассматривается безразмерная характеристика, которая называется **коэффициентом корреляции**

$$r_{xy} = \frac{\mu_{1,1}[X,Y]}{\sigma_x \sigma_y} \qquad (14.2)$$

Замечание 4.2 Если случайная величина X совпадает со случайной величиной Y, то получается

$$K_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)(x - m_x)\, f(x,y)\, dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)^2 f(x,y)\, dxdy = D_x \qquad (15.2)$$

Аналогично получается $K_{yy} = D_y$

Определение 6.2 Две величины называются <u>некоррелированными</u>, если момент корреляции равен нулю

$$K_{xy} = 0, \quad r_{xy} = 0 \qquad (16.2)$$

Теорема. Если величины X и Y независимы, то они не коррелированы ($K_{\;y} = 0, \quad r_{xy} = 0$)

Доказательство. Если X и Y независимы, то совместная плотность равна произведению маргинальных

$$f(x,y) = f_1(x) \times f_2(y) \qquad (17.2)$$

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)(y - m_y)\, f_1(x) f_2(y)\, dxdy =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}(x - m_x)\, f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty}(y - m_y)\, f_2(y)\, dy = \mu_1(x) \cdot \mu_1(y) = 0 \cdot 0 = 0$$

$K_{xy} = 0$, ч.т..д. (18.2)

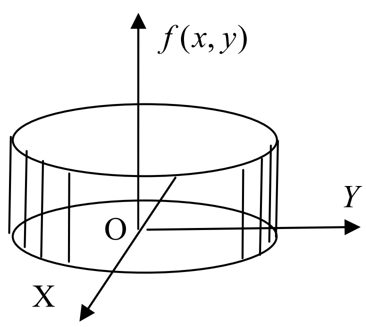


Рис. 1.2 К примеру 1.2

Замечание 5.2 Обратное утверждение неверно, то есть, если X и Y не коррелированы, то это не значит, что они независимы.

Пример 1.2 Задана система двух величин X и Y

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad x^2 + y^2 > R^2 \\ C, & \text{если} \quad x^2 + y^2 < R^2 \end{cases}$$

(На границе нет производных, поэтому точки границы не рассматриваются).

Решение. Здесь мы имеем дело с равномерным распределением, следовательно, $C = 1/(\pi R^2)$, а математические ожидания $m_x = 0, m_y = 0$. Тогда

$$K_{xy}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)\,f(x,y)\,dx\,dy=\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi\int\limits_0^R\rho^3 d\rho=$$

$$=\frac{1}{\pi R^2}\int\limits_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\sin\varphi\int\limits_0^R\rho^3 d\rho=\frac{1}{\pi R^2}\left.\frac{\sin^2\varphi}{2}\right|_0^{2\pi}\cdot\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_0^R=0$$

Величины X и Y не коррелированы, но они зависимы.

Теоремы о числовых характеристиках

Теорема 1.5 Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых.

Доказательство:

$$M[X+Y]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x+y)\,f(x,y)\,dxdy=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dy\right]dx+\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,dx\right]dy=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x\,f_1(x)dx+\int\limits_{-\infty}^{\infty}y\,f_2(y)dy=m_x+m_y \qquad (19.2)$$

Замечание 6. 2 Теорему можно распространить на любое число слагаемых.

Замечание 7.2 Теорема справедлива, как для зависимых, так и для независимых случайных величин системы.

Теорема 2. Математическое ожидание произведения равно произведению математических ожиданий, сложенному с моментом корреляции этих величин.

$$M[X,Y]=M[X]\times M[Y]+K_{x\,y} \qquad (20.2)$$

где $M[X]=m_x$; $M[Y]=m_y$.

Доказательство:

$$K_{x\,y}=M[(X-m_x)\cdot(Y-m_y)]=M[XY-Y\,m_x-X\,m_y+m_xm_y]=$$

$$=M[XY]-M[Y\,m_x]-M[X\,m_y]+m_xm_y=M[XY]-m_xM[Y]-m_yM[X]+m_xm_y=$$

$$=M[XY]-m_xm_y-m_ym_x+m_xm_y=M[XY]-m_xm_y$$

Отсюда

$$K_{x\,y}=M[XY]-m_xm_y$$

или

$$M[XY]=m_xm_y+K_{x\,y}, \text{ ч.т.д.}$$

Следствие 1.2 Если случайные величины X и Y независимы, то $K_{x\,y}=0$, и тогда математическое ожидание произведения равно произведению математических ожиданий.

Теорема 3. Дисперсия суммы двух случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий плюс удвоенный корреляционный момент.

Доказательство:

$$D(X \pm Y) = M[(X \pm Y) - (m_x \pm m_y)]^2 = M[(X - m_x)^2 + (Y - m_y)^2 \pm 2(X - m_x)(Y - m_y)] =$$
$$= M[(X - m_x)^2] + M[(Y - m_y)^2] \pm 2M[(X - m_x)(Y - m_y)] = D_x + D_y \pm 2K_{xy}.$$
$$\boxed{D[X + Y] = D_x + D_y \pm 2\,K_{xy}.} \text{ ч.т.д.} \qquad (21.2)$$

Замечание 8.2 Если X и Y независимы, то $K_{xy} = 0$, и дисперсия суммы равна сумме дисперсий слагаемых случайных величин.

Две теоремы относительно коэффициента корреляции

Теорема 1. Коэффициент корреляции r_{xy} любых двух случайных величин X и Y по абсолютной величине **не превосходит единицы**.

Доказательство. Рассмотрим $Z = \sigma_y X \pm \sigma_x Y$, где σ_y, σ_x - числа.
Здесь
$$M[Z] = M[\sigma_y X \pm \sigma_x Y] = M[\sigma_y X] \pm M[\sigma_x Y] = \sigma_y M[X] \pm \sigma_x M[Y] \qquad (22.2)$$
Найдём дисперсию этой величины:
$$D_z = M[(Z - m_z\}^2] = M[(\sigma_y X \pm \sigma_x Y - \sigma_y m_x \mp \sigma_x m_y)^2] =$$
$$= M\left[\left\{\sigma_y (X - m_x) \pm \sigma_x (Y - m_y)\right\}^2\right] =$$
$$= M\left\{\sigma_y^2 (x - m_x)^2 \pm 2\sigma_y \sigma_x (X - m_x) \cdot (Y - m_y) + \sigma_x^2 (Y - m_y)^2\right\} =$$
$$= M[\sigma_y^2 (x - m_x)^2] \pm 2\sigma_y \sigma_x M[(X - m_x)(Y - m_y)] + M[\sigma_x^2 (Y - m_y)^2] =$$
$$= \sigma_y^2 \sigma_x^2 \pm 2\sigma_y \sigma_x K_{xy} + \sigma_x^2 \sigma_y^2 = 2\sigma_y^2 \sigma_x^2 \pm 2\sigma_y \sigma_x K_{xy} =$$
$$= 2\sigma_y^2 \sigma_x^2 \left(1 \pm \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}\right) = 2\sigma_y^2 \sigma_x^2 \left(1 \pm r_{xy}\right)$$
Учитывая, что дисперсия не может быть отрицательной, запишем два неравенства, следующих из полученного выражения.
$$1 + r_{xy} \ge 0, \quad 1 - r_{xy} \ge 0.$$
Отсюда
$$r_{xy} \ge -1, \quad r_{xy} \le 1$$
и, следовательно,
$$-1 \le r_{xy} \le 1, \text{ ч.т.д.} \qquad (23.2)$$

Теорема 2. Абсолютная величина коэффициента корреляции r_{xy} равна единице тогда и только тогда, когда случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью $y = ax + m$, причём $a\,r_{xy} > 0$.

Доказательство. Пусть $y = ax + m$, тогда $m_y = am_x + m$ (математическое ожидание константы равно самой константе). Отсюда
$$y - m_y = ax + m - am_x - m = a(x - m_x)$$
Из определения корреляционного момента следует, что
$$K_{xy} = M[(X - m_x) \cdot (Y - m_y)] = M[(X - m_x) \cdot a(X - m_x)] = aM[(X - m_x)^2] = aD_x \text{ .} (24.2)$$

Отсюда с учётом того, что $\sigma_y^2 = a^2\sigma_x^2$ и, следовательно, $\sigma_y = |a|\sigma_x$. Тогда

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x\sigma_y} = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x^2|a|} = \frac{a}{|a|} = \pm 1, \text{ ч.т.д.} \qquad (25.2)$$

Вывод: если y возрастающая функция *x,* то $r_{xy} = 1$, , если убывающая функция, тогда $r_{xy} = -1$.

Линия регрессии

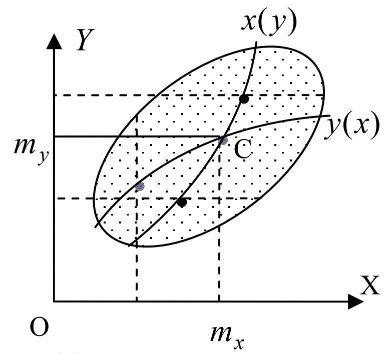


Рис. 2.2 Линии регрессий

Изобразим систему случайных величин как некоторое облако точек

Рассмотрим **безусловные** математические ожидания. Их два

$M[X] = m_x$; $M[Y] = m_y$ - это числа.

Здесь

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,dx; \quad m_y = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\,dy \qquad (26.2)$$

$C(m_x, m_y)$ - центр распределения случайных величин

Определение 7.2 **Условное математическое ожидание** случайной величины Y представляет собой среднее значение координаты Y при фиксированном значении другой координаты *X.*

$$M[Y/X] = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f(y/x)\; d\,y \text{ - функция от } x, \qquad (27.2)$$

$$M[X/Y] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x/y)\; d\,x \text{ - функция от } y. \qquad (28.2)$$

Определение 8.2 Линией регрессии Y по X называется геометрическое место точек, ординаты которых при каждом данном X равны условному математическому ожиданию Y при заданном значении *X.*

Замечание 1.2 **Линия регрессии** даёт зависимость между Y и X.

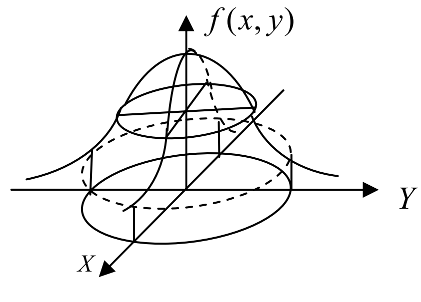


Рис. 3.2 Функция плотности нормальной системы

Нормальная система случайных величин

Определение 9.2 Система случайных величин называется **нормальной**, если **совместная плотность распределения** определяется следующей формулой:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}{}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}{}^2)}\left[\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} - 2r_{xy}\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y}\right]} \qquad (29.2)$$

Замечание 9.2 Совместная плотность $f(x,y)$ зависит от пяти параметров m_x, $m_x, \sigma_x, \sigma_y, r_{xy}$

Маргинальные плотности распределения имеют вид

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \tag{30.2}$$

$$f_2(y) = \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} \tag{31.2}$$

Замечание 10.2. Если система нормальная, то и маргинальные плотности нормальные.
Теорема 3. Если X и Y нормальны и если коэффициент корреляции равен нулю, то X и Y независимы.
Доказательство. Считаем, что X и Y нормальны и их совместная плотность определяется по формуле

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_x \sigma_y} e^{-\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right]} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y} e^{-\frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}} \tag{32.2}$$

Отсюда видно, что

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)\,, \tag{33.2}$$

то есть, они независимы.

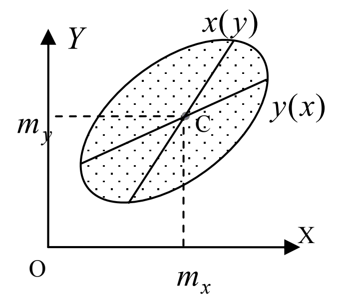


Рис. 4.2 Линии регрессии нормальной системы

Теорема 4. Если система случайных величин **нормальна**, то линии регрессии прямые.
Доказательство. Уравнение линии регрессии имеет вид

$$Y = M[Y/X]$$

Найдём $f(y/x)$

$$f(y/x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_y \sqrt{1-r_{xy}{}^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r_{xy}{}^2)\sigma_y^2}\left[y - m_y - r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-m_x)\right]^2}$$

Для определения **условного математического ожидания** нужно приравнять к нулю выражение, стоящее в квадратных скобках, потому что это выражение идентично тому, которое стоит в формулах (30.2) и .(31.2)

$$y - m_y - r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) = 0 \tag{34.2}$$

Тогда $y - m_y = r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$. Отсюда получается формула , связывающая Y и X

$$y = m_y + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x) \tag{35.2}$$

Это уравнение прямой с угловым коэффициентом ($y = kx + b$). В этом выражении $m_y + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x)$ - **условное математическое ожидание**. y при $x = const$. Тогда по определению 7.2 выражение (34.2) и есть **уравнение линии регрессии**, как геометрическое место условных математических ожиданий. Аналогично определяется уравнение линии регрессии X по Y

$$x = m_x + r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - m_y) \qquad (36.2)$$

Эти линии **прямые**, ч.т.д.

Эллипсы рассеивания

Если поверхность $z = f(x, y)$ совместной плотности вероятности рассечь плоскостью, параллельной плоскости XOY, то в сечении получится линия эллипса с осями, которые получаются из уравнения

$$\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r_{xy}(x - m_x)(y - m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} = \lambda^2 , \qquad (37.2)$$

где вместо константы стоит λ^2.

Легко показать, что центр эллипса находится в центре рассеяния $C(m_x, m_y)$.

Замечание 11.2. Если X и Y **независимы**, то $r_{xy} = 0$.

Замечание 12.2 Если X и Y **не коррелированы**, то оси эллипса рассеяния параллельны осям координат и записываются в виде

$$\frac{(x - m_x)^2}{\sigma_x^2} + \frac{(y - m_y)^2}{\sigma_y^2} = \lambda^2 \qquad (38.2)$$

ГЛАВА 4. Предельные теоремы теории вероятностей

Существуют **два класса предельных теорем**:

1) законы **больших чисел**,
2) **центральные** предельные теоремы.

Законы больших чисел касаются **предельных значений случайных величин**, а **центральные** предельные теоремы говорят о **предельных законах** их распределения.

§ 1. Закон больших чисел

Лемма Чебышёва (неравенство Чебышёва) Вероятность того, что случайная величина X отклоняется от своего математического ожидания меньше, чем на ε, больше или равна $\left(1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}\right)$, т.е.

$$P\left(\left|X - m_x\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2} . \qquad (1.1)$$

Доказательство: Смысл теоремы заключается в том, что вероятность случайной величины X попасть на отрезок $[m_x - \varepsilon, m_x + \varepsilon]$ больше или равна $1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}$. Здесь формула дисперсии

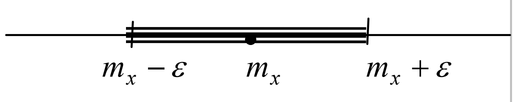


Рис. 1.1 К неравенству Чебышёва

$$D_x = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\, dx \qquad (2.1)$$

Рассмотрим этот интеграл по области вне отрезка $[m_x - \varepsilon, m_x + \varepsilon]$, где $|X - m_x| > \varepsilon$. Тогда при учёте того, что всюду $|x - m_x|^2 > \varepsilon^2$ получается

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\, dx \geq \int_{-\infty}^{m_x - \varepsilon} (x - m_x)^2 f(x)\, dx + \int_{m_x + \varepsilon}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x)\, dx >$$

$$> \int_{-\infty}^{m_x - \varepsilon} \varepsilon^2 f(x)\, dx + \int_{m_x + \varepsilon}^{\infty} \varepsilon^2 f(x)\, dx = \varepsilon^2 \left[\int_{-\infty}^{m_x - \varepsilon} f(x)\, dx + \int_{m_x + \varepsilon}^{\infty} f(x)\, dx \right] = \varepsilon^2 P\left(|x - m_x| \geq \varepsilon\right)$$

Отсюда видно. что получается **строгое** неравенство

$$D_x > \varepsilon^2 P\left(|x - m_x| \geq \varepsilon\right) \text{ или } \frac{D_x}{\varepsilon^2} > P\left(|x - m_x| \geq \varepsilon\right)$$

Нас интересует п**ротивоположное** событие, поэтому

$$P\left(|X - m_x| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}, \text{ ч.т.д.} \qquad (3.1)$$

Пример 1.1 **(на лемму Чебышёва).** На предприятии каждое изделие может оказаться бракованным с вероятностью 0,04. Было изготовлено 60 000 изделий. Найти вероятность того, что число бракованных изделий будет заключено в пределах 2300 – 2500.

Решение. Математическое ожидание числа бракованных изделий равно

$$m_x = n\,p = 60000 \times 0{,}04 = 2400,$$

дисперсия $D_x = n\,p\,q = 60000 \times 0{,}04 \times 0{,}96 = 2260$,

СКВО $\sigma_x = \sqrt{D_x} = \sqrt{2260} \approx 47{,}5$.

Для решения используем неравенство Чебышёва

$$P\left(|m - n\,p| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D}{\varepsilon^2}$$

Тогда

$$P\left(|m - 2400| < 100\right) \geq 1 - \frac{2260}{100^2} = 1 - 0{,}226 \approx 0{,}774$$

Пример 2.1 Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,05. С помощью неравенства Чебышёва оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется а) меньше двух; б) не меньше двух.

Решение.

а) Обозначим через X дискретную случайную величину - число отказавших элементов за время T. Тогда

$$M[X] = np = 10 \cdot 0{,}05 = 0{,}5;$$

$$D[X] = npq = 10 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 0{,}475$$

Воспользуемся неравенством Чебышёва

$$P\left(|X - M[X]| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}$$

Подставим сюда $M[X] = 0{,}5, \quad D[X] = 0{,}475, \quad \varepsilon = 2$, получим

$$P\left(|X - 0{,}5| < 2\right) \geq 1 - \frac{0{,}475}{4} \cong 0{,}88$$

б) События $|X-0{,}5|<2$ и $|X-0{,}5|\ge 2$ противоположны, поэтому сумма их вероятностей равна единице. Следовательно,

$$P(|X-0{,}5|\ge 2)\le 1-0{,}88=0{,}12$$

Пример 3. 1 Вероятность появления события А в каждом испытании равна $1/2$. Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что число X появления события А заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 независимых испытаний.

Решение. Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины X –числа появлений событий А в 100 независимых испытаниях:

$$M[X]=np=100\cdot 0{,}5=50;$$

$$D[X]=npq=10\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5=25$$

Найдём максимальную разность между заданным числом появления события А и математическим ожиданием $M[X]=50$:

$$\varepsilon=60-50=10.$$

Воспользуемся неравенством Чебышёва в форме

$$P(|X-M[X]|<\varepsilon)\ge 1-D[X]/\varepsilon^2$$

Подставляя $M[X]=50,\quad D[X]=25,\quad \varepsilon=10$

$$P(|X-50|<10)\ge 1-25/10^2=0{,}75$$

Пример 4.1 Дискретная случайная величина X задана законом распределения

Таблица 1.1

X_k	0,3	0,6
p	0,2	0,8

Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что $|X-M[X]|<0{,}2$

Решение. Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины X

$$M(X)=0{,}3\cdot 0{,}2+0{,}6\cdot 0{,}8=0{,}54;$$

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=0{,}3^2\cdot 0{,}2+0{,}6^2\cdot 0{,}8-0{,}54^2=0{,}0144.$$

Воспользуемся неравенством Чебышёва в виде

$$P(|X-M[X]|<\varepsilon)\ge 1-D[X]/\varepsilon^2$$

Подставляя $M[X]=0{,}54,\quad D[X]=0{,}0144,\quad \varepsilon=0{,}2$, окончательно получим

$$P(|X-0{,}54|<0{,}2)\ge 1-0{,}0144/0{,}2^2=0{,}64$$

Для самостоятельного решения

Пример 5 1 В осветительную сеть параллельно включено 20 ламп. Вероятность того, что за время T лампа будет включена 0,8. Пользуясь неравенством Чебышёва определить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом включённых ламп и средним числом (математическим ожиданием) включённых ламп за время T окажется: а) меньше трёх; б) не меньше трёх.

Ответ; а) $P(|X-16|<3)\ge 0{,}64;$ б) $P(|X-16|\ge 3)<0{,}36.$

Пример 6.1 Вероятность появления события А в каждом испытании равна $1/4$. Используя неравенство Чебышёва, оценить вероятность того, что число X появления события А заключено в пределах от 150 до 250, если будет произведено 800 независимых испытаний.

Ответ: $P(|X-200|<50)\ge 0{,}94.$

Теорема Чебышёва. Если для последовательности попарно независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$ все дисперсии $D_{x_1}, D_{x_2}, ..., D_{x_n}$ равномерно ограничены, то с вероятностью сколь угодно близкой к единице среднее арифметическое n случайных величин из этого ряда сколь угодно мало отличается от среднего арифметического их математических ожиданий, если n достаточно велико.

Доказательство: Введем X – случайную величину, равную средне-арифметическому заданных случайных величин

$$X = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} \tag{4.1}$$

Найдём математическое ожидание этой случайной величины X.

$$M[X] = M\left[\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n}(m_{x_1} + m_{x_2} + ... + m_{x_n})$$

и дисперсию

$$\begin{aligned} D[X] &= D\left[\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} D[X_1 + X_2 + ... + X_n] \\ &= \frac{1}{n^2}[D_1 + D_2 + ... + D_n] \le \frac{nD}{n^2} = \frac{D}{n} \end{aligned} \tag{5.1}$$

где $D_i \le D$, а D - верхняя граница величины рассеяния случайной величины.

Применим лемму Чебышёва к величине X, то есть $P(|X - m_x| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2}$. Тогда

$$P\left[\left|\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{n}\right| < \varepsilon\right] \ge 1 - \frac{D_x}{\varepsilon^2} \ge 1 - \frac{D}{n\varepsilon^2}$$

Обозначим через $\overline{X}$ - среднее арифметическое последовательности случайных величин.
Отсюда и вытекает теорема Чебышёва

$$P\left[\left|\overline{X} - \frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{n}\right| < \varepsilon\right] \ge 1 - \frac{D}{n\varepsilon^2}, \tag{6.1}$$

так как при увеличении n вероятность указанной разности стремится к единице.

Замечание 1.1 Неравенство Чебышёва может быть записано в виде

$$P\left[\left|\overline{X} - \frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{n}\right| < \varepsilon\right] \ge 1 - \delta \tag{7.1}$$

где

$$\delta \ge \frac{D}{n\varepsilon^2} \qquad \text{или} \qquad n \ge \frac{D}{\delta\,\varepsilon^2} \tag{8.1}$$

Частный случай теоремы Чебышёва. Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ однотипны, то есть, имеют один и тот же закон распределения, и их математические ожидания и дисперсии совпадают $m_1 = m_2 = ... = m_n = M$ и $D_1 = D_2 = ... = D_n = D$, то есть, среднее арифметическое математических ожиданий

$$\frac{m_1 + m_2 + ... + m_n}{n} = M \tag{9.1}$$

и отсюда

$$P[|\overline{X} - M| < \varepsilon] > 1 - \delta, \text{ где } \delta \ge \frac{D}{n\varepsilon^2} \tag{10.1}$$

Пример 7.1 Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$

задана законом распределения

Таблица 2.1

X_n	$-n\alpha$	0	$n\alpha$
p	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$	$1/(2n^2)$

Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышёва?

Решение. Для того, чтобы к последовательности случайных величин была применима теорема Чебышёва, достаточно, чтобы эти величины были попарно независимы, имели конечные математические ожидания и равномерно ограниченные дисперсии.

Поскольку случайные величины независимы, то они подавно попарно независимы, то есть первое требование теоремы Чебышёва выполнено.

Конечны ли математические ожидания?

$$M(X_n) = -n\alpha \cdot (1/2n^2) + 0 \cdot (1-1/n^2) + n\alpha \cdot (1/2n^2) = 0$$

Таким образом, каждая случайная величина имеет конечное (равное нулю) математическое ожидание и второе требование теоремы тоже выполнено.

Выполняется ли требование равномерной ограниченной дисперсии?

Получим квадраты значений случайных величин

Таблица 3.1

X_n^2	$n^2\alpha^2$	0	$n^2\alpha^2$
p	$1/(2n^2)$	$1-1/n^2$	$1/(2n^2)$

Отсюда можно соединить равные значения

Таблица 4.1

X_n^2	$n^2\alpha^2$	0
p	$1/n^2$	$1-1/n^2$

Тогда $M(X_n{}^2) = n^2\alpha^2 \cdot 1/n^2 = \alpha^2$

$$D(X_n) = M(X_n{}^2) - [M(X_n)]^2 = \alpha^2 - 0^2 = \alpha^2.$$

Дисперсия равномерно ограничена, так как равна α^2, и выполнено третье требование теоремы.

Итак, так как все три требования теоремы выполнены, теорема Чебышёва применима к этой последовательности случайных величин.

Для самостоятельно решения

Пример 8.1 Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ задана законом распределения

Таблица 5.1

X_n	$n+1$	$-n\ 0$
p	$n/(2n+1)$	$(n+1)/(2n+1)$

а) Убедиться, что требование теоремы Чебышёва о равномерной ограниченности дисперсий не выполняется; б) можно ли отсюда заключить, что к рассматриваемой последовательности теорема Чебышёва неприменима?

Ответ. а) $D(X_n) = (2n^3 + 3n^2 + n) \cdot (2n+1)$ неограниченно возрастает, б) нельзя, так как требование равномерной ограниченности дисперсии не выполнено.

Предел по вероятности

Определение 1.1 Говорят, что случайная величина U_n при $n \to \infty$ стремится **по вероятности** к числу **A**, если для любых, наперёд заданных и сколь угодно малых положительных чисел ε и δ можно указать такое положительное число N, начиная с которого выполняется неравенство

$$P\left[\left|U_n - A\right| < \varepsilon\right] > 1 - \delta \tag{11.1}$$

и обозначают $U_n \underset{n\to\infty}{\to} A$ **по вероятности**.

Замечание 2.1 **«Предел по вероятности»** означает, что чаще всего $U_n \underset{n\to\infty}{\to} A$

Замечание 3.1 Отсюда **частный случай теоремы Чебышёва** может быть прочитан так**:** среднее арифметическое однотипных случайных величин, независимых в своей совокупности, стремится по вероятности к их общему математическому ожиданию при условии, что число этих случайных величин стремится к бесконечности.

Пример 9.1 **(**на теорему Чебышева**)**: По маленькой мерке зерна (100 – 200 грамм), содержащей сотни зёрен, судят о качестве всей партии, если мерки берут из разных мест.

Следствия из теоремы Чебышёва

Теорема Пуассона. Если производится n независимых опытов и вероятность появления события A в каждом опыте равна p_i, то при увеличении n, частота $\frac{m^*}{n}$ события A **сходится по вероятности** к среднему арифметическому вероятностей p_i.

Доказательство: Рассмотрим случайную величину X_k, где $X_k = 1$, если появится событие А, и $X_k = 0$, если А не появится. Закон распределения величины X_k такой

Таблица 6.1

X_k	0	1
p	$1 - p_k$	p_k

Математическое ожидание

$$M[X] = 0 \cdot (1 - p_k) + 1 \cdot p_k = p_k \tag{12.1}$$

Дисперсия

$$\begin{aligned} D[X] &= (0 - m_k)^2 \cdot (1 - p_k) + (1 - m_k)^2 \cdot p_k = \\ &= m_k^2 \cdot (1 - p_k) + (1 - m_k)^2 \cdot p_k = p_k^2 \cdot (1 - p_k) + (1 - p_k)^2 \cdot p_k = \\ &= p_k^2 - p_k^3 + p_k - 2p_k^2 + p_k^3 = p_k - p_k^2 = p_k(1 - p_k) \end{aligned} \tag{13.1}$$

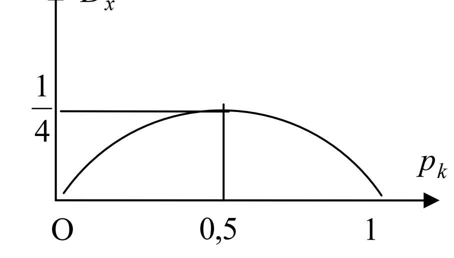


Рис. 2.1 К выводу формулы 14.1

Из уравнения $D_x = p_k(1 - p_k)$ видно, что это парабола $D_x = p_k(1 - p_k)$, максимум которой находится в точке $p_k = \frac{1}{2}$ и равен $D_x = \frac{1}{4}$, что показано на рисунке 2.1. Тогда очевидно, что дисперсия ограничена $D_x \le \frac{1}{4}$. Формула (6.1) в этом случае принимает вид

$$P\left[\left|\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}-\frac{m_1+m_2+...+m_n}{n}\right|<\varepsilon\right]\geq 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2} \qquad (14.1)$$

Если число удачных опытов m, то $X_1+X_2+...+X_n=m$ и тогда

$$P\left[\left|\frac{m}{n}-\frac{m_1+m_2+...+m_n}{n}\right|<\varepsilon\right]\geq 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}, \qquad (15.1)$$

но с учётом того, что все математические ожидания равны p_k, получим

$$P\left[\left|\frac{m}{n}-\frac{p_1+p_2+...+p_n}{n}\right|<\varepsilon\right]\geq 1-\frac{1}{4n\varepsilon^2}. \qquad (16.1)$$

При $n\to\infty$ $\frac{m_n}{n}$ стремится по вероятности к $\frac{p_1+p_2+...+p_n}{n}$, где $m_1=p_1, m_2=p_2,...,m_n=p_n$.

Пример 10.1 (**на теорему Пуассона**) Вероятность поражения цели в данном воздушном бою зависит от 1) дальности стрельбы, 2) ракурса цели, 3) высоты полёта, 4) скорости стреляющего самолёта, 5) скорости цели.

Решение. Комплекс условий слишком многочислен для того, чтобы определить частоту поражения цели в данном бою. И всё же частота будет устойчивой, так как она стремится к средней вероятности поражения цели, характерной для данной группы условий. Таким образом, **не делая массовых опытов, можно определить вероятность частоты поражения цели.**

Теорема Бернулли. Если производится n независимых опытов, в каждом из которых вероятность появления события А равна p, то при неограниченном увеличении числа опытов n частота $\frac{m^*}{n}$ события А сходится по вероятности к p.

Доказательство: Теорема Бернулли является следствием частной теоремы Чебышёва.

Рассмотрим один опыт

Таблица 7.1

X_k	0	1
p	q_k	p_k

Вероятности появления события А в каждом опыте равны, поэтому $m_1=m_2=...=m_n=p$, а дисперсия в каждом опыте $D_k=p(1-p)=pq$. Из формулы (6.1) получаем

$$P\left[\left|\overline{X}-p\right|<\varepsilon\right]\geq 1-\frac{D}{n\varepsilon^2} \qquad (17.1)$$

или

$$P\left[\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right]\geq 1-\frac{pq}{n\varepsilon^2} \qquad (18.1)$$

Вывод: Частота удачных опытов $\frac{m}{n}$ приближается к его вероятности в каждом отдельном опыте p при достаточно большом n с вероятностью сколь угодно близкой к единице.

§ 2. Предельные теоремы

Центральная предельная теорема Муавра – Лапласа. Пусть производится серия из n независимых опытов, в каждом из которых событие А может произойти с вероятностью p, пусть m - число удачных опытов в этой серии. Тогда случайная величина $\left(\frac{m-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}\right)$ распределена по закону, мало отличающемуся от нормального распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}, \qquad (1.2)$$

если только n достаточно велико.

Доказательство: Рассмотрим $\left(\frac{m-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}\right)$. Что в ней случайно? Только m, потому что n и p не являются случайными величинами. Найдём математическое ожидание величины $X=\frac{m-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}$.Если $m=n\,p$, то $m_X=0$, а дисперсия $D_X=D\left[\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right]=\frac{1}{npq}D[m]=\frac{npq}{npq}=1$. Тогда СКВО тоже $\sigma_X=1$.

Замечание 1.2 При биномиальном распределении, если $n\to\infty$, закон получается таким, что $\sigma_X=1$.

Используем формулу Лапласа для вероятности того, что $a<X<b$ при $m_X=0$ и $\sigma_X=1$. Тогда

$$P(a<X<b)=\Phi_o\left(\frac{b-m_x}{\sigma_x}\right)-\Phi_o\left(\frac{a-m_x}{\sigma_x}\right)=\Phi_o(b)-\Phi_o(a) \qquad (2.2)$$

Отсюда получается **формула Муавра – Лапласа** в виде

$$P(a<\frac{m-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}}<b)=\Phi_o(b)-\Phi_o(a) \qquad (3.2)$$

Замечание 2.2 Выражение (2.2) можно записать в виде

$$P(n\,p+a\sqrt{n\,p\,q}<m<n\,p+b\sqrt{n\,p\,q})=\Phi_o(b)-\Phi_o(a) \qquad (4.2)$$

Замечание 3.2 Иногда вводят обозначения

$$k_1=n\,p+a\sqrt{n\,p\,q},\quad k_2=n\,p+b\sqrt{n\,p\,q} \qquad (5.2)$$

и отсюда

$$a=\frac{k_1-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}},\quad b=\frac{k_2-n\,p}{\sqrt{n\,p\,q}} \qquad (6.2)$$

Тогда формула (3.2) для практического использования имеет вид

$$P(k_1<m<k_2)=\Phi_o\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi_o\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right) \qquad (7.2)$$

Замечание 4.2 Эта формула имеет смысл

$$P(k_1 < m < k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (8.2)$$

Пример 1.2 (**на формулу Муавра – Лапласа).** Вероятность выхода из строя машины за время испытаний $p = 0{,}05$. Какова вероятность того, что за время испытаний 100 изделий выйдут из строя от 5 до 10 изделий?

Решение. Математическое ожидание $m_x = np = 5$. СКВО $\sigma_x = \sqrt{npq} = \sqrt{4{,}75} \approx 2{,}18$. Используем формулу (7.2). Тогда

$$P(5 \le m \le 10) = \Phi_o\left(\frac{10-5}{2{,}18}\right) - \Phi_o\left(\frac{5-5}{2{,}18}\right) = 0{,}489 - 0 = 0{,}489$$

Применение приближённых формул Пуассона и Муавра –Лапласа

Формула Пуассона

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \qquad (9.2)$$

Локальная формула Муавра – Лапласа

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (10.2)$$

Интегральная формула Муавра – Лапласа

$$P(m_1 < \mu < m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) \qquad (11.2)$$

Рекомендация 1. Если число испытаний $n = 10 - 20$, то приближённые формулы используются для грубых прикидочных расчётов. При этом формула Пуассона применяется в том случае, когда $\lambda = np$ или $\lambda' = nq$ изменяются в пределах от 0 до 2 (при $n = 10$) до 0 – 3 (при $n = 20$). В противном случае необходимо пользоваться формулами Муавра – Лапласа.

Рекомендация 2. Если $n = 20 - 100$, то приближённые формулы уже можно использовать для прикладных инженерных расчётов. Формулу Пуассона рекомендуется применять, когда $\lambda = np$ или $\lambda' = nq$ заключены в пределах 0 – 3 ($n = 20$) – 0-5 ($n = 100$).

Рекомендация 3. Если $n = 100 - 1000$, то практически при любых инженерных расчётах можно обойтись приближёнными формулами. Формула Пуассона используется, когда $\lambda = np$ или $\lambda' = nq$ изменяются в следующих пределах 0 – 5 ($n = 100$) – 0-10 ($n = 1000$).

Рекомендация 4. При $n > 1000$ даже специальные таблицы рассчитываются с помощью приближённых формул (со специальными поправками для увеличения точности). В этом случае для применения формулы Пуассона необходимо, чтобы $\lambda = np$ или $\lambda' = nq$ лежали в пределах 0 – 10 и более.

Замечание 5 2 **(о погрешностях).** Приближённые формулы гарантируют только **малую абсолютную погрешность**, но **относительная погрешность**, то есть, отношение величин, связанных знаком $\approx$, **может быть сколь угодно большой**.

1) При использовании формулы Пуассона для вычисления биномиальных вероятностей $P_n(m)$ относительная погрешность имеет тенденцию к увеличению с ростом m.

2) В формулах Муавра-Лапласа относительная погрешность увеличивается с ростом абсолютного значения $|x| = \left|(m - np)\big/\sqrt{npq}\right|$, причём в интегральной формуле Муавра – Лапласа такое увеличение происходит только в том случае, когда $x_1 = (m_1 - np)\big/\sqrt{npq}$ и $x_2 = (m_2 - np)\big/\sqrt{npq}$ имеют одинаковый знак.

Примеры на использование формулы Бернулли

Пример 2.2 Частица пролетает последовательно мимо 6 счётчиков. Каждый счётчик, независимо от остальных отмечает её пролёт с вероятностью $p = 0{,}8$. Частица считается зарегистрированной (событие А) , если она отмечена не менее чем двумя счётчиками. Найти вероятность зарегистрировать частицу.

Решение. В соответствии с аксиомой сложения искомую вероятность $P(A)$ можно представить в виде

$$P(A) = P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) + P(A_6),$$

где A_1 – событие, заключающееся в том, что частица отмечена ровно i счётчиками. Для определения $P(A_i)$ можно было бы воспользоваться формулой Бернулли, однако мы предварительно перейдём к противоположному событию $\overline{A}$ - частица либо не отмечена ни одним счётчиком, либо отмечена только одним счётчиком. Тогда

$$P(\overline{A}) = P(A_o) + P(A_1) = P_6(0) + P_6(1) = C_6^0 p^0 q^6 + C_6^1 p^1 q^5 =$$

$$= (0{,}2)^6 + 6 \cdot 0{,}8 \cdot (0{,}2)^5 = 0{,}0016$$

и

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}9984$$

Пример 3.2 Счётчик регистрирует попадающие в него частицы с вероятностью $p = 0{,}9$ Найти вероятность $P_{10}(m)$ того, что он зарегистрировал m $(m = 1,2,...,10)$ частиц при условии, что в него попало 10 частиц.

Решение. а) Сначала воспользуемся формулой Бернулли, в соответствии с которой

$$P_{10}(m) = C_{10}^m 0{,}9^m 0{,}1^{10-m}$$

Результаты расчётов приведены в таблице 1.2 в графе «Точное значение $P_{10}(m)$»

б.) Используем приближённые формулы. В нашем случае $\lambda = np = 9$ велико, но $\lambda' = nq = 1$ мало и, значит, рекомендации советуют воспользоваться формулой Пуассона, но по отношению к незарегистрированным частицам. В соответствии с этой формулой

$$P_{10}(m) = 1^{10-m} e^{-1} /(10-m)! = P(10-m, 1)$$

По таблице приложений для значений

$$P(m,\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

находим

$$P_{10}(10) \approx P(0;1) = 0{,}36788, \quad P_{10}(9) \approx P(1;1) = 0{,}36788,$$

и т.д. В таблице 1.2 эти значения приведены в столбце с названием «Значения по формуле Пуассона»

В этой же таблице даны «погрешности».

Таблица 1. 2

m	Точное значение $P_{10}(m)$	Значение, полученное по формуле Пуассона	Погрешность
0			
1			
2		0,00001	0,00001
3	0,00001	0,00007	0,00006
4	0,00014	0,00051	0,00037
5	0,00140	0,00307	0,00158
6	0,01110	0,01533	0,00417
7	0,05740	0,06131	0,00391
8	0,19371	0,18394	-0,00977
9	0,38742	0,36788	-0,01954
10	0,34868	0,36788	0,01920

Анализ. Максимальная абсолютная погрешность 0,01954 невелика, чего нельзя сказать о максимальной относительной погрешности. В частности, приближённое значение 0,00051 вероятности $P_{10}(4)$, вычисленное по формуле Пуассона, почти в 4 раза больше истинного значения 0,00014 этой вероятности.

Наконец, воспользуемся локальной формулой Муавра – Лапласа, хотя это не рекомендуется делать. Тогда $P_{10}(m)$ мы должны заменить числом $\varphi(x)/\sqrt{10\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}$, где $x_m=(m-10\cdot 0{,}9)/\sqrt{10\cdot 0{,}9\cdot 0{,}1}$, а $\varphi(x)$ - плотность стандартного нормального распределения. Для вычислений использована таблица приложений $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ и результаты приведены в таблице 2.2.

Таблица 2. 2

m	Точное значение $P_{10}(m)$	x_m	$\varphi(x_m)$	Значение, полученное по локальной формуле Муавра-Лапласа	Погрешность
0		-9,49			
1		-8,43			
2		-7,38			
3	0,00001	-6,32			- 0,00001
4	0,00014	-5,27			- 0,00014
5	0,00140	-4,22	0,00006	0,00006	- 0,00143
6	0,01110	-3,16	0,00271	0,00286	- 0,00830
7	0,05740	-2,11	0,4307	0,4540	- 0,01200
8	0,19371	-1,05	0,22988	0,24231	0,04860
9	0,38742	0,00	0,39894	0,42052	0,03310
10	0,34868	1,05	0,22988	0,24231	- 0,10637

Анализ. Как и следовало ожидать, локальная формула Муавра – Лапласа даёт большие погрешности.

Пример 4.2 Производится 10 подбрасываний симметричной монеты. Найти вероятность того, что выпадет ровно m $(m=1,2,...,10)$ «гербов».

Решение. Как и в предыдущем примере, сначала по формуле Бернулли $P_{10}(m)=C_{10}^m 0{,}5^m 0{,}5^{10-m}$ вычислим точные значения этих вероятностей. А потом воспользуемся приближёнными формулами. В данном примере $\lambda=np=5$ и $\lambda'=nq=5$, поэтому применим формулу Муавра-Лапласа, в которой $\sqrt{npq}=\sqrt{10\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}\equiv 1{,}5811$, и для m «гербов» $x_m=(m-5)/\sqrt{10\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}\cong(m-5)/1{,}5811$. Результаты приведены в таблице **3**. 2

Таблица 3. 2

m	Точное значение $P_{10}(m)$	x_m	$\varphi(x_m)$	Значение, полученное по локальной формуле Муавра-Лапласа	Погрешность
0	0,00098	-3,16	0,00271	0,00171	0,00073
1	0,00977	-2,53	0,01625	0,01025	0,00051
2	0,04395	-1,90	0,06562	0,04150	-0,00245
3	0,11719	-1,26	0,18037	0,11408	-0,00311
4	0,20508	-0,63	0,32713	0,20690	0,00182
5	0,24609	0,00	0,39894	0,25231	0,00622
6	0,20508	0,63	0,32713	0,20690	0,00182
7	0,11719	1,26	0,18037	0,11408	-0,00311
8	0,04395	1,90	0,06562	0,04150	-0,00245
9	0,00977	2,53	0,01625	0,01028	0,00051
10	0,00098	3,16	0,00271	0,00171	0,00073

Анализ. Из таблицы видно, что и в этом случае максимальная абсолютная погрешность 0,00622 по отношению к максимальному значению $P_{10}(5)=0{,}24609$ вероятности $P_{10}(m)$ достаточно мала.

Самостоятельно посчитать по формуле Пуассона и убедиться в том, что она даёт существенно большие погрешности.

Пример 5.2 В тираже «Спортлото 6 из 49» участвуют 10 000 000 карточек. Найти вероятность события A – хотя бы в одной из карточек зачёркнуты 6 выигрышных номеров (максимальный выигрыш)

Решение. Естественно сразу же перейти к противоположному событию $\overline{A}$ - ни на одну карточку не выпадет максимальный выигрыш. Считая, что в каждой из карточек номера зачёркиваются случайным образом и независимо от остальных, видим, что число карточек, на которые выпал максимальный выигрыш, подчиняется биномиальному закону с параметрами $n = 10\,000\,000$ и $p = 7 \cdot 10^{-8}$.

Замечание 6. 2 Вероятность вычисляется по формуле случайной выборки

$$p = \frac{C_6^6 C_{43}^0}{C_{49}^6} \cong 7 \cdot 10^{-8}$$

Поскольку $\lambda = np = 0{,}7$, то для определения $P(\overline{A})$ воспользуемся формулой Пуассона. Тогда $P(\overline{A}) = P_n^0 \approx P(0; 0{,}7)$. Из таблицы приложений получаем $P(0; 0{,}7) = 0{,}49659$, и, значит, $P(A) \approx 0{,}50341$.

Ответ. Вероятность того, что хотя бы одна карточка окажется выигрышной, чуть больше 0,5.

Теорема Ляпунова о нормальном законе распределения.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n$ - независимые случайные величины с математическими ожиданиями $m_1, m_2, ..., m_n$ и дисперсиями $D_1, D_2, ..., D_n$ и третьими абсолютными центральными моментами

$$b_k = \mu_3[X_k] = M\left[|X_k - m_k|^3\right], \text{ где } k = 1,2,3...n \qquad (12.2)$$

Рассмотрим сумму этих величин

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad (13.2)$$

Отсюда вытекает теорема Ляпунова в виде:

Теорема Ляпунова. Если выполнено условие $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} b_k}{\sigma_x^3} = 0$, где $\sigma_x = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D_k}$ - среднее квадратичное отклонение величины *X*, то при $n \to \infty$ закон распределения величины *X* неограниченно приближается к нормальному закону.

Замечание 7.2 В большинстве практических задач случайная величина является функцией очень большого числа случайных величин, поэтому по теореме Ляпунова она подчиняется нормальному закону распределения.

Пример 7.2 Ошибка отклонения от курса самолёта, автомобиля, корабля и т.п. всегда зависит от такого большого количества факторов, связанных с конструкцией, измерительной аппаратурой, состоянием внешней среды и состоянием водителя, что её в соответствии с теоремой Ляпунова всегда можно считать, подчиняющейся нормальному закону.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 Элементы комбинаторики

Перестановки

Пусть множество состоит из одной буквы А. В этом случае мы можем получить одну перестановку. Второе множество состоит из буквы А и буквы В. В этом случае мы можем

составить две комбинации АВ и ВА - две перестановки. Из трёх букв А, В и С можно составить АВС, ВАС, АСВ, ВСА, САВ и СВА – шесть перестановок.
Определение 1. **Установленный** в конечном множестве **порядок** называется **перестановкой** его элементов.
Задача заключается в том, чтобы рассчитать **число перестановок** P_n из n элементов.

Из рассмотренных выше примеров видно, что

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 2, \quad P_3 = 6$$

Отсюда легко видеть, что при увеличении числа элементов на один элемент для получения числа перестановок нужно число перестановок из $n-1$ элементов умножить на n, то есть,

$$P_n = n \cdot P_{n-1} \qquad (1)$$

или

$$P_2 = 2 \cdot P_1 = 2 \cdot 1 = 2!$$
$$P_3 = 3 \cdot P_2 = 3 \cdot 2! = 3!$$
$$P_4 = 4 \cdot P_3 = 4 \cdot 3! = 4!$$
....
$$P_n = n \cdot P_{n-1} = n \cdot (n-1)! = n!$$

Отсюда: **число перестановок** равно **факториалу** числа элементов множества.

$$\boxed{P_n = n!} \qquad (2)$$

Замечание 1. Нужно помнить, что факториал нуля равен единице $0! = 1$, поэтому принимают $P_0 = 1$, хотя из ничего нельзя составить ни одной перестановки.

Размещения

Определение 2. Множество называется упорядоченным, если вместе с элементами указан порядок расположения этих элементов.

Пусть заданы элементы A, B, C, D. Сколько упорядоченных множеств по две буквы можно из него составить?

$$AB, BA, AC, CA, AD, DA, BC, CB, CD, DC, BD, DB$$

Получилось 12 разных размещений.

Определение 3. **Размещениями** из n элементов по m называются **конечные упорядоченные множества.**

Сколько существует размещений A_n^m из n элементов по m?

В вышеприведенном примере $A_4^2 = 12$.

Из n элементов по одному можно получить только n размещений, то есть, $A_n^1 = n$.
Легко понять, что из n элементов по 2 можно составить в $n-1$ раз больше, потому что к каждому элементу можно добавить из оставшихся $n-1$ элемент.

Посчитаем, каким количеством способов можно разместить $m+1$ элемент, выбрав их из n. Допустим, что известно число размещений A_n^m из n элементов по первым m .местам. Из оставшихся $n-m$ элементов можно каждый добавить к каждой группе из m элементов, то есть, поставить на $m+1$ место к каждой группе. Следовательно таких размещений

$$A_n^{m+1} = (n-m)\cdot A_n^m \tag{3}$$

Тогда

$$A_n^1 = n, \quad A_n^2 = (n-1)\cdot n, \quad A_n^3 = (n-2)\cdot(n-1)\cdot n$$

$$A_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)....(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$\boxed{A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}} \tag{4}$$

Здесь добавляется $A_n^o = 1$ для полноты ряда. Формула (4) и есть формула расчёта размещений из n элементов по m. Кроме того, число размещений из n элементов по n равно числу перестановок $A_n^n = P_n = n!$

Сочетания

Рассмотрим все подмножества множества A, B, C и пустого множества $\varnothing$. Из этого множества можно получить три множества по одному $\{A\}$, $\{B\}$, $\{C\}$; три множества по два $\{AB\}$, $\{AC\}$, $\{BC\}$; и одно множество по три элемента $\{ABC\}$. В отличие от размещений, в сочетаниях выбираются такие множества, которые отличаются от других хотя бы одним элементом.

Определение 4. Сочетаниями называются такие конечные множества из m элементов, выбранных из n, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Замечание 2. В отличие от размещений, в сочетаниях выбираются такие множества, которые отличаются от других хотя бы одним элементом.

Из написанного выше можно записать

$$C_3^1 = 3, \quad C_3^2 = 3, \quad C_3^3 = 1$$

Легко понять, что сочетаний меньше, чем размещений. Можно получить формулу для расчёта числа сочетаний, если число размещений n элементов по m разделить на число перестановок в каждой группе, то есть, на $P_m = m!$. Отсюда получается формула числа сочетаний из n элементов по m .в виде

$$\boxed{C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}} \tag{5}$$

Можно эту формулу доказать иначе.
Рассмотрим случай, когда $n=3, \quad m=2$. Мы уже знаем, что

$$C_3^2 = 3\,.$$

Каждое входящее множество можно упорядочить

$$P_2 = 2! = 2$$

числом способов. Это даст $3\cdot 2$ размещения, то есть $A_3^2 = 3! = 6$.

a) Выделить каких-либо m элементов из n можно C_n^m способами;

б) Упорядочить m элементов можно P_m способами.

Всего будет $C_n^m\, P_m$ упорядоченных множеств $A_n^m = C_n^m \cdot P_m$. Откуда

$$\boxed{C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}} \text{ ч.т.д.}$$

Пример.1 Сколько подмножеств, отличающихся хотя бы одним элементов можно оставить из 6 элементов?

Решение: для этого нужно рассмотреть все возможные сочетания

$$C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 =$$

$$= 1 + \frac{6!}{(6-1)!\cdot 1!} + \frac{6!}{(6-2)!\cdot 2!} + \frac{6!}{(6-3)!\cdot 3!} + \frac{6!}{(6-4)!\cdot 4!} + \frac{6!}{(6-5)!\cdot 5!} + \frac{6!}{(6-6)!\cdot 6!} =$$

$$= 1 + \frac{6!}{5!\cdot 1!} + \frac{6!}{4!\cdot 2!} + \frac{6!}{3!\cdot 3!} + \frac{6!}{2!\cdot 4!} + \frac{6!}{1!\cdot 5!} + \frac{6!}{0!\cdot 6!} = 1 + \frac{6}{1} + \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} + \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} + \frac{6}{1} + \frac{1}{1}$$

$$= 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$$

Отсюда легко видеть, что в силу симметрии справедливо равенство

$$\boxed{C_n^m = C_n^{n-m}} \qquad (6)$$

Формула сочетаний используется в **биноме Ньютона**, который имеет такой вид:

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0\, a^n b^0 + C_n^1\, a^{n-1} b^1 + C_n^2\, a^{n-2} b^2 + ... + C_n^{n-2}\, a^2 b^{n-2} + C_n^1\, a^{n-1} b^1 + C_n^n a^0 b^n} \quad (7)$$

Предлагается из формулы (7) получить формулы квадрата и куба суммы ($a+b$), то есть, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ или $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Пример 2.2 Сколько разных сигналов N можно передать, имея 6 флажков разного цвета?

Решение. Задача решается с помощью формулы размещений, потому что перестановка флажков позволяет получить новый сигнал. Так что

$$N = A_6^1 + A_6^2 + A_6^3 + A_6^4 + A_6^5 + A_6^6$$

с учётом формулы (4) $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$ получим

$$N = \frac{6!}{5!} + \frac{6!}{4!} + \frac{6!}{3!} + \frac{6!}{2!} + \frac{6!}{1!} + \frac{6!}{0!} = 6 + 6\cdot 5 + 6\cdot 5\cdot 4 + 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 + 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 + 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= 6 + 30 + 120 + 360 + 720 + 720 = 1956$$

Ответ: 1956 сигналов.

Пример 3.2 Имеется 10 претендентов на три места. Какое количество разных комбинаций можно составить для занятия этих мест.

Решение. Группы должны отличаться хотя бы одним человеком, поэтому искомое решение можно найти, используя формулу сочетаний

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$$

Ответ: можно составить 120 разных групп.

ГЛАВА 5 Математическая статистика

Теория вероятностей является теоретической частью прикладной науки - математической статистики, которая решает три основных задачи:

1. Систематизация результатов опыта.
2. Анализ опытных данных с целью получения приближённых значений основных числовых характеристик исследуемой случайной величины (корреляционный анализ, дисперсионный анализ).
3. Отыскание приближённого вида закона распределения случайной величины.

§ 1. Основные понятия

Предметом математической статистики является: создание научно обоснованных методов изучения **массовых явлений на основе наблюдений**. Математическая статистика является собранием правил, с помощью которых по малому количеству данных можно судить о свойствах большой совокупности.

Определение 1.1 **Генеральной совокупностью** называется множество объектов, обладающих количественным признаком X, распределение которого изучается. Количество объектов, входящих в генеральную совокупность, обозначается N и называется **объёмом совокупности**.

Определение 2.1 **Выборкой** называется множество тех объектов , которые выбраны из генеральной совокупности и для которых признак X практически наблюдается. Количество объектов выборки обозначается n и называется **объёмом выборки**.

Замечание 1.1 Если N велико, то полагают его для упрощения задачи равным **бесконечности**.

Оценки параметров распределения

Замечание 2.1 Существуют два вида оценок: а) точечные и б) интервальные.

Точечная оценка главных параметров распределения

Замечание 3.1 К главным параметрам относятся a – математическое ожидание, σ^2 - дисперсия, R_{xy} - корреляционный момент.

Пусть даны генеральная совокупность

$$x_1, x_2, x_3 ..., x_N \qquad (1.1)$$

и выборка

$$x_1, x_2, x_3 ..., x_n \text{ (наблюдённые значения).} \qquad (2.1)$$

Замечание 4.1 По выборке **нельзя** получить a, σ^2, R_{xy}, но **можно** получить **оценку.**

Замечание 5.1 Существуют два способа оценивания:

1- ый способ – **способ моментов** оценивания параметров распределения;

2- ой способ – **метод наибольшего правдоподобия**.

Способ моментов

I. Математическое ожидание. Для определения математического ожидания a нужно умножить каждое значение x_i на его вероятность, а результаты сложить. Отсюда получается расчётная формула в виде

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}, \qquad (3.1)$$

где принимается $p_i = 1/N$, так как все значения x_i равновозможны.

Метод моментов рекомендует принимать оценку математического ожидания в виде

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{4.1}$$

Замечание 6.1 Следует учесть, что оценка не равна математическому ожиданию $\bar{x} \neq a$, но имеет близкое значение, то есть $\bar{x} \approx a$.

I I. Дисперсия. Для определения дисперсии генеральной совокупности аналогично имеем формулу

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} (x_i - a)^2}{N} \tag{5.1}$$

За **оценку** принимают **выборочную** (или **статистическую)** дисперсию

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n} \tag{6.1}$$

Замечание 7.1 Параметры a и σ_x^2, найденные по генеральной совокупности, **не являются** случайными числами. Оценки $\bar{x}$ и S_x^2 - являются случайными (так как случайной является выборка), а это значит, что их нужно рассматривать как **случайные величины**.

Метод наибольшего правдоподобия

Замечание 8.1 Этот метод точнее и научнее, чем метод моментов.

Пусть $f(x,\theta)$ - плотность распределения, которая зависит от некоторого параметра θ. Тогда вероятность того. что значение x_1 попало на интервал $(x_1, x_1 + \Delta x_1)$, x_2 попало на интервал $(x_2, x_2 + \Delta x_2)$ и т.д.равна

$$P\begin{pmatrix} x_1 < X_1 < x_1 + \Delta x_1 \\ x_2 < X_2 < x_2 + \Delta x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n < X_n < x_n + \Delta x_n \end{pmatrix} = f(x_1,\theta)\Delta x_1 \cdot f(x_2,\theta)\Delta x_2 \cdot \ldots \cdot f(x_n,\theta)\Delta x_n \tag{7.1}$$

где $f(x_i,\theta)\Delta x_i$ является элементом вероятности появления значения X_i.

Формула (7.1) выражает вероятность того, что всё распределилось так, как в выборке.

Определение 3.1 **Функцией правдоподобия** называется произведение всех плотностей распределения, входящих в формулу (7.1)

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = f(x_1,\theta) \cdot f(x_2,\theta) \cdot \ldots \cdot f(x_n,\theta) \tag{8.1}$$

В дискретном случае формула (8.1) имеет вид

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \theta) = p(x_1,\theta) \cdot p(x_2,\theta) \cdot \ldots \cdot p(x_n,\theta) \tag{8'.1}$$

Замечание 9.1 В **функции правдоподобия** элементы выборки $x_1, x_2, x_3 \ldots, x_n$ являются **фиксированными** параметрами, а θ - **аргументом** (а не истинным значением неизвестного параметра).

Функция правдоподобия представляет собой не что иное, как **вероятность** (в случае непрерывной случайной величины – это плотность распределения) получить именно ту выборку $x_1, x_2, x_3..., x_n$, которую бы мы реально имели, если бы значение неизвестного параметра равнялось θ. Естественно поэтому **в качестве оценки** неизвестного параметра θ выбрать то значение θ^*, которое доставляет **наибольшее** значение функции правдоподобия $L(x_1, x_2,...., x_n, \theta)$, то есть, то значение параметра θ, которое имеет **наибольшую вероятность**..

Определение 4.1 **Оценкой наибольшего правдоподобия** называется такое значение θ^*, для которого

$$L(x_1, x_2,...., x_n, \theta^*) = \max_{\theta} L(x_1, x_2,...., x_n, \theta)$$

Замечание 10.1 При практической реализации метода наибольшего правдоподобия удобно пользоваться не самой функцией правдоподобия, а **её логарифмом**.

Определение 5.1 **Уравнением правдоподобия** называется уравнение

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \text{ или } \frac{\partial}{\partial \theta} \ln L(x_1, x_2,...., x_n, \theta) = 0 \qquad (9.1)$$

В качестве примера определения критической точки рассмотрим случайную величину, подчиняющуюся нормальному закону.

$$f(x, a, \sigma_x^2) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad (10.1) .$$

Тогда функция правдоподобия имеет вид

$$L = \frac{1}{(\sqrt{\sigma_x^2}\sqrt{2\pi})^n} e^{\frac{-\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-a)^2}{2\sigma_x^2}} \qquad (11.1)$$

где n - объём выборки. Тогда логарифм получается в виде

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln \sigma_x^2 - \frac{1}{2\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \frac{n}{2}\ln(2\pi) \qquad (12.1)$$

Возьмём производную по интересующему нас параметру, в данном случае по математическому ожиданию *a,* и положим эту производную равной нулю. Тогда.

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial a} = \frac{1}{\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = 0 \qquad (13.1)$$

Отсюда **оценка математического ожидания** из равенства нулю $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - a) = 0$ получается равной[2]

$$a \cong \bar{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}, \qquad (14.1)$$

как из метода моментов.

Для того, чтобы получить **оценку дисперсии**, берём производную по σ_x^2 выражения (12.1)

$$\frac{\partial(\ln L)}{\partial \sigma_x^2} = -\frac{n}{2\sigma_x^2} + \frac{1}{2\sigma_x^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = 0 . \qquad (15.1)$$

[2] Следует учесть, что $\sum\limits_{i=1}^{n} a = n\,a$, так как нужно n раз сложить *a*.

Отсюда получаем оценку дисперсии в виде

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2}{n} \cong \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n} \tag{16.1}$$

где σ_x^2 - дисперсия признака должна быть получена для **генеральной совокупности**. Для этого вводится **выборочное среднее** $\sigma_{\overline{x}}^2$

Выборочное среднее $\sigma_{\overline{x}}^2$

Определение 6.1 Для того, чтобы получить **выборочное среднее** $\sigma_{\overline{x}}^2$, необходимо сделать **все возможные выборки** из генеральной совокупности и тогда

$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\left[\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + ... + \sigma_{x_n}^2 + 2K_{x_1 x_2} + ... + 2K_{x_{n-1}x_n}\right] \tag{17.1}$$

Замечание 11.1 Здесь следует помнить, что

$$\sigma_{\overline{x}}^2 = D\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}\right]. \tag{18.1}$$

- дисперсия средне-арифметического всех замеренных значений.

Условия зависимости и независимости выборок

Определение 7. 1 Выборки принимаются **независимыми** в следующих случаях:

1. если выборка **возвратна**, тогда генеральная совокупность **сохраняется** для каждой следующей выборки;
2. если генеральная совокупность **бесконечна**, $N \to \infty$. В этом случае получается связь между средне-выборочной оценкой $\sigma_{\overline{x}}^2$ и оценкой σ_x^2 в виде

$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{1}{n^2}\left[\sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + ... + \sigma_{x_n}^2\right] = \frac{n\sigma_x^2}{n^2} = \frac{\sigma_x^2}{n} \tag{19.1}$$

И тогда получается формула

$$\boxed{\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}} \tag{20.1}$$

которая широко используется в математической статистике.

Определение 8. 1 Выборки **зависимы**,

1. если выборка **безвозвратна**, то есть генеральная совокупность **меняется** перед каждой следующей выборкой;
2. если N - **небольшое** число.

В этом случае связь между оценкой дисперсии и её выборочной средней имеет вид

$$\sigma_{\overline{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}\frac{N-n}{N-1} \tag{21.1}$$

Из этой формулы при $N \to \infty$ получается зависимость (20.1).

Замечание 12.1 Из формулы (20.1) легко видеть, что для увеличения точности оценки σ_x в два раза необходимо увеличить объём выборки n в 4 раза.

Требования к оценке параметра

Требование 1. Оценка θ должна быть **несмещённой (должна отсутствовать систематическая ошибка)**

Определение 9.1 Смещением оценки θ^* называется разность между математическим ожиданием оценки θ^* и оцениваемым параметром θ

$$\delta\theta = M[\theta^*] - \theta \tag{22.1}$$

Определение 10.1 Оценка называется **несмещённой**, если её математическое ожидание равно **оцениваемому параметру**, независимо от n - объёма выборки, то есть, чтобы математическое ожидание m_θ равнялось самой оценке

$$m_\theta = \theta \tag{23.1}$$

Проверка **несмещённости** оценки математического ожидания, полученного по средне-выборочной

$$m_{\bar{x}} = M\left[\frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}\right] = \frac{m_{x_1} + m_{x_2} + ... + m_{x_n}}{n} = \frac{n\,a}{n} = a = m_x \tag{24.1}$$

Вывод: математическое ожидание является **несмещённой** оценкой.

Проверка **несмещённости оценки дисперсии**

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[(x_i - a) - (\bar{x} - a)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - \frac{2}{n}(\bar{x} - a)\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) + \frac{1}{n}n(\bar{x} - a)^2 =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 + (\bar{x} - a)^2 - 2(\bar{x} - a)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - (\bar{x} - a)^2$$

Следует учесть, что

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - a) = \sum_{i=1}^{n}x_i - n\,a = n\bar{x} - na = n(\bar{x} - a)$$

Итак,

$$S_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - (\bar{x} - a)^2 \tag{25.1}$$

Откуда получается, если взять математическое ожидание от обеих частей равенства

$$M\left[S_x^2\right] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 - (\bar{x} - a)^2\right] = \sigma_x^2 - \sigma_{\bar{x}}^2 \tag{26.1}$$

то **математическое ожидание оценки дисперсии** равно

$$M\left[S_x^2\right]=\frac{n-1}{n}\sigma_x^2 \qquad (27.1)$$

и отсюда видно, что оценка S_x^2 дисперсии является **смещённой**.

Замечание 13.1 Для того, чтобы избежать ошибки, к оценке дисперсии вводится поправка в виде $n/(n-1)$. Тогда получается

$$\overline{S}_x^{\,2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2\cdot\frac{n}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}$$

и по результатам измерений получается дисперсия средне-выборочного в виде

$$\overline{S}_x^{\,2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1} \qquad (28.1)$$

Замечание 14.1 Всё это справедливо, если генеральная совокупность **очень велика**. Если генеральная совокупность не очень велика, то для учёта этого обстоятельства используется формула

$$\overline{S}_x^{\,2}=\left(1-\frac{1}{N}\right)\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}{n-1}, \qquad (29.1)$$

потому что тогда, как показано выше (формула 21.1),

$$\sigma_{\overline{x}}^2=\frac{\sigma_x^2}{n}\frac{N-n}{N-1}$$

Дисперсия оценки дисперсии

Если закон распределения нормальный, то дисперсия оценки определяется по формуле

$$D\left[S_x^2\right]=\sigma_{S_x^2}^2\cong\frac{2\sigma_x^4}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right), \qquad (30.1)$$

если математическое ожидание оценки дисперсии равно $M\left[S_x^2\right]=\frac{n-1}{n}\sigma_x^2$.

Если средняя ошибка оценивается по формуле

$$\sigma_x^2\approx S_x^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2 \text{ (то есть смещённая),}$$

то

$$\sigma_{S_x^2}^2\approx\sigma_x^2\sqrt{\frac{2}{n}} \qquad (31.1)$$

Если рассматривается оценка дисперсии средне-выборочного, то

$$\boxed{\sigma_{S_x^2}^2\approx\frac{2\sigma_x^4}{n-1}} \text{ или } \sigma_{S_x^2}\approx\sigma_x^2\sqrt{\frac{2}{n-1}} \qquad (32.1)$$

Состоятельность

Требование 2. Необходимо, чтобы оценка была **состоятельной.**

Определение 11.1 Оценка θ называется **состоятельной**, если при увеличении n - объёма выборки, эта оценка улучшается или если её случайная ошибка стремится к нулю, то есть при $n \to \infty$

$$D[оценки] \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad (33.1)$$

Сходимость оценки с ростом объёма выборки к оцениваемому параметру рассматривается разными способами: 1) по вероятности, 2) с вероятностью, равной единице, 3) в среднем квадратичном.

Замечание 15.1 Обычно рассматривается сходимость по вероятности.

$$P(\left|\theta^*_{(n)} - \theta\right| < \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1 \text{ или } P(\left|\theta^*_{(n)} - \theta\right| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad (34.1)$$

то есть, последовательность оценок $\theta^*_{(n)}$ зависит от объёма выборки n.

Несмещённость

Замечание 16.1 Для того, чтобы оценка была **состоятельной**, необходимо выполнение двух условий:

1. $\hat{\theta}_n$ - оценка должна быть **несмещённой**.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma^2_{\hat{\theta}} = 0$.

Генеральная средняя a имеет несмещённую оценку $\bar{x}$, а дисперсия $\sigma^2_{\bar{x}} = \dfrac{\sigma^2_x}{n} \to 0$, когда $n \to \infty$.

Отсюда получается, что $\bar{x}_n$ - состоятельная оценка a.

Дисперсия σ^2_x имеет смещённую оценку, но если берётся исправленная оценка дисперсии $\bar{S}^2_x$, то смещение исправлено и $\sigma^2_{S^2_x} \cong \dfrac{2\sigma^4_x}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) \to 0$, когда $n \to \infty$, то второе требование выполняется.

Замечание 17.1 S^2_x **- смещённая**, но **состоятельная** оценка.

Эффективность

Требование 3. Оценка должна быть **эффективной.**

Это требование выполняется только при сравнении нескольких оценок, полученных разными способами. **Из двух оценок эффективнее та,** у которой **наименьшая дисперсия,** поэтому рассматривается **отношение двух дисперсий**

$$l = \frac{\sigma^2_{\theta^*_1}}{\sigma^2_{\theta^*_2}} \qquad (35.1)$$

Если $l > 1$, то θ^*_2 эффективнее оценки θ^*_1, и наоборот,

Замечание 18.1 Дисперсию оценки невозможно свести к нулю, потому что всегда **существует нижняя отличная от нуля граница**.

Теорема Фреше. Пусть построены оценки θ^*_1, θ^*_2, …. и т.д. одного и того же параметра θ, и пусть все они несмещённые. Тогда дисперсии этих оценок ограничены снизу некоторым положительным числом ($\neq 0$), так что без конца улучшать эффективность оценки невозможно, то есть

$$\sigma^2_{\theta^*_n} \geq \frac{1}{I}, \text{ где } I = \left[\frac{L'_\theta(x,\theta)}{L(x,\theta)}\right]^2,$$ где I - это **информация Фишера.**

Замечание 19.1 Самая эффективная оценка должна иметь дисперсию $\sigma_x^2 = \frac{1}{I}$.

Замечание 20.1 Исследования показывают, что **наиболее точная** оценка - это **выборочное среднее** с дисперсией $\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n}$.

Интервальное оценивание главных параметров распределения

Нам известно, что **точечная оценка** не совпадает с оцениваемым параметром и представляется более рациональным указывать те допустимые границы, в которых может находиться неизвестный параметр θ при наблюдённой выборке $x_1, x_2, x_3 ..., x_n$.

Так как мы не знаем точного значения интересующего нас параметра, то задачу можно поставить иначе, например, с какой вероятностью оценка попадёт на интервал, содержащий математическое ожидание изучаемого параметра, и какого размера этот интервал?

Доверительный интервал для оценок

Определение 12.1 **Доверительной вероятностью** называют такую вероятность α, при которой, если событие *A* имеет вероятность $1-\alpha$, то событие *A* можно считать **невозможным**.

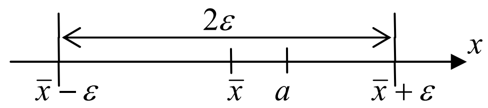
Задавшись **доверительной вероятностью** α, можно по выборке $x_1, x_2, x_3 ..., x_n$ определить интервал, в котором **будет находиться** неизвестный параметр θ.

Определение 13.1 **Доверительным интервалом** называется тот интервал, в котором с доверительной вероятностью α будет находиться неизвестный параметр θ.

Вероятность β того, что $\bar{x}$ и a отличаются не более, чем на ε, определяется по формуле

$$P(|\bar{x} - a| < \varepsilon) = \beta \qquad (36.1)$$

Замечание 21.1 С увеличением ε будет увеличиваться β - вероятность того, что a попадёт на отрезок $[\bar{x}-\varepsilon, \bar{x}+\varepsilon]$, где a неизвестно



$P(\bar{x} < a < \bar{x} + \Delta x) = \beta$

Рис. 1.1 Доверительный интервал

Замечание 22.1 Утверждение

$$P(\bar{x} - \varepsilon_\beta < a < \bar{x} + \varepsilon_\beta) = \beta \qquad (37.1)$$

означает, что с вероятностью β на отрезок длины $2\,\varepsilon_\beta$ с центром в $\bar{x}$ попадает точка *a*.

Замечание 23.1 a – **не** случайная величина, $\bar{x}$ - случайная.

Определение доверительного интервала для математического ожидания

Возьмём формулу (36.1) $P(|\bar{x} - a| < \varepsilon_\beta) = \beta$.

По результатам испытаний

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n} \qquad (38.1)$$

Преобразуем формулу (36.1), предполагая, что случайная величина подчиняется нормальному закону. Тогда

$$P(|\bar{x}-a|<\varepsilon_\beta)=P(a-\varepsilon_\beta<\bar{x}<a+\varepsilon_\beta)=$$
$$=\Phi_o\left(\frac{a+\varepsilon_\beta-a}{\sigma_{\bar{x}}}\right)-\Phi_o\left(\frac{a-\varepsilon_\beta-a}{\sigma_{\bar{x}}}\right)=2\Phi_o\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_{\bar{x}}}\right) \qquad (39.1)$$

Математическое ожидание $\bar{x}$ определяется по формуле

$$M[\bar{x}]=M\left[\frac{x_1+x_2+x_3+...+x_n}{n}\right]=\left[\frac{m_{x_1}+m_{x_2}+m_{x_3}+...+m_{x_n}}{n}\right]=m_x\text{, т.е.}$$

$$\boxed{m_{\bar{x}}=m_x}\text{, т.е. }\boxed{m_{\bar{x}}=a} \qquad (40.1)$$

Для дисперсии было получено $\sigma_{\bar{x}}^2=\dfrac{\sigma_x^2}{n}$, поэтому по формуле для **отклонения от математического ожидания** получается выражение

$$.\qquad P(|\bar{x}-a|<\varepsilon_\beta)=\Phi_o\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_x/\sqrt{n}}\right)-\Phi_o\left(\frac{-\varepsilon_\beta}{\sigma_x/\sqrt{n}}\right)=2\Phi_o\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_x/\sqrt{n}}\right)=\beta\,. \qquad (41.1)$$

Отсюда

$$\boxed{\Phi_o\left(\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_x/\sqrt{n}}\right)=\frac{\beta}{2}}\text{ и }\boxed{\varphi_o\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_x/\sqrt{n}}} \qquad (42.1)$$

Тогда искомая величина для **доверительного интервала** получается равной

$$\boxed{\varepsilon_\beta=\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\varphi_o\left(\frac{\beta}{2}\right)} \qquad (43.1)$$

Вводится следующее обозначение

$$\boxed{\varphi_o\left(\frac{\beta}{2}\right)=t_\beta} \qquad (44.1)$$

И **доверительный интервал** I_β при **доверительной вероятности** β записывается в виде

$$I_\beta=(\bar{x}-\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}t_\beta,\bar{x}+\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}t_\beta) \qquad (45.1)$$

Две типовые задачи

Первая задача. Пусть по выборке известны $\bar{x}$ и $S_{\bar{x}}^3$. Генеральное среднее a не совпадает с $\bar{x}$. Пусть требуется построить такой интервал $[\bar{x}-\Delta,\bar{x}+\Delta]$, о котором с заранее заданной вероятностью α можно утверждать, что он содержит в себе a - генеральное среднее.

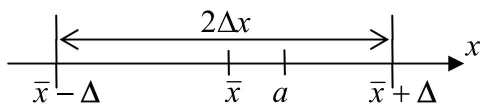


Рис. 2.1 К первой задаче

$$P(\bar{x} < a < \bar{x} + \Delta) = \alpha \qquad (46.1)$$

Замечание 24.1 Нельзя назначать $\alpha = 1$, потому что тогда нужно взять интервал $(-\infty, \quad \infty)$.
Замечание 25.1 Обычно α назначают - 0,95, 0,99 и 0,999.
Δ - **точность** выборочного среднего,
2Δ - **доверительный интервал,**
α - **надёжность** среднего выборочного или **доверительная вероятность**.
Итак, здесь всё задано, необходимо **найти** Δ!
Решение. Так как ошибка в измерениях, как правило, зависит от множества факторов, то по теореме Ляпунова можно считать эту ошибку подчиняющейся нормальному закону. В этом случае можно использовать формулу для определения вероятности отклонения

$$P(|\bar{x} - a| < \Delta) = \alpha, \qquad (47.1)$$

но если закон нормальный, то

$$P(|\bar{x} - a| < \Delta) = 2\Phi_o\left(\frac{\Delta}{\sigma_{\bar{x}}}\right), \qquad (48.1)$$

где $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ при $N = \infty$ и $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, если N - небольшое число.
Отсюда получают

$$2\,\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma_x}\right) = \alpha \quad \text{или } \Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma_x}\right) = \frac{\alpha}{2} \qquad (49.1)$$

или

$$\Phi\left(\frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma_x}\sqrt{\frac{N-1}{N-n}}\right) = \frac{\alpha}{2} \qquad (50.1)$$

Если ввести обозначение аргумента z_α, то

$$\Phi(z_\alpha) = \frac{\alpha}{2} \text{ , а отсюда } z_\alpha = \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) \qquad (51.1)$$

находят по таблице, а по формуле

$$z_\alpha = \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma_x} \quad \text{или} \quad z_\alpha = \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma_x}\sqrt{\frac{N-1}{N-n}} \qquad (52.1)$$

находят $\Delta = \frac{z_\alpha \sigma_x}{\sqrt{n}}$. (53.1)

Здесь неизвестно σ_x - СКВО, поэтому его заменяют оценкой S_x и учитывают объём выборки, то есть подсчитывают

I) $\Delta = \frac{z_\alpha S_x}{\sqrt{n}}$ ($N \to \infty$) (54.1)

II) $\Delta = \frac{z_\alpha S_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, когда N - конечно. (55.1)

Правило. Пусть $n > 25$, тогда с вероятностью α можно утверждать, что генеральное среднее a попадает на доверительный интервал $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$.

Вторая задача. Заданы Δ, α и нужно найти необходимый объём выборки
Решение.

$$n \ge \frac{z_\alpha{}^2 S_x{}^2}{\Delta^2} \tag{56.1}$$

или

$$n \ge \frac{z_\alpha{}^2 S_x{}^2}{\Delta^2} \frac{1}{1 + \dfrac{z_\alpha{}^2 S_x{}^2 - \Delta^2}{N\,\Delta^2}} \tag{57.1}$$

Замечание 26.1 Если $n < 25$, то нужно пользоваться не нормальным распределением, а распределением Student'а, по которому

$$t_\alpha = \frac{\bar{x} - a}{S_x}\sqrt{n-1} \tag{58.1}$$

Замечание 27.1 Для t_α существуют таблицы, где t_α зависит от α и r, где r - число степеней свободы $r = n - 1$ при распределении Student'а.
Замечание 28.1 При нормальном распределении $r = l - 3$, где l - число разрядов.

Пример 1.1 Пусть число опытов равно: а) $n = 72$ (взвешиваний) и $N = \infty$ и б) $n = 72$ и $N = 720$. Получено $\bar{x} = 650$ г, $S_x^2 = 16$ г^2. Найти доверительный интервал, который с надёжностью $\alpha = 0{,}95$ содержит *a*.
а) $n = 72$ и $N = \infty$.
Решение.
Используем формулу (51.1) и по таблице найдём

$$t_\beta = \varphi_o\left(\frac{\beta}{2}\right) = \varphi_o\left(\frac{0{,}95}{2}\right) = 1{,}96$$

Из формулы (52.1) получается

$$t_\beta = \frac{\varepsilon_\beta}{\sigma_x / \sqrt{n}}.$$

Тогда

$$\varepsilon_\beta = \frac{1{,}96 \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 4}{\sqrt{72}} = \frac{1{,}96 \cdot 4}{8{,}46} \approx 0{,}924$$

И границы доверительного интервала получаются следующие:

$$\bar{x} - \varepsilon_\beta = 650 - 0{,}92 = 649{,}08$$

$$\bar{x} + \varepsilon_\beta = 650 + 0{,}92 = 650{,}92$$

И доверительный интервал равен

$$649{,}08 < a < 650{,}92$$

б) $n = 72$ и $N = 720$
Решение.

$$\varepsilon_\beta = \frac{1{,}96 \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \approx 0{,}92\sqrt{\frac{720-72}{720-1}} = 0{,}92\sqrt{\frac{648}{719}} = 0{,}88$$

Тогда доверительный интервал равен

$$649{,}12 < a < 650{,}88$$

§ 2 Статистический ряд. Статистическая функция распределения

Задачи, которые рассматриваются в математической статистике, решаются на основании данных, полученных из опыта. Как правило, объём этих данных меньше, чем объём изучаемых объектов. Для того, чтобы получить необходимые сведения, приходится судить по малому о большом. Здесь не рассматривается всё множество задач, которые в состоянии решать математическая статистика, мы рассмотрим только несколько задач о числовых характеристиках и законах распределения изучаемых величин.

В данном параграфе рассмотрены следующие задачи:

1) Проверка гипотезы о **равенстве двух средних.**
2) Проверка гипотезы о **равенстве двух дисперсий**.
3) Проверка возможности **отбрасывания выскакивающих** наблюдений,
4) Проверка гипотезы о проверке **законов распределения**.

Представление опытных данных

В результате опыта получают **выборку**, состоящую из **наблюдённых** значений.
Определение 1.2 Ряд, составленный в порядке получения величин из опыта, называется **хронологическим.**

Для удобства потом эти значения переписываются **в порядке возрастания**.

Статистический ряд

Пример1.2 Пусть дан хронологический ряд значений, полученных из опыта

Таблица 1.2 **(**хронологический ряд**)**

218	219	217	219	222	220	218	221	218	220

.
Определение 2.2 Ряд, составленный в порядке возрастания измеренных величин, называется **статистическим**.

Таблица 2.2 (статистический ряд)

217	218	218	218	219	219	220	220	221	222

Составим **ряд распределения**
Таблица 3.2 (значения случайных величин и их частоты**)**:

x_i	217	218	219	220	221	222
m_i	1	3	2	2	1	1
ω_i	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

Определение 3.2 **Статистической функцией** распределения $F^*(x)$ исследуемой величины X называется функция непрерывного аргумента *x,* равная частоте осуществления неравенства

$$X < x \tag{1.2}$$

Определение 4.2 **Частотой** осуществления неравенства (1.2) называется отношение числа опытов, завершающихся осуществлением этого неравенства, к общему числу опытов/

В нашем примере статистическая функция $F^*(x)$ записывается так:

$$F^*(x)=\begin{cases}0 & x<217\\ 0{,}1 & x<218\\ 0{,}4 & x<219\\ 0{,}6 & x<220\\ 0{,}8 & x<221\\ 0{,}9 & x<222\\ 1 & x>222\end{cases}$$

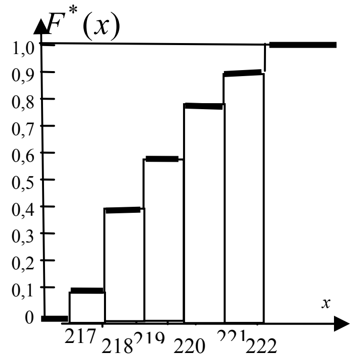


Рис 1.2 Статистическая функция распределения

Статистическая совокупность и гистограмма

Замечание 1.2 Если объём измерений велик, то построение ряда распределения нецелесообразно. Для систематизации результатов измерений выбирается **интервал** возможных значений и разбивается на l отрезков (чаще всего, равной длины).
Определение 5.2 Отрезки разбиения основного интервала называются **разрядами**.
Замечание 2.2 Лучшие результаты получаются, если $8 \le l \le 30$.
Замечание 3.2 Каждому разряду ставится в соответствие **частота** – количество наблюдённых значений, попавших в данный разряд.
Определение 6.2 **Статистической совокупностью** называется таблица, в которую сведены **разряды** и соответствующие им **частоты**.
Определение 7.2 **Гистограммой** называется **графическое** изображение **статистической совокупности**. По оси абсцисс откладываются разряды, а над каждым разрядом строится прямоугольник, высота которого равна относительной частоте, соответствующей этому разряду.

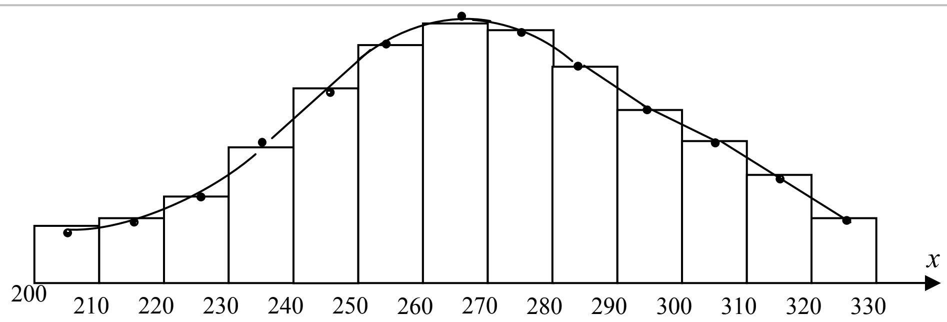


Рис. 2.2 Гистограмма

Замечание 4.2 Для построения гистограммы возможны два варианта:

а) либо площадь каждого прямоугольника соответствует частоте m_i,

б) либо высота прямоугольника равна относительной частоте $\omega_i = \dfrac{m_i}{n}$.

Критерий согласия

По виду гистограммы обычно выдвигают **гипотезу о законе распределения** изучаемой величины.

Для проверки гипотезы выбирается **критерий**, по которому принимается или отвергается **проверяемая гипотеза**.

Определение 8.2 Статистическим критерием (или просто **критерием**) называется **правило** (или формула), позволяющее по выборке принять или отвергнуть принятую гипотезу.

Замечание 5.2 Все критерии для проверки гипотезы называют **критериями согласия**.

Для выбранного критерия согласия устанавливаются следующие две величины:

1) **уровень значимости** α ,
2) **критическая область** *K*.

Определение 9.2 **Уровнем значимости** называется вероятность α отвергнуть гипотезу, в то время как она правильная (например, α - вероятность того, что знающему студенту поставлена неудовлетворительная оценка).

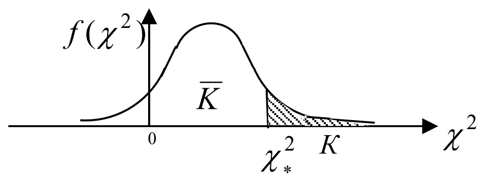


Рис. 3.2 Критическая область

Определение 10.2 **Критическая область** *K* представляет собой участок изменения критерия, вероятность попадания в который для этого критерия в точности равна α .

Замечание 6.2 Чем меньше уровень значимости, тем лучше. Обычно его принимают равным $\alpha = 0{,}05;\ 0{,}01;\ 0{,}001$.

Критерий согласия Пирсона (χ^2 **,** читается как «хи – квадрат»**).**

Гипотеза будет заведомо **правдоподобной**, если совпадают теоретические $m_i^{'}$ и опытные частоты $m_i^{'}$. Но чаще всего бывает расхождение, поэтому за меру расхождения Пирсон принял величину «хи – квадрат»

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - m_i^{'})^2}{m_i^{'}} \qquad (2.2)$$

$\overline{K}$ - область, дополнительная к **критической** (рис. 3.2).

Если χ_p^2 расчётное попадёт в критическую область, то есть

$$\chi_p^2 > \chi_*^2 \qquad (3.2)$$

то гипотеза отвергается. Если

$$\chi_p^2 < \chi_*^2 \qquad (4.2)$$

то гипотеза принимается.

Пример.1.2 Монета бросается 100 раз, а герб выпал 65 раз. Гипотеза состоит в том, что монета «правильная» и вероятность гипотезы принимается равной 0,95.

Решение. За критерий принимаем разность $U = x - m_x$, где m_x - математическое ожидание. Математическое ожидание в данном случае (при биномиальном распределении)

$$m_x = n\,p = 100 \cdot 0{,}5 = 50$$

СКВО определяется по формуле $\sigma_x = \sqrt{n\,p\,q} = \sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5} = \sqrt{25} = 5$

Математическое ожидание критерия согласия равно $m_U = 0$. В данном случае закон распределения биномиальный, но при $n = 100$ его можно считать нормальным, то $N(m_x, D_x) = N(0{,}25)$. Назначается уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

$P(|x - 50| > U_*) = 0{,}05$

$P(|x - 50| < U_*) = 0{,}95$.

$P(|x - 50| < U_*) = 2\Phi_o\left(\dfrac{U_*}{5}\right) = 0{,}95$

По таблице находим $\frac{U_*}{5} = 1{,}96$, откуда критерий согласия равен $U_* = 9{,}8$

Опытное значение $U = x - m_x = 65 - 50 = 15$, следовательно, $U = 15 > U_*$. Значит, гипотеза о правильности монеты отвергается.

Ошибки при проверке статистической гипотезы

При проверке статистической гипотезы возможны разные ошибки, главными из которых являются ошибки первого и второго рода.

1. **Ошибка** I **-го рода** – это ошибка, состоящая в том, что **отвергается** справедливая **правильная** гипотеза H

$$\alpha = P(U_o \in K/H), \qquad (5.2)$$

α - вероятность того, что наш критерий **попадёт в критическую область,** когда гипотеза справедлива. Но следует помнить, что α назначается.

2. **Ошибка** II **- го рода** – это ошибка, состоящая в **принятии неверной гипотезы**

$$\beta = P(U_o \subset \overline{K}/\overline{H}), \qquad (6.2)$$

то есть, U_o попадает в $\overline{K}$, когда гипотеза неверна, (неверная гипотеза - $\overline{H}$).

Замечание 7.2 Отсюда видно, что между α и β существует связь. Нельзя назначать $\alpha = 0$, потому что тогда $\beta = 1$, то есть, будут большие ошибки II **-** го рода.

Когда проверяется **статистическая гипотеза**, то очень важно знать, что именно проверять, **верную** или **неверную** гипотезу.

Замечание 8.2 Проверять нужно **ту гипотезу, при которой совершение ошибки** I **-го рода приводит к более тяжёлым последствиям, чем совершение ошибки** II **- го рода.**

Пример 2.2 Пусть H (верная гипотеза) состоит в том, что лекарство токсично,

$\overline{H}$ состоит в том, что лекарство нетоксично.

Ошибка I **-**го рода – считаем нетоксичным токсичное лекарство.

Ошибка II **-** го рода. – признаём токсичным нетоксичное лекарство.

Замечание 9.2 **Оптимальная критическая область** K выбирается такой, чтобы для неё вероятность совершения **ошибки** II **- го** рода была **минимальной**.

1. Проверка гипотезы о равенстве двух средних

Имеются две выборки $x_1, x_2, ..., x_n$, где $\overline{x}$ средняя I **-ой выборки,**

$y_1, y_2, ..., y_m$, где $\overline{y}$ средняя II **-ой выборки.**

Вводятся обозначения a и b - **средних** для **генеральной** совокупности. Гипотеза состоит в том, чтобы проверить равенство $a = b$, то есть

$$\boxed{H \to a = b} \qquad (7.2)$$

Решение. Сделаем предположение, что $\overline{x}$ и $\overline{y}$ - средние распределены по нормальному закону.

Задача решается по-разному, в зависимости от объёма выборки. Либо считается, что выборка велика, либо считается, что она мала.

Случай первый (объём выборки большой)

За **критерий проверки** принимается разность $\overline{x}$ - $\overline{y}$ Опыт показал, что удобнее принимать не саму разность, а её отношение к выборочному среднему СКВО $\sigma_{\overline{x}\cdot\overline{y}}$

$$U = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sigma_{\bar{x} \cdot \bar{y}}} \qquad (8.2)$$

Критерий должен содержать те параметры, которые нужно определить. В данном случае это $\bar{x}, \bar{y}, S_{\bar{x} \cdot \bar{y}}$, поэтому критерий записывается так:

$$U = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_{\bar{x} \cdot \bar{y}}}. \qquad (9.2)$$

Это можно записать в виде

$$U = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{S_{\bar{x}}^2 + S_{\bar{y}}^2}} \qquad (10.2)$$

Но обычно используют величину, учитывающую объём выборок

$$U = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{S_x^2}{n} + \frac{S_y^2}{m}}} \qquad (11.2)$$

Нужно задаться некоторым уровнем значимости α, а потом по таблице определить величину критерия согласия U_*.

Подсчитываем U_o. Гипотеза отвергается,

при $\alpha = 0{,}05$, если $|U_o| > 1{,}96$ (12.2)

при $\alpha = 0{,}01$, если $|U_o| > 2{,}58$, (13.2)

при $\alpha = 0{,}001$, если $|U_o| > 3{,}4$. (14.2)

Пример 3.2

Среднее растягивающее усилие, выдерживаемое проволокой типа А равно $\bar{x} = 677{,}5$ кг, а проволокой типа В - $\bar{y} = 698{,}6$ кг. Дисперсии такие $S_x^2 = 600$ кг^2, $S_y^2 = 680$ кг^2. Количество наблюдений одинаково и равно 20. Можно ли считать, что эти проволоки имеют равные средние (математические ожидания)?

Решение. Примем $\alpha = 0{,}05$

$$U_o = \frac{698{,}6 - 677{,}5}{\sqrt{\frac{600}{20} + \frac{680}{20}}} = \frac{21{,}1}{8} = 2{,}8$$

Но $U_* = 1{,}96$, получается $|U_o| > U_*$ Критерий попал в критическую область, следовательно, **гипотезу нужно отвергнуть**.

Случай второй (объём выборки маленький)

Допустим, что наша **выборка маленькая**. Будем считать, что $\bar{x}$ и $\bar{y}$ нормальны (то есть распределены по нормальному закону распределения). Предположим, что дисперсии этих признаков равны между собой $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$. В этом случае вводится другой критерий, Он связан с распределением *Student'a* (Стьюдента) и имеет вид

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S^*}. \qquad (15.2)$$

Здесь S^* выглядит сложно

$$S^* = \sqrt{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\cdot\frac{nS_x^2 + mS_y^2}{n+m-2}} \qquad (16.2)$$

Эта величина подчиняется закону распределения $Student'a$ с $(n+m-2)$ степенями свободы.

Схема проверки гипотезы:

1) Находим величину S^* и опытное наблюдённое значение $t_o = \dfrac{\bar{x}-\bar{y}}{S^*}$
2) Выбираем $\alpha = 0{,}05$, $0{,}01$ или $0{,}001$.
3) Из таблицы распределения $Student'a$ находим t_* по числу степеней свободы $(n+m-2)$ и по вероятности $(1-\alpha)$, потому что α - это вероятность попасть в критическую область, а в таблице всё затабулировано для некритической области.
4) Если окажется $t_o > t_*$, то гипотеза отвергается, если $t_o < t_*$, то гипотеза считается правдоподобной.

Пример 4.2 (для самостоятельного решения) Среднее время продолжения работы телевизоров равно $\bar{x} = 2582$ часа с $S_x = 80$, а для другой партии такая же выборка привела к $\bar{y} = 2508$ часов с $S_y = 94$. Объём партий $n = m = 50$. Приняв $\alpha = 0{,}05$, проверить гипотезу о равенстве генерального среднего (учесть, что это случай первый).

Пример 5.2 (для самостоятельного решения) При тех же самых данных число опытов равно $n = m = 5$ (так как 5 < 25, использовать распределение $Student'a$).

2. Проверка гипотезы о равенстве двух дисперсий

Гипотеза о равенстве двух дисперсий рассматривается, когда проверяется точность приборов или сравниваются данные, полученные разными наблюдателями. Допустим, что имеются осреднения нескольких наблюдений. По этим нескольким наблюдениям проверяется дисперсия

$$y_1^{'}, y_1^{''}, y_1^{'''}, ... S_1^2$$
$$y_2^{'}, y_2^{''}, y_2^{'''}, ... S_2^2$$
....
$$y_i^{'}, y_i^{''}, y_i^{'''}, ... S_i^2$$
....
$$y_n^{'}, y_n^{''}, y_n^{'''}, ... S_n^2$$

Для того, чтобы прибору, взятому для измерений, можно было доверять, нужно, чтобы все дисперсии S_i^2 были равны между собой.

Сравнение двух дисперсий необходимо в том случае, когда сравниваются, например, два измерительных прибора, Очевидно, предпочтительнее тот прибор, инструмент или метод, который обеспечивает наименьшее рассеяние результатов измерений. В конечном счёте, задача сводится к проверке равенства **математических ожиданий исправленных выборочных дисперсий.**

Считаем, что обе дисперсии S_1^2 и S_2^2 несмещённые, то есть определяются по формуле

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}.$$

Здесь $(n-1)$ - число степеней свободы.

Допустим, что дисперсия S_1^2 получена по выборке объёма n, а S_2^2 - по выборке объёма m. Тогда числа степеней свободы соответственно равны $n-1$ и $m-1$. Проверяется гипотеза H о том, что дисперсии равны между собой:

. $$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

Эту задачу изучал Фишер и в качестве критерия проверки этой гипотезы предложил

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \text{ при условии } S_1^2 \geq S_2^2$$

Замечание 10.2 Условимся всегда в числитель ставить ту дисперсию, которая больше.
Фишер нашёл закон распределения этой случайной величины F. Внешне этот закон немного похож на закон распределения Пирсона. Для распределения Фишера составлены таблицы. При составлении таблиц фигурируют α, n, m, F_*, то есть здесь два значения степеней свободы.
Таблица распределения Фишера составлена для $\alpha = 0{,}05;\ \alpha = 0{,}01;\ \alpha = 0{,}001$. Эти таблицы содержат F_* как функции от n и m.
Проверка гипотезы делается в следующем порядке:

1) вычисляется наблюденное значение F, которое обозначается как F_o;
2) задаются уровнем значимости α;
3) из таблицы критических точек распределения Фишера – Снедекора при выбранном α по аргументам n и m находится критическое значение F, которое обозначается как F_*.

Если $F_o < F_*$, то гипотеза правдоподобна,

А если $F_o > F_*$ - то гипотеза неправдоподобна.

Замечание 11.2 Существует много других методов для сравнения двух и нескольких дисперсий для случайных величин с разными законами распределения. При необходимости их описание можно найти в литературе, список которой дан в конце.
Пример 6.2 По двум независимым выборкам объёмом $n=12$ и $m=15$, извлечённым из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найденные исправленные дисперсии $S_1^2 = 11{,}41$ и $S_2^2 = 6{,}52$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить гипотезу $D(X) = D(Y)$ о равенстве генеральных дисперсий при конкурирующей гипотезе $D(X) > D(Y)$.
Решение. Найдём критерий Фишера

$$F_o = \frac{11{,}41}{6{,}52} = 1{,}75$$

По таблице по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числам свободы $k_1 = 12-1 = 11$ и $k_2 = 15-1 = 14$, находим критическую точку $F_* = (0{,}05;\ 11,\ 14) = 2{,}57$.
Так как $F_o < F_*$ **нет оснований от**вергнуть гипотезу о равенстве двух дисперсий.

3. Проверка гипотезы о выскакивающих наблюдениях,

Допустим, что мы наблюдаем некоторую величину и записываем её значения в порядке их возрастания

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \ldots \leq x_n$$

Как выяснить, можно ли отбрасывать выскакивающие наблюдения?
Для этого существуют критерии Греббса и Кохрена проверки гипотезы о выскакивающих наблюдениях.

Критерий Греббса

$$\upsilon = \frac{x_{\max} - \bar{x}}{S_x}, \tag{17.2}$$

где $x_{\max}$ - выскочившее наблюдение.

Если выскочившее наименьшее наблюдение, то

$$\upsilon = \frac{\bar{x} - x_{\min}}{S_x} \tag{18.2}$$

Для проверки этого критерия υ_* приведём таблицу по уровням значимости.

Таблица 4.2 (Значения υ_*)

n \ α	0,05	0,01
3	1,21	1,23
4	1,46	1,49
5	1,67	1,75
6	1,82	1,94
7	1,94	2,10
8	2,03	2,22
9	2,11	2,32
10	2,18	2,42
12	2,28	2,55
14	2,37	2,66
16	2,44	2,75
18	2,50	2,82
20	2,56	2,88

n - число наблюдений, приведенных в таблице 5.2..

При определении $\bar{x}$ и S_x учитывается и $x_{\max}$ и $x_{\min}$

Вычисляется наблюдённое значение υ_o из опыта, а в таблице дано υ_*. Если $\upsilon_o > \upsilon_*$, то выскочившее значение нужно отбросить. Если $\upsilon_o < \upsilon_*$, то отбрасывать нельзя.

Получено $\ddot{x} = 0{,}018$, $S_x = 0{,}533$. Проверим наименьшее значение -1,40. Тогда

$$\upsilon_o = \frac{0{,}018 + 1{,}40}{0{,}533} = 2.66$$

Принимается $\alpha = 0{,}05$. Получается $\upsilon_* = 2{,}40$. Получилось $\upsilon_o > \upsilon_*$, следовательно это значение нужно отбросить.

Пример 7.2 Проведено 15 наблюдений

Таблица 5.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
-1,40	-0,44	-0,30	-0,24	-0,22	-0,13	-0,05	0,06	0,10	0,18	0,20	0,39	0,48	0,63	1,01
1.96	0.1936	0.09	0.0576	0.0484	0.0169	0.0025	0.0036	0.01	0.0324	0.04	0..1521	0.2304	0.3969	1.0201

Проверим наибольшее значение 1,01, но теперь отброшено наименьшее значение -1,40, поэтому всё считается для 14 значений. $\upsilon_* = 2{,}37$

$$\upsilon_o = \frac{0{,}1193 - 1{,}01}{0{,}387} = \frac{-0{,}8907}{0{,}387} = 2{,}301$$

Получилось, что $\upsilon_o < \upsilon_*$, следовательно, наибольшее значение 1,01 нужно оставить.

Пример 8.2 Допустим, что проведено всего три наблюдения

X_1	X_2	X_3
0	1	9

Проверим, что отбросить. $\bar{x} = 3{,}33$, $S_x 4{,}03$. Если $\alpha = 0{,}05.$, то $\upsilon_* = 1{,}21$

$$\upsilon_o = \frac{9 - 3{,}333}{4{,}03} = 1{,}406$$

Получилось, что $\upsilon_o > \upsilon_*$, и нужно значение 9 отбросить.

Если бы было не 9, а 8, то его можно было бы оставить. Но это получается потому, что слишком мало наблюдений.

Примечания к проверке статистической гипотезы

1. Нужно следить за тем, чтобы частоты, соответствующие разным промежуткам Δ, не были слишком малы. Опыт показал, что если частоты малы, то критерий Пирсона становится ненадёжным.
2. Не следует применять критерий Пирсона, если имеются разряды, для которых частоты меньше 5. Если имеются разряды с $m < 5$, то их нужно объединять в один, но в этом случае нужно учитывать разную длину интервалов.
3. Когда Пирсон выводил свой критерий согласия, то он его вывел для проверки гипотезы с **нормальным законом** распределения. Критерий Пирсона можно применять и для проверки других гипотез. Этот критерий обладает очень большой мощностью, так как мала вероятность совершить ошибку 2-го рода, то есть нельзя принять неверную гипотезу за верную.

Как проверить гипотезу в том случае, когда закон распределения отличается от нормального (рис.4.2)? Ход рассуждений точно такой же, но нужно рассмотреть два особых случая.

Случай 1. Закон распределения отличается от нормального, у него есть сплющенность или вытянутость, как показано на рисунке 5.2. Нужно использовать другую формулу для определения частот. Нужно учитывать начальные моменты

$$\alpha_3' = \frac{\sum m_i x_i^3}{n} \text{ и } \alpha_4' = \frac{\sum m_i x_i^4}{n},$$

где $m_i = \dfrac{n\Delta}{S_x}\varphi(t_i)$ - теоретические частоты, и центральные моменты 3 –го и 4 –го порядка

$$\mu_3 = \frac{\sum m_i (x_i - \bar{x})^3}{n}$$

и

$$\mu_4 = \frac{\sum m_i (x_i - \bar{x})^4}{n}$$

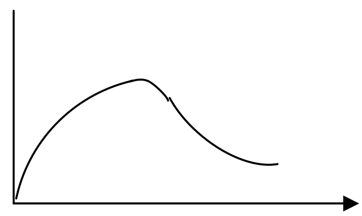


Рис. 4.2 Произвольный закон распределения

По этим моментам определяются коэффициент асимметрии

$$K = \frac{\mu_3}{S_x^3}$$

и эксцесс (вытянутость)

$$E = \frac{\mu_4}{S_x^4}.$$

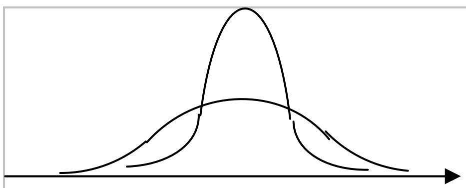


Рис. 5.2 Распределения, близкие к нормальному

В этом случае используется для теоретических частот формула Шарлье

$$m_i' = \frac{n\Delta}{S_x}\varphi(t_i)\left\{1 - \frac{K}{6}\left(t_i^3 - 3t_i\right) + \frac{E}{24}\left(t_i^4 - 6t_i^2 + 3\right)\right\}$$

или

$$m_i' = \frac{n\Delta}{S_x}\left\{\varphi(t_i) - \frac{K}{6}\varphi^{III}(t_i) + \frac{E}{24}\varphi^{IV}(t_i)\right\}$$

Последняя формула используется в том случае, когда есть таблица производных $\varphi(t_i)$

Замечание 12.2 Если для нормального закона распределения функция $\varphi(t_i)$ зависела от двух параметров, то теперь зависит от 4–х параметров, то есть ещё от *К* и *Е*. В нормальном законе число степеней свободы $r = l - 3$, а Шарлье принимает $r = l - 5$, где l. – число разрядов. В случае такого распределения они далеки от нормального.

Случай 2. Примерно в 20 – е годы Пирсон классифицировал все виды распределения по 7-ми типам (с некоторым количеством подгрупп в каждом). У Пирсона приведены формулы, позволяющие рассчитывать все параметры. (См. Митропольский «Техника статистических вычислений»).

Таблица 6.2

Основные формулы		
Доверительный интервал	Объём выборки	Вспомогательные формулы
$I_\beta = (\bar{x} - \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_\beta, \bar{x} + \frac{S_x}{\sqrt{n}} t_\beta)$	$n \ge \frac{{t_\beta}^2 {\sigma_x}^2}{\Delta^2}$	$t_\beta = \Phi_o\left(\frac{\beta}{2}\right)$ (нормальный закон распределения)
$\varepsilon_\beta = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \Phi_o\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} t_\beta$	$\varepsilon_\beta = \frac{1{,}96 \cdot \sigma_x}{\sqrt{n}}$	Если $\beta = 0{,}95$
$\Delta = \frac{z_\alpha S_x}{\sqrt{n-1}}$	$n \ge \frac{{z_\alpha}^2 {S_x}^2}{\Delta^2}$	$z_\alpha = \Phi_o\left(\frac{\alpha}{2}\right)$, $n > 25$
$\Delta = \frac{z_\alpha S_x}{\sqrt{n}}$ $(N \to \infty)$	$n \ge \frac{{z_\alpha}^2 {S_x}^2}{\Delta^2}$	$z_\alpha = \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma_x}$; $\Delta = \frac{t_\alpha S_x}{\sqrt{n-1}}$ при $(n < 25)$
$\Delta = \frac{z_\alpha S_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$, $(N < \infty)$	$n \ge \frac{{z_\alpha}^2 {S_x}^2}{\Delta^2} \frac{1}{1 + \frac{{z_\alpha}^2 {S_x}^2 - \Delta^2}{N\,\Delta^2}}$	$z_\alpha = \frac{\Delta\sqrt{n}}{\sigma_x} \sqrt{\frac{N-1}{N-n}}$
$\varepsilon_\alpha = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \Phi_o\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} t_\alpha$	$n \approx 1 + \frac{S_x^2 t_\alpha^2}{\Delta^2}$	$n < 25$ по Student'у $t_\alpha = \frac{\bar{x} - a}{S_x}\sqrt{n-1}$

Пример 9.2 Измерения глубины океана производятся со средней ошибкой 30м. Сколько нужно сделать замеров, чтобы найденное среднее имело ошибку 20м. с $\alpha = 0{,}895$?

Решение. Число замеров определяется по формуле

$$n \ge \frac{{z_\alpha}^2 {S_x}^2}{\Delta^2}$$

$S_x = 30$, $\Delta = 20$, z_α определяется по таблице из $z_\alpha = \varphi\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1{,}64$

$$n \ge \frac{{z_\alpha}^2 {S_x}^2}{\Delta^2} = \frac{1{,}64^2 30^2}{20^2} \cong \frac{2{,}69 \cdot 900}{400} = 6{,}05$$

Если $n < 25$, то ошибка от замены σ_x на S_x может быть значительной, поэтому в качестве оценки СКВО следует принимать оценку средне - выборочного по формуле

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n-1}}$$

Тогда

$$\Delta = \frac{t_\alpha S_x}{\sqrt{n-1}}$$

или
$$\Delta = \frac{t_\alpha S_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}},$$

где

$$t_\alpha = \frac{\bar{x}-a}{S_x}\sqrt{n-1}, \text{ откуда } n \approx 1 + \frac{S_x^2 t_\alpha^2}{\Delta^2}$$

t_α - *Student*, который получают из таблицы, составленной по двум параметрам:

1) по **доверительной** вероятности α и 2) по числу **степеней свободы** $r = n-1$

Тогда в нашем примере $n_1 = 6$ с вероятностью $\approx 0{,}9$ (по условию задачи). Отсюда с помощью последовательных приближений получается

Таблица 7.2

Значения *Student*'*a* t_α				
r	$t_{0,9}$	$t_{0,95}$	$t_{0,99}$	$t_{0,999}$
1	6,31	12,7	63,7	637,0
2	2,92	4,30	9,92	31,6
3	2,35	3,18	5,84	12,9
4	2,13	2,78	4,60	8,61
5	2,01	2,57	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,50	5,40
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,59
12	1,78	2,18	3,05	4,32
14	1,76	2,14	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,95	4,07
20	1,73	2,09	2,86	3,85
25	1,71	2,06	2,79	3,72

1) $r = n_1 - 1 = 5$, $\alpha = 0{,}9$, $t_\alpha = 2{,}01$, откуда

$$n_2 \approx 1 + \frac{S_x^2 t_\alpha^2}{\Delta^2} = 1 + \frac{30^2 2{,}01^2}{20^2} =$$

$$= 1 + \frac{900 \cdot 4{,}04}{400} = 1 + 9{,}09 \approx 10$$

2) $r = n_2 - 1 = 10 - 1 = 9$, $\alpha = 0{,}9$, $t_\alpha = 1{,}83$

$$n_3 \approx 1 + \frac{S_x^2 t_\alpha^2}{\Delta^2} = 1 + \frac{30^2 1{,}83^2}{20^2} =$$

$$= 1 + \frac{900 \cdot 3{,}35}{400} = 1 + 7{,}54 \approx 8{,}54$$

3) $r = n_3 - 1 = 9 - 1 = 8$, $\alpha = 0{,}9$, $t_\alpha = 1{,}86$

$$n_4 \approx 1 + \frac{S_x^2 t_\alpha^2}{\Delta^2} = 1 + \frac{30^2 1{,}86^2}{20^2} =$$

$$= 1 + \frac{900 \cdot 3{,}46}{400} = 1 + 7{,}79 \approx 8{,}79$$

Ответ: $n = 9$

Пример 10.2 Допустим, что средний вес 3-х яблок 150 г. СКВО = 10. Найти доверительный интервал.

Решение Так как выборка очень маленькая, то доверительный интервал определяется по формуле с использованием таблицы *Student*'*a*

$$\Delta = \frac{t_\alpha S_x}{\sqrt{n-1}}$$

1) $\alpha = 0{,}95$ $r = n - 1 = 3 - 1 = 2$, поэтому $t_{0,95} = 4{,}3$

$$\Delta = \frac{t_\alpha S_x}{\sqrt{n-1}} = \frac{4{,}3 \cdot 10}{\sqrt{3-1}} = \frac{43}{1{,}414} = 30{,}4$$

Получается доверительный интервал, равный $119.6 < a < 180{,}4$

2) $\alpha = 0{,}99$ $r = n - 1 = 3 - 1 = 2$, поэтому $t_{0,99} = 9{,}92$

$$\Delta = \frac{t_\alpha S_x}{\sqrt{n-1}} = \frac{9{,}92 \cdot 10}{\sqrt{3-1}} = \frac{99{,}2}{1{,}414} = 70{,}16$$

Доверительный интервал равен $79{,}8 < a < 220{,}2$

Замечание 13.2 В таких задачах заранее неизвестно, достаточен ли объём выборки (количество опытов). Для ответа на этот вопрос определяется $n_1 \geq \frac{z_\alpha{}^2 S_x{}^2}{\Delta^2}$, а затем

$n_2 \approx 1 + \frac{S_x^2 t_\alpha^2}{\Delta^2}$. Если $n_2 = n_1$, то выборка достаточна. Если $n_2 \neq n_1$,

то ищется $n_3 \approx 1 + \frac{S_x^2 t_\alpha^2}{\Delta^2}$, сравнивается с n_2 и т.д.

4. Определение закона распределения случайной величины

1. Пусть заданы интервалы и частоты m_i на каждом интервале.
2. Найти относительные частоты $\frac{m_i}{n}$, где $n = \sum_{i=1}^{l} m_i$
3. Для облегчения расчётов найти середины интервалов по формуле $z_i = \frac{x_i - A}{\Delta}$, где Δ равна длине интервала, а A выбирается равным среднему значению x_i.
4. Найти оценку математического ожидания $m_z = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{n}$. Отсюда оценка математического ожидания исследуемой случайной величины X равна $m_x = m_z \cdot \Delta + A$.
5. Найти оценку дисперсии $S_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i^2}{n} - \bar{z}^2$
6. Найти оценку дисперсии $S_x^2 = S_z^2 \cdot \Delta^2$
7. Найти исправленную оценку дисперсии $\bar{S}_x^2 = \frac{n}{n-1} S_x^2$
8. Найти оценку СКВО S_x
9. Найти аргумент $t_i = \frac{x_i - m_x}{S_x}$
10. По таблицам найти функцию $\varphi(t_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t_i^2}{2}}$
11. Найти теоретические частоты $m_i^{'} = \frac{n\Delta}{S_x} \varphi(t_i)$ или $\frac{m_i^{'}}{n} = \frac{\Delta}{S_x} \varphi(t_i)$
12. Найти критерий Пирсона в следующем порядке

   а) найти разности заданных и теоретических частот $m_i - m_i^{'}$

   б) найти квадраты разностей $\left(m_i - m_i^{'}\right)^2$

в) найти величину $\dfrac{\left(m_i - m_i^{'}\right)^2}{m_i^{'}}$

г) найти критерий Пирсона $\chi^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(m_i - m_i^{'})^2}{m_i^{'}}$

12. По критерию Пирсона определить справедливость гипотезы о нормальном распределении случайной величины. Число степеней свободы равно при нормальном законе распределения $r = l - 3$, где l - число разрядов. Уровень значимости принять $\alpha = 0{,}05$. Найти критическое значение критерия согласия по таблице $\chi^2_*(r, \alpha)$. При $\alpha = 0{,}05$ и $r = 12$ получается $\chi^2_* = 16{,}9$.

13. По критерию согласия проверить свою гипотезу.

Пример расчёта для проверки гипотезы нормального закона распределения
Таблица 8.2

№		28-30	30-32	32-34	34-36	36-38	38-40	40-42	42-44	44-46	46-48	$\sum$
1	m_i	4	18	42	76	112	92	61	48	22	10	485
2	$\overline{x}_i$	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	
3	z_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$A = 37$
4	$\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i$	-16	-54	-84	-76	0	92	122	144	88	50	266
5	$\sum\limits_{i=1}^{n} m_i z_i^{2}$	64	162	168	76	0	92	244	435	352	250	1840
6	$x_i - m_x$	-9,1	-7,1	-5,1	-3,1	-1,1	0,9	2,9	4,9	6,9	8,0	
7	$t_i = \dfrac{x_i - m_x}{S_x}$	-2,44	-1,9	-1,365	-0,83	-0,29	0,24	0,77	1,51	1,85	2,39	
8	$\varphi_i(t_i)$	0,020	0,0656	0,157	0,283	0,353	0,387	0,297	1,127	0,072	0,023	
9	Теор. $\dfrac{m_i^{'}}{n}$	0,0101	0,035	0,086	0,150	0,205	0,208	0,162	0,068	0,038	0,0123	
10	$m_i^{'}$	5,2	17	41,5	73	100	100	78	33	19	6	
11	$m_i - m_i^{'}$	-1	1	0	3	12	-8	-17	15	3	4	
12	$\left(m_i - m_i^{'}\right)^2$	1	1	0	9	144	64	289	225	9	16	
13	$\dfrac{\left(m_i - m_i^{'}\right)^2}{m_i^{'}}$	0,200	0,059	0	0,012	1,300	0,700	3,740	6,850	0,470	2,640	$\chi^2 =$ 15,97

Ответ. Сравниваем полученное значение с критическим значением «хи – квадрат» 15,97< 16,9 . Следовательно гипотеза принимается, то есть случайная величина подчиняется нормальному закону распределения.

Понятие статистики

Для получения обоснованных статистических выводов необходимо проводить достаточно большое количество испытаний, а, следовательно, иметь выборку достаточно большого объёма.

Не только использование, но и хранение такой выборки достаточно затруднительно. Чтобы избавиться от этих трудностей, а также для других целей вводят понятие **статистики.**

Определение 11.2 **Статистикой** $S=(S_1,S_2,...,S_k))$ называется произвольная (измеренная) k-мерная **функция** от выборки $X_1,X_2,...,X_n$

$$\begin{aligned} &S_1=S_1(X_1,X_2,...,X_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_k=S_k(X_1,X_2,...,X_n). \end{aligned} \tag{19.2}$$

Определение 12.2 Совокупность случайных величин $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_k)$ называется **многомерной** (k - мерная) случайной величиной или случайным **вектором**.

Замечание 14.3 Как функция от случайного вектора $X_1,X_2,...,X_n$, статистика S также будет случайным вектором, и её функция распределения

$$F_{S_1,...,S_k}(x_1,x_2,...,x_k)=P(S_1<x_1,...,S_k<x_k) \tag{20.2}$$

определяется для дискретной наблюдаемой случайной величины X формулой

$$F_{S_1,...,S_k}(x_1,x_2,...,x_k)=\sum P(y_1)P(y_2)...P(y_n) \tag{21.2}$$

и для непрерывной – формулой

$$F_{S_1,...,S_k}(x_1,x_2,...,x_k)=\int...\int P(y_1)P(y_2)...P(y_n)\,dy_1dy_2...dy_n, \tag{22.2}$$

где суммирование или интегрирование производится по всем возможным значениям $y_1,y_2,...,y_n$, для которых выполнена система неравенств

$$S_1(y_1,y_2,...,y_n)<x_1,...,S_k(y_1,y_2,...,y_n)<x_k. \tag{23.2}$$

Пример 11.2 Пусть выборка $X_1,X_2,...,X_n$ произведена из генеральной совокупности с теоретической функцией распределения $F(x)=\Phi(x;m,\sigma^2)$, являющейся нормальной с математическим ожиданием (средним значением) m и дисперсией σ^2. Рассмотрим двумерную статистику (S_1,S_2), где

$$\begin{aligned} &S_1=S_1(X_1,X_2,...,X_n)=\frac{1}{n}(X_1+X_2+...+X_n), \\ &S_2=S_2(X_1,X_2,...,X_n)=(X_1-S_1)^2+(X_2-S_1)^2+...+(X_n-S_1)^2. \end{aligned} \tag{24.2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &F_{S_1,S_2}(x_1,x_2)=\iint\limits_{S_1,S_2}(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[(y_1-m)^2+...+(y_n-m)^2\right]}dy_1...dy_n \\ &s_1=\frac{1}{n}(y_1+...+y_n)<x_1 \\ &s_2=[(y_1-s_1)^2+...+(y_n-s_1)^2]<x_2 \end{aligned} \tag{25.2}$$

Однако, обычно не вычисляют записанный интеграл, а пользуются тем фактом, что любое линейное преобразование переводит нормально распределённый вектор в вектор, снова имеющий нормальное распределение, причём ортогональное преобразование переводит вектор с независимыми координатами, имеющими одинаковые дисперсии, в вектор с также независимыми и имеющими те же самые дисперсии координатами.

Из курса теории вероятностей известно, что статистика S_1 имеет нормальное распределение со средним m и дисперсией σ^2/n. Положим

$$X_i^{'} = X_i - m, \quad S_1^{'} = \frac{1}{n}(X_1^{'} + ... + X_n^{'}) \qquad (26.2)$$

Очевидно, что

$$S_1 = m + S_i^{'}, \quad S_2 = (X_i^{'} - S_1^{'})^2 + ... + (X_n^{'} - S_1^{'})^2 \qquad (27.2)$$

Пусть теперь A - линейное ортогональное преобразование пространства R^n, ставящее в соответствие каждому вектору $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ вектор $\vec{y} = (y_1, y_2, ..., y_k)^T = A\vec{x}$, где $y = (x_1, x_2, ..., x_n)/\sqrt{n}$ (как известно из курса линейной алгебры, такое преобразование всегда существует). Тогда, если $\vec{X}' = (X_1^{'}, X_2^{'}, ..., X_n^{'})^T$, то будет нормально распределенным вектором, имеющим независимые координаты Y_i с нулевым средним и дисперсией σ^2. Кроме того, $Y_1 = \sqrt{n}\, S_1^{'}$. Далее, рассмотрим $S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i^{'})^2$ - квадрат длины вектора $\vec{X}'$. Простейшие преобразования показывают, что

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} (X_i^{'} - S_1^{'})^2 + n\left(S_1^{'}\right)^2 = S_2 + n\left(S_1^{'}\right)^2.. \qquad (28.2)$$

С другой стороны, в силу ортогональности преобразования A

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = n(S_1^{'})^2 + Y_2^2 + ... + Y_n^2. \qquad (29.2)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$S_2 = Y_2^2 + ... + Y_n^2., \qquad (30.2)$$

т.е. S_2/σ^2 представляет собой сумму квадратов $n-1$ независимых случайных величин, распределённых по стандартному нормальному закону. Вспоминая теперь, что случайные величины $Y_1 = \sqrt{n}\, S_1^{'}$, $Y_2, ... Y_n$ независимы, получаем окончательный ответ: статистика S_1 распределена по нормальному закону с параметрами m и σ^2/n, а случайная величина S_2/σ^2 (в том случае, когда дисперсия σ^2 неизвестна , отношение S_2/σ^2 не является статистикой, поскольку зависит от неизвестного параметра σ^2) – по закону χ^2 с $n-1$ степенями свободы.

Замечание 15.2 Приведенные рассуждения постоянно используются в статистических задачах, связанных с нормальным законом.

Замечание 16.2 Важный класс **статистик** составляют **достаточные статистики**.

Замечание 17.2 Статистика S является **достаточной**, если она содержит всю ту информацию относительно теоретической функции распределения $F(x)$, что и исходная выборка $X_1, X_2, ..., X_n$.

Замечание 18.2 Более сложными примерами достаточных статистик является число успехов в схеме Бернулли и двумерная статистика S из примера для выборки из генеральной совокупности с нормальной теоретической функцией распределения.

§ 3 Дисперсионный анализ

Основная задача. Пусть генеральные совокупности $X_1, X_2, ..., X_n$ распределены **нормально** и имеют **одинаковую**, хотя и неизвестную, дисперсию. Математические ожидания также неизвестны, но могут быть различными. Требуется при заданном уровне значимости по выборочным средним проверить нулевую гипотезу H_0 о равенстве всех математических ожиданий: $M(X_1) = M(X_2) = ... = M(X_n)$. Другими словами, требуется установить, **значимо** или **незначимо** различаются выборочные средние.

Казалось бы, что для сравнения нескольких средних ($p > 2$) можно сравнивать их попарно. Однако с возрастанием числа средних возрастает и наибольшее различие между ними: среднее новой выборки может оказаться больше наибольшего или менее наименьшего из средних, полученных до нового опыта. Поэтому для сравнения нескольких средних пользуются другим методом, который основан на сравнении дисперсий и поэтому называется **дисперсионным анализом** (развит, в основном, англичанином Р. Фишером).

На практике дисперсионный анализ применяют, чтобы определить, **оказывает ли** существенное влияние некоторый качественный фактор F, который имеет p уровней $F_1, F_2, ..., F_p$ на искомую величину *X*. Например, если требуется выяснить, какой вид удобрений наиболее эффективен для получения наибольшего урожая, то фактор F - удобрение, а его уровни – виды удобрений.

Основная идея дисперсионного анализа состоит в сравнении «**факторной дисперсии**», порождаемой воздействием фактора, и «**остаточной дисперсии**», обусловленной **случайными** причинами. Если различие **между** этими **дисперсиями значимо**, то фактор оказывает существенное влияние на *X*. В этом случае **средние** наблюдаемых значений на каждом уровне (групповые средние) **различаются** также **значимо**.

Замечание 1.3 Если уже установлено, что фактор существенно влияет на X, а требуется выяснить, какой из уровней оказывает наибольшее воздействие, то дополнительно производят **попарное сравнение средних**.

Замечание 2.3 Иногда дисперсионный анализ применяется, чтобы установить **однородность** нескольких совокупностей.

Определение 1.3 Совокупности называются **однородными**, если дисперсии этих совокупностей одинаковы **по предположению** и если **дисперсионный анализ покажет**, что и математические ожидания тоже одинаковы.

Замечание 3.3 **Однородные совокупности** можно объединить в одну и тем самым получить о ней более полную информацию, следовательно, и более надёжные выводы.

Замечание 4.3 В более сложных случаях исследуют воздействие нескольких факторов на нескольких постоянных или случайных уровнях и выясняют влияние отдельных уровней и их комбинаций (**многофакторный анализ**)

Простейшая задача. Пусть имеется p независимых выборок

$$X_{11}, X_{12}, ..., X_{1n_i}$$

$$,..........................$$

$$X_{p1}, X_{p2}, ..., X_{p\,n_i}$$

произведённых из нормальных генеральных совокупностей с неизвестными средними $m_1, m_2, ..., m_p$ и также неизвестными, но одинаковыми дисперсиями σ^2. Проверяются две сложные параметрические гипотезы: основная H₀: $m_1 = m_2 = ... = m_p$, состоящая в том, что все теоретические средние m_i **равны между собой**, и конкурирующая H_1: некоторые теоретические средние m_i могут быть **различными**.

Решение. Построение критерия для проверки гипотез H_o и H_1 начинают с рассмотрения отдельных внутригрупповых выборочных дисперсий

$$S_{(i)}^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}(X_{i\,j} - \bar{x}_i)^2 ,$$

где $$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}$$

- выборочное среднее выборки $X_{i1}, X_{i2}, ..., X_{in_i}$.

Известно, что случайная величина

$$\frac{(n_i - 1)S_{(i)}^2}{\sigma^2}$$

имеет χ^2 - распределение с $n_i - 1$ степенями свободы. Определим статистику

$$S_o^2 = \frac{\sum_{i=1}^{p}(n_i - 1)\, S_{(i)}^2}{\sum_{i=1}^{p}(n_i - 1)},$$

называемую (общей) внутригрупповой или остаточной (выборочной) дисперсией. Поскольку выборки независимы, случайная величина

$$\frac{S_o^2 \sum_{i=1}^{p}(n_i - 1)}{\sigma^2}$$

также распределёна по закону χ^2, но с числом степеней свободы $\sum_{i=1}^{p}(n_i - 1)$, а статистика S_o^2 представляет собой несмещённую оценку неизвестной дисперсии σ^2. Обозначим через

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_i} X_{i\,j}}{\sum_{i=1}^{p} n_i}$$

общее выборочное среднее обобщённой выборки , образуем новую статистику

$$S_1^2 = \frac{1}{p-1}\sum_{i=1}^{p}(\bar{x}_i - \bar{x})^2\, n_i,$$

которая представляет собой межгрупповую выборочную дисперсию и не зависит от S_o^2. при условии справедливости гипотезы H_o .

Общая, факторная и остаточная суммы квадратов отклонений

Пусть на количественный нормально распределённый признак X воздействует фактор F, который имеет p постоянных уровней. Будем предполагать, что число наблюдений на каждом уровне одинаково и равно q.

Пусть наблюдалось pq значений $x_{i\,j}$ признака X, где i - номер испытания $(i = 1,2, \quad ... \quad ,q)$, j - номер уровня фактора $(j = 1,2, \quad ... \quad ,p)$. Результат наблюдений представлен в таблице

Введём по определению

$$S_{общ} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{q}\left(x_{i\,j} - \bar{x}\right)^2 \qquad (1.3)$$

Где $S_{общ}$ - общая сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений от общей средней $\bar{x}$;

$$S_{\text{факт}} = \sum_{j=1}^{p} \left(\bar{x}_j - \bar{x}\right)^2 \tag{2.3}$$

$S_{\text{факт}}$ - факторная сумма квадратов отклонений групповых средних от общей средней, которая характеризует рассеяние между группами;

Таблица 1.3

Номер испытания	Уровни фактора F_j			
	F_1	F_2	$\cdots$	F_p
1 2 … q	x_{11} x_{21} ... x_{q1}	x_{12} x_{22} ... x_{q2}	 $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$ $\cdots$	x_{1p} x_{2p} ... x_{qp}
Групповая средняя	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$		$\bar{x}_p$

$$S_{\text{ост}} = \sum_{i=1}^{q} (x_{i1} - \bar{x}_1)^2 + \sum_{i=1}^{q} (x_{i2} - \bar{x}_2)^2 + \ldots + \sum_{i=1}^{q} \left(x_{ip} - \bar{x}_p\right)^2 \tag{3.3}$$

$S_{\text{ост}}$ - остаточная сумма квадратов отклонений наблюдаемых значений группы от своей групповой средней, которая характеризует рассеяние внутри группы. Практически остаточную сумму находят по равенству

$$S_{\text{ост}} = S_{\text{общ}} - S_{\text{факт}} \tag{4.3}$$

Элементарными преобразованиями можно получить формулы более удобные для расчётов

$$S_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^{p} P_i - \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{p} R_j\right)^2}{pq} \tag{5.3}$$

$$S_{\text{факт}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{p} R_j^2}{q} - \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{p} R_j\right)^2}{pq}, \tag{6.3}$$

где

$P_j = \sum\limits_{i=1}^{q} x_{ij}^2$ - сумма квадратов значений признака на уровне F_j (7.3)

$R_j = \sum\limits_{i=1}^{q} x_{ij}$ - сумма значений признака на уровне F_j. (8.3)

Замечание 5.3 Для упрощения вычислений вычитают из каждого наблюдаемого значения одно и то же число С, примерно равное общей средней. Если уменьшенные значения $y_{ij} = x_{ij} - C$, то

$$\mathrm{S}_{\text{общ}}=\sum_{j=1}^{p}Q_i-\frac{\left(\sum_{j=1}^{p}T_j\right)^2}{pq} \qquad (9.3)$$

$$\mathrm{S}_{\text{факт}}=\frac{\sum_{j=1}^{p}T_j^2}{q}-\frac{\left(\sum_{j=1}^{p}T_j\right)^2}{pq}, \qquad (10.3)$$

где $Q_j=\sum_{i=1}^{q}y_{ij}^2$ - сумма квадратов уменьшенных значений признака на уровне F_j

$T_j=\sum_{i=1}^{q}y_{ij}$ - сумма уменьшенных значений признака на уровне F_j.

Для вывода формул (9.3) и (10.3) достаточно подставить $x_{ij}=y_{ij}+C$ в соотношение (7.3) и $R_j=\sum_{i=1}^{q}\left(y_{ij}+C\right)=\sum_{i=1}^{q}y_{ij}+qC=T_j+qC$ в соотношение (8.3).

Пояснения

I. Убедимся, что $\mathrm{S}_{\text{факт}}$ характеризует воздействие фактора F.

Допустим, что фактор оказывает существенное влияние на *X*. Тогда группа наблюдаемых значений признака на одном определённом уровне будет, вообще говоря, отличаться от групп наблюдений на других уровнях. Следовательно, будут различаться и групповые средние, причём они тем больше рассеяны вокруг общей средней, чем большим окажется воздействие фактора. Отсюда следует, что для оценки воздействия фактора целесообразно составить сумму квадратов отклонений групповых средних от общей средней.

Замечание 6.3 Отклонения возводят в квадрат, чтобы исключить погашение положительных и отрицательных отклонений.

Умножая эту сумму на q, получим $\mathrm{S}_{\text{факт}}$.

Итак, $\mathrm{S}_{\text{факт}}$ характеризует воздействие фактора.

I I. Убедимся, что $\mathrm{S}_{\text{ост}}$ отражает влияние случайных причин.

Казалось бы наблюдения одной группы не должны различаться. Однако, поскольку на X, кроме фактора F воздействуют и случайные причины, - наблюдения одной и той же группы, вообще говоря, различны и, значит, рассеяны вокруг своей групповой средней. Отсюда следует, что для оценки влияния случайных причин целесообразно составить сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений каждой группы от своей групповой средней, то есть $\mathrm{S}_{\text{ост}}$.

Итак, $\mathrm{S}_{\text{ост}}$ характеризует воздействие случайных причин.

I I I. Убедимся, что $\mathrm{S}_{\text{общ}}$. отражает влияние и фактора и случайных причин.

Будем рассматривать все наблюдения как единую совокупность. Наблюдаемые значения признака различны вследствие воздействия фактора и случайных причин. Для оценки этого воздействия целесообразно составить сумму квадратов отклонений наблюдаемых значений от общей средней, то есть $\mathrm{S}_{\text{общ}}$.

Итак, $\mathrm{S}_{\text{общ}}$ характеризует влияние фактора и случайных причин.

Приведём пример, который показывает, что факторная сумма отражает влияние фактора, а остаточная – влияние случайных причин.

Пример 1.3 Двумя приборами произведено по два измерения физической величины, истинный размер которой равен x. Рассматривая в качестве фактора систематическую ошибку С, а в качестве его уровней – систематические ошибки C_1 и C_2 соответственно первого и второго прибора, показать, что $S_{\text{факт}}$ определяется систематическими, а $\mathrm{S}_{\text{ост}}$ - случайными ошибками измерений.

Решение. Введём обозначения.
α_1, α_2 - случайные ошибки первого и второго измерений первым прибором.
β_1, β_2 - случайные ошибки первого и второго измерений вторым прибором.

Тогда наблюдаемые значения результатов измерений соответственно равны

$$x_{11} = x + C_1 + \alpha_1, \quad x_{21} = x + C_1 + \alpha_2,$$
$$x_{12} = x + C_2 + \beta_1, \quad x_{22} = x + C_2 + \beta_2.$$

Первый индекс при x указывает номер измерения, а второй – номер прибора.
Средние значения измерений первым и вторым прибором соответственно равны

$$\bar{x}_1 = x + C_1 + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = x + C_1 + \alpha$$

$$\bar{x}_2 = x + C_2 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = x + C_2 + \beta$$

Общая средняя

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}{2} = x + \frac{C_1 + C_2}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Факторная сумма равна

$$S_{факт} = (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x})^2$$

Подставляя величины, заключённые в скобки, после элементарных преобразований получим

$$S_{факт} = \frac{(C_1 - C_2)^2}{2} + (C_1 - C_2)(\alpha - \beta) + \frac{(\alpha - \beta)^2}{2}$$

Мы видим, что $S_{факт}$ определяется, главным образом, первым слагаемым, поскольку случайные ошибки измерений малы. Следовательно, $S_{факт}$ действительно отражает влияние фактора С.
Остаточная сумма

$$S_{ост} = (x_{11} - \bar{x}_1)^2 + (x_{21} - \bar{x}_1)^2 + (x_{12} - \bar{x}_2)^2 + (x_{22} - \bar{x}_2)^2$$

Подставив величины, заключённые в скобки , получим

$$S_{ост} = \left[(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\alpha_2 - \alpha)^2\right] + \left[(\beta_1 - \beta)^2 + (\beta_2 - \beta)^2\right]$$

Мы видим, что $S_{ост}$ определяется случайными ошибками измерений и, следовательно, действительно отражает влияние случайных причин.

Замечание 7.3 То, что $S_{ост}$ порождается случайными причинами, следует из равенства

$$S_{ост} = S_{общ} - S_{факт}$$

Действительно, $S_{общ}$ является результатом воздействия фактора и случайных причин, и вычитая $S_{факт}$, мы исключаем влияние фактора. Следовательно, оставшаяся часть отражает влияние случайных причин.

Связь между общей, факторной и остаточной суммами

Покажем, что

$$S_{общ} = S_{факт} + S_{ост} \tag{11.3}$$

Для упрощения вывода ограничимся двумя уровнями $(p = 2)$ и двумя испытаниями $(q = 2)$. Результаты испытаний представлены в виде таблицы

Таблица 2.3

Номер испытания l	Уровни фактора F_j	
	F_1	F_2
1	x_{11}	x_{12}
2	x_{21}	x_{22}
$\bar{x}_j$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$

Тогда

$$S_{общ} = (x_{11} - \bar{x})^2 + (x_{21} - \bar{x})^2 + (x_{12} - \bar{x})^2 + (x_{22} - \bar{x})^2$$

Вычтем и прибавим к каждому наблюдаемому значению на первом уровне групповую среднюю $\bar{x}_1$, а на втором $\bar{x}_2$.

Выполнив возведение в квадрат и учитывая, что сумма всех удвоенных произведений равна нулю, получим

$$S_{общ} = 2\left[(\bar{x}_1 - \bar{x})^2 + (\bar{x}_2 - \bar{x})^2\right] + [(x_{11} - \bar{x}_1)^2 + (x_{21} - \bar{x}_1)^2 + +(x_{12} - \bar{x}_2)^2 + (x_{22} - \bar{x}_2)^2] \quad (12.3)$$

Итак,

$$S_{общ} = S_{факт} + S_{ост}$$

Следствие. Из полученного равенства вытекает важное следствие, что

$$S_{ост} = S_{общ} - S_{факт} \quad (13.3)$$

Отсюда видно, что нет надобности непосредственно вычислять остаточную сумму, а достаточно найти общую и факторные суммы, и затем их разность.

Общая, факторная и остаточная дисперсии

Разделив суммы квадратов отклонений на соответствующее число степеней свободы, получим общую, факторную и остаточную дисперсии

$$s^2_{общ} = S_{общ} / (pq - 1), \quad s^2_{факт} = S_{факт} / (p - 1), \quad s^2_{ост} = S_{ост} / p(q - 1) \quad (14.3)$$

где p – число уровней фактора, q - число наблюдений на каждом уровне, $pq - 1$ - число степеней свободы общей дисперсии, $p - 1$– число степеней свободы факторной дисперсии, $p(q - 1)$ - число степеней свободы остаточной дисперсии.

Если гипотеза о равенстве средних справедлива, то все эти дисперсии являются несмещёнными оценками генеральной дисперсии. Например, учитывая, что объём выборки $n = pq$, заключаем, что

$$s^2_{общ} = S_{общ} / (pq - 1) = S_{общ} / (n - 1) \quad (15.3)$$

исправленная выборочная дисперсия, которая является несмещённой оценкой генеральной дисперсии.

Замечание 8.3 Число степеней свободы $p(q - 1)$ остаточной дисперсии равно разности между числами степеней свободы общей и факторной дисперсий. Действительно,

$$(pq - 1) - (p - 1) = pq - p = p(q - 1) \quad (16.3)$$

Сравнение нескольких средних методом дисперсионного анализа

Определение 2.3 Если две случайные величины U и V, распределённые по закону χ^2 со степенями свободы k_1 и k_2, то величина

$$F = \frac{U/k_1}{V/k_2} \tag{17.3}$$

имеет распределение, которое называют распределением Фишера – Снедекора со степенями свободы k_1 и k_2 (иногда его обозначают через V^2).

Замечание. 5.3 Распределение Фишера – Снедекора зависит только от чисел степеней свободы и не зависит от других параметров.

Замечание 9.3 Критерий Фишера – Снедекора применяется для проверки нулевой гипотезы.

Замечание 10.3 Критическая область строится в зависимости от вида конкурирующей функции.

Вернёмся к начальной задаче: проверить при заданном уровне значимости нулевую гипотезу о равенстве нескольких $(p > 2)$ средних нормальных совокупностей с неизвестными, но одинаковыми дисперсиями. Покажем, что решение этой задачи сводится к сравнению факторной и остаточной дисперсий по критериям Фишера – Снедекора

$$F = \frac{s_b^2}{s_m^2}, \tag{18.3}$$

где s_b^2 - большая исправленная дисперсия, а s_m^2 малая исправленная дисперсия. Здесь $k_1 = n_1 - 1$, где n_1 - объём выборки, по которой определяется s_b^2, а $k_2 = n_2 - 1$, где n_2 - объём выборки, по которой определяется s_m^2.

1. Пусть нулевая гипотеза о равенстве нескольких средних (далее они будут называться групповыми) правильна. В этом случае факторная и остаточная дисперсии являются несмещёнными оценками неизвестной генеральной дисперсии и, следовательно, различаются незначимо. Если сравнить эти оценки по критерию F, то, очевидно, критерий укажет, что нулевую гипотезу о равенстве факторной и остаточной дисперсий следует принять.

Таким образом, если гипотеза о равенстве групповых средних правильна, то верна гипотеза о равенстве факторной и остаточной дисперсий.

2. Пусть нулевая гипотеза о равенстве двух средних ложна. В этом случае с возрастанием расхождении между групповыми средними будет увеличиваться факторная дисперсия, а вместе с ней и отношение $F_{\text{набл}} = S^2_{\text{факт}} / S^2_{\text{ост}}$. В итоге
   $F_{\text{набл}}$ окажется больше $F_{\text{кр}}$.

И, следовательно, гипотеза о равенстве дисперсий будет отвергнута.

Таким образом, если гипотеза о равенстве групповых средних ложна, то ложна и гипотеза о равенстве факторной и остаточной дисперсий.

Легко доказать от противного справедливость обратных утверждений: из правильности (ложности) гипотезы о дисперсиях следует правильность (ложность) гипотезы о средних.

Итак, для того **чтобы проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями, достаточно проверить по критерию F нулевую гипотезу о равенстве факторной и остаточной дисперсий**. В этом и состоит дисперсионный анализ.

Замечание 11.4 Если факторная дисперсия окажется меньше остаточной, то уже отсюда следует справедливость гипотезы о равенстве групповых средних и, значит, нет надобности прибегать к критерию F **.**

Замечание 12.3 Если нет уверенности в справедливости предположения о равенстве дисперсий рассматриваемых p совокупностей, то это предположение следует проверить предварительно, например, по критерию Качрена G – отношению максимальной исправленной дисперсии к сумме всех исправленных дисперсий

$$G = S_{\max}^2 \Big/ (S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_p^2)\,.$$

Пример 2.3 Произведено по 4 испытания на каждом из трёх уровней. Результаты испытаний приведены в таблице 3.3. Методом дисперсионного анализа при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми дисперсиями.

Таблица 3.3

Номер испытания l	Уровни фактора F_j		
	F_1	F_2	F_3
1	51	52	42
2	52	54	44
3	56	56	50
4	57	58	52
$\bar{x}_{\text{гр}\,j}$	54	55	47

Решение. Для упрощения расчёта вычтем С = 52 из каждого наблюдаемого значения. $y_{ij} = x_{ij} - 52$. Составим расчётную таблицу 4.3.

Пользуясь таблицей и учитывая, что число уровней фактора p = 3, число испытаний на каждом уровне $q = 4$, найдём общую и факторную суммы квадратов отклонений

$$\text{S}_{\text{общ}} = \sum_{j=1}^{p} S_i - \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} T_j\right)^2}{pq} = 266 - 0 = 266$$

$$S_{\text{факт}} = \frac{\sum_{j=1}^{p} T_j^2}{q} - \frac{\left(\sum_{j=1}^{p} T_j\right)^2}{pq} = \frac{608}{4} - 0 = 152$$

Найдём остаточную сумму квадратов отклонений:

$$\text{S}_{\text{ост}} = \text{S}_{\text{общ}} - \text{S}_{\text{факт}} = 266 - 152 = 114$$

Найдём факторную и остаточные дисперсии по формулам

$$\text{s}^2{}_{\text{общ}} = S_{\text{общ}} / (pq-1),\ \ \text{s}^2{}_{\text{факт}} = S_{\text{факт}} / (p-1),\ \ \ \text{s}^2{}_{\text{ост}} = S_{\text{ост}} / p(q-1)$$

Отсюда

$$\text{s}^2{}_{\text{факт}} = S_{\text{факт}} / (p-1) = \frac{152}{3-1} = 76$$

$$\text{s}^2{}_{\text{ост}} = S_{\text{ост}} / p(q-1) = \frac{114}{3(4-1)} = \frac{114}{9} = 12{,}67$$

Сравним факторную и остаточную дисперсии по критерию F, для чего найдём наблюдаемое значение критерия

$$F_{\text{набл}} = \text{s}^2{}_{\text{факт}} / \text{s}^2{}_{\text{ост}} = \frac{76}{12{,}67} = 6$$

Таблица 4.3

Номер Испытания l	Уровни фактора F_j						
	F_1		F_2		F_3		
	y_{i1}	y_{i1}^2	y_{i2}	y_{i2}^2	y_{i3}	y_{i3}^2	
1 2 3 4	-1 0 4 5	1 0 16 25	0 2 4 6	0 4 16 36	-10 -8 -2 0	100 64 4 0	
$S_j = \sum_{i=1}^{4} y_{ij}^2$		42		56		168	$\sum S_j = 266$
T_j	8		12		-20		$\sum T_j = 0$
T_j^2	64		144		400		$\sum T_j^2 = 608$

Учитывая, что число степеней свободы числителя $k_1 = 2$, а знаменателя $k_2 = 9$ и уровень значимости $\alpha = 0{,}05$, по таблице находим $F_{\text{кр}}$ $(0{,}05;\, 2;\, 9) = 4{,}26$.

Так как $F_{\text{набл}} > F_{\text{кр}}$, гипотезу о равенстве групповых средних отвергаем. Другими словами, групповые средние «в целом» различаются **значимо**. Если требуется сравнить средние попарно, то следует воспользоваться критерием Стьюдента.

Замечание 13.3 Если наблюдаемые значения x_{ij} - десятичные дроби с одним знаком после запятой, то целесообразно перейти к целым числам $y_{ij} = 10x_{ij} - C$, где С примерно среднее значение чисел $10x_{ij}$. В итоге получим сравнительно небольшие **целые** числа. Хотя при этом факторная и остаточная дисперсия увеличивается в 10^2 раз – их отношение не изменится

Например, если $x_{11} = 12{,}1;$ $x_{21} = 12{,}2;$ $x_{31} = 12{,}6;$ то приняв $y_{ij} = 10x_{ij} - 123$, получим:

$y_{11} = 121 - 123 = -2;$ $y_{21} = 122 - 123 = -1;$ $y_{31} = 126 - 123 = 3;$

Аналогично поступают, если после запятой имеется k знаков: $y_{ij} = 10^k x_{ij} - C$

Пример 3.3 Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми генеральными дисперсиями

Таблица 5.3

Номер испытания l	Уровни фактора F_j				
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5
1 2 3 4	42 55 67 67	66 91 96 98	35 50 60 69	64 70 79 81	70 79 88 90
$\overline{x}_{\text{гр}\,j}$	57,75	87,75	53,50	73,50	81,75

Ответ. $S_{\text{набл}}$ = 6,13, $S_{\text{кр}}$ (0,05; 4,15) =3,05
Гипотеза отвергается

Пример 4.3 Требуется при уровне значимости 0,05 проверить нулевую гипотезу о равенстве групповых средних. Предполагается, что выборки извлечены из нормальных совокупностей с одинаковыми генеральными дисперсиями

Таблица 6.3

Номер испытания l	Уровни фактора F_j			
	F_1	F_2	F_3	F_4
1 2 3 4	6 7 8 11	6 7 11 12	9 12 13 14	7 9 10 10
$\overline{x}_{\text{гр}\,j}$	8	9	12	9

Ответ. $S_{\text{набл}}$ = 2,4, $S_{\text{кр}}$ (0,05; 3,12) =3,49
Нет оснований отвергать гипотезу.

§ 4 Элементы теории корреляции

На практике часто встречаются задачи, в которых необходимо либо проверить гипотезу о **зависимости** или **независимости** наблюдённых случайных величин системы, либо построить доверительный интервал для коэффициента корреляции. Корреляционный статистический анализ обычно предшествует рассмотрению задач регрессионного и дисперсионного анализа, а иногда даже заменяет регрессионный анализ. Наиболее естественной оценкой коэффициента корреляции является **выборочный коэффициент корреляции.**

Рассматривается некоторая совокупность наблюдений. Пусть имеется выборка из **генеральной** совокупности $(x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n)$.

Корреляционный момент определяется по формуле

$$K_{ab} = M\left[(x-a)(y-b)\right] \tag{1.4}$$

Коэффициент корреляции равен

$$R = K_{ab} \Big/ \sqrt{M(x-a)^2 \cdot M(y-b)^2} \tag{2.4}$$

Рассмотрим **выборочный** корреляционный момент

$$K_{xy} = M\left[(x-\overline{x})(y-\overline{y})\right] \tag{3.4}$$

Можно его посчитать следующим образом:

$$K_{xy} = M\left[(x\,y)\right] - \overline{x}M\left[y\right] - \overline{y}M\left[x\right] + \overline{x}\cdot\overline{y} \tag{4.4}$$

Так как $M\left[y\right] = \overline{y}, \quad M\left[x\right] = \overline{x}$, то формула получается в виде

$$K_{xy} = M\left[(x\,y)\right] - \overline{x}\cdot\overline{y} \tag{5.4}$$

Так как $M\left[(x\,y)\right] = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, то $K_{x\,y} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\,\overline{y}$ (6. 4)

Выборочный коэффициент корреляции

Выборочный коэффициент корреляции определяется по формуле

$$r = K_{x\,y} \big/ S_x S_y \tag{7.4}$$

Коэффициент корреляции, полученный по выборке, или **выборочный коэффициент корреляции** представляет собой с**мещённую** оценку. По мере увеличения объёма выборки он приближается к истинному. Это значит, что r **состоятельная** оценка. Эффективность этой оценки не известна. Оценка $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ - **смещённая**, поэтому S_x и S_y нужно брать исправленными, и тогда

$$K_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \bar{x}\,\bar{y} \qquad (8.4)$$

Замечание 1.4 Нужно брать либо **все** величины исправленными, либо **все** неисправленными.
Замечание 2.4 r **-** это очень ненадёжная оценка при малых выборках, а при большой выборке всё равно как брать S_x и S_y.

R - **не случайная** величина. Можно найти её точное значение по **генеральной** совокупности.
r - **случайная** величина, поэтому у неё есть какие-то математическое ожидание, дисперсия и плотность распределения.

$$M(r) = R - \frac{R}{2}\cdot\frac{1-R^2}{n-1}$$ - (это первые члены ряда разложения) (9.4).

Замечание 3.5 Это **смещённая** оценка, так как есть вычитаемое, но при $n \to \infty$ смещение стремится к нулю.
Такие оценки называются **асимптотически несмещёнными.**
Ошибку оценивания позволяет рассмотреть величина СКВО (из (9.4))

$$\sigma_r = \frac{1-R^2}{\sqrt{n-1}} \qquad (10.4)$$

Замечание 4.4 Коэффициент корреляции не может иметь нормальный закон распределения, так как он находится в пределах $[-1, 1]$.
Фишер получил закон распределения **коэффициента корреляции** в виде

$$f(r) = \frac{1}{\pi\Gamma(\pi-2)}(1-R^2)^{\frac{n-1}{2}}(1-r^2)^{\frac{n-4}{4}}\frac{d^{\,n-2}}{d\,(R\,r)^{n-2}}\left[\frac{\arcsin R\,r}{\sqrt{1-R^2r^2}}\right] \qquad (11.4)$$

Эта формула годится, если $|r| < 1$. Если $|r| > 1$, то $f(r) = 0$.

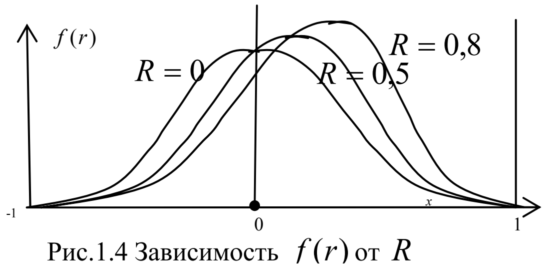


Рис.1.4 Зависимость $f(r)$ от R

Замечание 5.4 Если $R < 0$, то скос будет влево (см. рис. 1.4).
Замечание 6.4 Чем больше $|R|$, тем меньше закон похож на нормальный. Закон распределения можно считать нормальным только для очень большой выборки.
Замечание 7.4 При $R < 0{,}3$ можно ещё закон распределения считать нормальным. А также $0{,}3 < |R| < 0{,}7$, когда $n > 100$. $|R| > 0{,}7$, когда $n > 500$.
Замечание 8.4 Выборка должна быть больше, если R велико.
Допустим, что при изучении выборки мы получили $r = 0{,}1$. Есть ли корреляционная связь? Неизвестно, так как выборка случайна, и может быть $r = -0{,}1$ или $r = 0$. Значит, уверено говорить о связи нельзя. Если r получено из случайной выборки, то нужно уметь оценить насколько случайно это значение.

Определение 1.4 Выборочный коэффициент корреляции считают **значимым**, если он доказывает наличие **реальной корреляционной связи** между признаками.

Вопрос о значимости коэффициента корреляции

Существует **три способа** определения **значимости**.
I способ. Пусть мы из опыта получили опытный коэффициент r

Выдвигаем гипотезу о том, что не существует реальной связи между признаками, то есть, что $R = 0$.

Простейший **способ проверки** этой гипотезы состоит в том, что при $R = 0$ закон распределения r считается нормальным. Это мы и проверяем по СКВО r

$$\sigma_r = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \tag{12.4}$$

Здесь нужно использовать правило 3σ

$$3\sigma_r = \frac{3}{\sqrt{n-1}} \tag{13.4}$$

Нормально распределённая случайная величина не может отклоняться от математического ожидания больше, чем на 3σ, значит

$$|r| < \frac{3}{\sqrt{n-1}} \tag{14.4}$$

Если это условие выполняется, то значит $R = 0$, то есть, **связи** между признаками **нет**.

Правило. Если $|r| < \frac{3}{\sqrt{n-1}}$, то R может быть нулём, тогда $r \neq 0$ не доказывает, что есть связь, то есть r **незначимо**. Если $|r| > \frac{3}{\sqrt{n-1}}$, то коэффициент корреляции r **значим**.

Пример 1.4 $r = 0{,}35$ - коэффициент корреляции между оценками на вступительном экзамене и в первой сессии. Для двух факультетов $n = 550$.
Решение. По формуле (1.4) находим

$$|r| = \frac{3}{\sqrt{n-1}} = \frac{3}{\sqrt{549}} \approx 0{,}043 < 0{,}35$$

Получилось, что $r > \frac{3}{\sqrt{n-1}}$, значит $r = 0{,}35$ **значимый** коэффициент.

I I способ. Фишер доказал, что следующая величина

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \tag{15.4}$$

подчиняется закону распределения *Student*а с числом степеней свободы, равным $n-2$.Отсюда всегда можно исследовать вопрос о правдоподобии гипотезы.

Правило. Если **выборочный** коэффициент корреляции окажется **меньше** табличного, найденного по уровню значимости α и числу степеней свободы $n-2$, то его следует признать незначимым при **данном уровне значимости**.

Пример 2.4. $r = 0{,}3$ по выборке $n = 50$

Решение. Примем $\alpha = 0{,}05$. По таблице $r_x = 0{,}27$. Значит $r = 0{,}3$ **значим.**

Пример 3.4 $r = 0{,}3$ по выборке $n = 2500$

Решение. При $\alpha = 0{,}05$ из таблицы находим $r_x < 0{,}06$. Следовательно, $r = 0{,}3$ тоже **значим.**

Замечание 9.4 Из таблицы 1.4 видим, что при $n = 7$ даже $r = 0{,}7$ ничего не доказывает.

Таблица 1.4

Критические значения r_x (Регины Шторм)			
α / n-2	0,05	0,01	0,001
5	0,75	0,87	0,95
10	0,58,	0,71	0,87
15	0,48	0,61	0,72
20	0,42	0,53	0,65
30	0,35	0,45	0,55
40	0,30	0,39	0,49
50	0,27	0,35	0,44
70	0,23	0,30	0,38
100	0,19	0,25	0,32
150	0,16	0,21	0,26
200	0,14	0,18	0,23
300	0,11	0,15	0,19
500	0,09	0,11	0,15
$\approx$1000	0,06	0,09	0,11

Примечание . **I способ** даёт то же значение, что и **II способ,** если только $\alpha = 0{,}003$, так как вероятность равна 0,997.

Это были способы точечного оценивания. Для коэффициента корреляции можно построить доверительный интервал.

Построение доверительного интервала для генерального коэффициента корреляции

Допустим, что опытным путём нашли доверительный интервал для оценки коэффициента корреляции. Ищем на числовой оси такой интервал, о котором с заданной вероятностью α можно утверждать, что он содержит неизвестный генеральный коэффициент корреляции R .

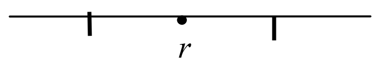


Рис. 2.4 Доверительный интервал r

Фишер предложил такой приём: если r не распределено нормально, то нельзя ли построить такую функцию от r, которая была бы распределена точно по нормальному закону? Тогда можно для этой функции получить доверительный интервал, а потом перейти к r.

Преобразование Фишера состоит в следующем: рассматривается выражение

$$z = \ln\sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \tag{16.4}$$

Фишер доказал, что z - распределение почти точно нормально

$$z = 1{,}15129\lg\frac{1+r}{1-r}$$

Математическое ожидание этой величины

$$z_o = M(r) = 1{,}15129\lg\frac{1+R}{1-R} + \frac{R}{2(n-1)} \tag{17.4}$$

Фишер нашёл дисперсию

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n-3} \tag{18.4}$$

Поскольку R неизвестно, то будем считать

$$z_o = M(r) = 1{,}15129\lg\frac{1+r}{1-r} + \frac{r}{2(n-1)}, \tag{19.4}$$

и что дисперсия от r не зависит и равна

$$\sigma_r^2 = \frac{1}{n-3} \tag{20.4}$$

z_o - выборочное среднее величины z, но доверительный интервал строится для генерального среднего. То есть, строим доверительный интервал для генерального среднего случайной величины z.

Если выборка большая, то примем Фишера, а если мала, то примем *Student*а.

Найдём $z_1 < z < z_2$. Если преобразование Фишера разрешить относительно r, то получим доверительный интервал для r

$$r = \operatorname{th} z \tag{21.4}$$

Тогда

$$\operatorname{th} z_1 < R < \operatorname{th} z_2 \tag{22.4}$$

Замечание 10.4 Здесь нет симметрии относительно выборочного коэффициента корреляции.

I I I способ установления значимости выборочного коэффициента корреляции.

Если есть интервальная оценка для генерального коэффициента корреляции, то найти значимость r легко. Если доверительный интервал **содержит нуль,** то r **незначим**, а если доверительный интервал **не содержит нуль**, то r может быть **значимым**.

Пример 4.4 Допустим, что при $n = 15$ нашли $r = 0{,}937$. Взяв **доверительную** вероятность $\alpha = 0{,}95$, получим

$$z_o = 1{,}7469$$

$$\sigma_z = 0{,}2886$$

$$* \; z_o - \frac{t_\alpha S_z}{\sqrt{n-1}} \qquad ** \; z_o + \frac{t_\alpha S_z}{\sqrt{n-1}} \tag{23.4}$$

t_α находим из таблицы *Studenta*. По числу степеней свободы $n-1 = 14$ и $\alpha = 0{,}95$ находим $t_\alpha = 2{,}14$. Подставив эти данные в написанные выражении, получим

$$*1{,}515 < z < **1{,}977$$

Найдём доверительный интервал для R

$$0{,}91 < R < 0{,}96$$

$r = 0{,}937$ значим, так как интервал не содержит точку нуль.

Задача для самостоятельного решения. 100 наблюдений привело к выборочному коэффициенту корреляции $r = 0{,}5$. Построить доверительный интервал при каком-либо уровне значимости и установить значим он или нет.

Литература

1. Артемьева Е.А. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике для психологов. Изд. МГУ. 1969
2. Боровков А.А. Курс теории вероятностей. М.: Наука. 1972.
3. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория вероятностей. Математическая статистика. «Гардарика», 1998.
4. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А Теория вероятностей. М.: Наука. 1969.
5. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. М.: Радио и связь. 1983.
6. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. ГИФ-МЛ, 1958.
7. Витавер Л.М. Элементы теории вероятностей. Новосибирск: НИИВТ, 1974.
8. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк. 1972.
9. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высш. шк. 1998.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегральных сумм, рядов и произведений. ГИФ-МЛ,1963
11. Ежов И.И., Скороходов А.В., Ядренко М.И. Элементы комбинаторики. Изд. «Наука». 1977.
12. Емельянов Г.В., Скитович В.П. Задачник по теории вероятностей и математической статистике. Изд. Ленинградского Университета. 1967.
13. Захаров В.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Теория вероятностей. М.: Наука. 1983.
14. Румшинский Л.З. Элементы теории вероятностей. М.: Наука. 1976..
15. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. М. Наука. 1971.
16. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж. Вероятность. М.: Мир, 1969.
17. Коллектив авторов под ред. А.А. Свешникова Сборник задач по теории. вероятностей, математической статистике и теории случайных функций. М.: Наука. 1970.
18. Курно О.. Основы теории шансов и вероятностей. М.: Наука. 1970.
19. Мешалкин Л.Д. Сборник задач по теории вероятностей. Изд. МГУ. 1963.
20. Пугачёв В.С. Введение в теорию вероятностей. ГРФ-МЛ, 1968.
21. Пытьев Ю.П., Шишмарев И.А. Курс теории вероятностей и математической статистики для физиков. Изд. МГУ. 1983.
22. Розанов Ю.А. Лекции по теории вероятностей. М.: Наука. 1988.
23. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. ГРФ-МЛ, 1982.
24. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. ГРФ-МЛ, 1982.

Оглавление

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Ада Шоломовна Готман

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Учебное пособие для аспирантов

Компьютерная верстка: Шулика И.В.

Подписано в печать 17.05.2006 с оригинал-макета
Бумага офсетная № 1, формат 60x84 1/16, печать трафаретная – Riso
Усл. печ. л. 7,84 Тираж 100 экз., заказ № . Цена договорная

ФГОУ ВПО “Новосибирская государственная академия водного транспорта”
(“НГАВТ”), 630099, г. Новосибирск, ул. Щетинкина, 33

Отпечатано в издательстве ФГОУ ВПО “НГАВТ”