Министерство транспорта Российской Федерации

ФГОУ ВПО

«НОВОСИБИРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ ВОДНОГО ТРАНСПОРТА»

А.Ш. Готман

Тензорное исчисление

Учебное пособие для аспирантов

Новосибирск 2007

УДК 512 64
Г 738

Готмаен А.Ш. Тензорное исчисление: учеб. Пособие/ А.Ш. Готман.-Новосибирск, Новосибирская гос. акад. вод. трансп. , 2007

Настоящее учебное пособие предназначено для аспирантов, студентов – стажёров и преподавателей НГАВТ и составлено по опыту изучения тензорного исчисления в школе – семинаре при кафедре ТУК в 2005 – 2006 учебном году. Пособие может быть полезным для изучения методов тензорного исчисления, широко используемых в современной научной литературе по гидромеханике, теории упругости и тем разделам математической физики, которые связаны с механикой сплошной среды.

Рецензенты
Владимиров Ю.Н. – зав. кафедрой высшей математики Новосибирского университета экономики и управления, канд.-физ. мат. наук - доцент
Ботвинков В.М. – зав. каф. Водных путей, гидравлики и гидроэкологии (ВП, Г и ГСЭ) Новосибирской академии водного транспорта.

ISBN 978-5-8119-0306-1

ВВЕДЕНИЕ

Тензорное исчисление до последнего времени изучалось в университетах. Однако, в настоящее время невозможно заниматься научными исследованиями в области гидромеханики, электротехники и теории упругости, не будучи знакомым с зарубежной литературой, где тензорное исчисление нашло широкое применение.

Без использования координатных систем изучение и описание задач геометрии и физики было очень сложно. Введение Декартом **системы координат** совершило революцию в математике и её приложениях. Следующий шаг был сделан при введении **векторного исчисления.** При этом для решения алгебраических и геометрических задач было достаточно введения двух понятий – **скаляра** и **вектора**. Но для решения физических задач, например, задач теории упругости и гидродинамики требуются более сложные величины – **тензоры**. Тензорное исчисление возникло при разработке теории относительности и затем стало незаменимым методом, используемым в дифференциальной геометрии. Вслед за этим тензорное исчисление стало применяться всё шире и шире, потому что оно позволяет исследовать свойства изучаемых величин путём выделения **инвариантов. Инвариантами** называются те зависимости, которые **не меняются** при переходе из одной системы координат в другую**.** Так как законы физики и механики не зависят от способа описания, то для выявления **основных свойств** изучаемого явления требуется доказательство их **независимости** от координатной системы. Именно поэтому необходим способ перехода из одной системы координат в другую, как для геометрических зависимостей, так и для дифференциальных и интегральных уравнений. Таким образом, **преобразование систем координат** является **основным методом** тензорного исчисления.

Независимость описания от выбора системы координат является не единственным требованием, предъявляемым к изучаемым величинам и законам. Так как физические величины имеют **размерность**, то нужно, чтобы входящие в уравнение в виде слагаемых величины имели **одинаковую** размерность. В тензорном исчислении это обеспечивается равенством **рангов** входящих в уравнение тензоров.

В отличие от специальных разделов математики, таких, как дифференциальные и интегральные уравнения, математическая физика, механика и т.д., тензорное исчисление представляет собой **общий метод** описания, одинаково применимый в любом разделе физики и математики.

При составлении данного пособия учитывалась необходимость повторения основных понятий векторного анализа, теории поля и гидромеханики, поэтому многие разделы излагаются, может быть, с излишними промежуточными выкладками и приведением простейших рисунков. Это пособие должно помочь читать специальную литературу, в которой используется тензорное исчисление.

В трёх приложениях в конце пособия в виде таблиц систематизированы сведения, облегчающие освоение основных геометрических и физических величин в тензорных обозначениях.

Тензоры в механике сплошных сред

Предметом изучения тензорного анализа является исследование **инвариантных** характеристик геометрических объектов и физических величин при переходе от одной системы координат к другой.

Тензорный анализ для механика – это математический аппарат, с помощью которого не только сокращаются математические выкладки, но и концентрируется физическая идея, так как использование тензорного анализа позволяет отодвинуть на второй план сложную геометрическую картину физического явления.

Механика сплошной среды (жидкости) имеет дело с величинами, которые не зависят от системы координат. Математически такие величины представляются **тензорами**. **Тензор** в каждой системе координат определяется **совокупностью** величин, которые называются его **компонентами**. Если заданы компоненты тензора **в одной системе** координат, то можно определить его компоненты **в любой другой системе** координат.

Физические **законы** механики **сплошной среды** выражаются **тензорными уравнениями**. Вследствие **линейности и однородности тензорных преобразований** тензорные уравнения, **верные в одной** системе координат, **верны и в любой** другой.

Впервые систематическое изложение тензорного исчисления было выполнено Г. Риччи (G. Ricci) и Леви-Чевита (Levi-Civita) в 1901 году. Термин **«тензор»** (напряжение) употребляется в механике при описании упругих деформаций тел, а в механике сплошной среды для описания давлений и касательных напряжений.

Задача, приводящая к понятию тензора

В механической системе реакция связей связана с конструкцией, а в жидкости – это реакция связей (напряжений) между жидкими частицами. Для изучения этих **связей** в жидкости выделим элементарный объём dV, ограниченный поверхностью площади dS.

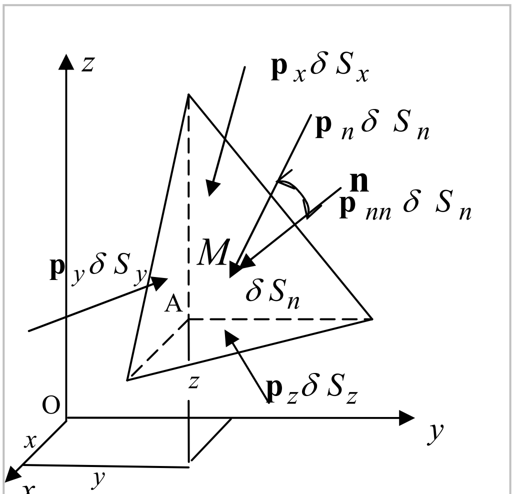


Рис. 1 Схема давлений

Гидродинамическое давление в вязкой жидкости представляют в векторном виде как геометрическое уравнение

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{nx} + \mathbf{p}_{ny} + \mathbf{p}_{nz} \tag{1}$$

Вектор давления $\mathbf{p}_n$ составляет с нормалью угол $\angle(\mathbf{p}_n \mathbf{n})$. Тогда нормальное давление можно записать в виде (рис. 1)

$$p_{nn} = p_n \cos(\mathbf{p}_n, \mathbf{n}) \tag{2}$$

Угол $(\mathbf{p}_n, \mathbf{n})$ **неизвестен**, поэтому нормальное давление в данной точке M можно представить в зависимости от трёх составляющих давления p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}, спроектировав их на нормаль и **сложив проекции**. Вводятся следующее обозначения косинусов углов

$$\alpha_1 = \cos(\mathbf{n}, x),\ \alpha_2 = \cos(\mathbf{n}, y),\ \alpha_3 = \cos(\mathbf{n}, z).$$

Отсюда получается сумма

$$p_{nn} = p_n \cos(\mathbf{p}_n, \mathbf{n}) = \alpha_1 p_{nx} + \alpha_2 p_{ny} + \alpha_3 p_{nz} \tag{3}$$

Замечание 1. Здесь следует помнить, что направление сил $\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$ тоже неизвестно, потому что они **не** параллельны осям. Ox, Oy, Oz.

Следовательно, для решения задачи необходимо знать проекции p_{nx}, p_{ny}, p_{nz}. В векторном виде эти проекции представляются так:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p}_x &= \mathbf{p}_{xx} + \mathbf{p}_{xy} + \mathbf{p}_{xz}, \\ \mathbf{p}_y &= \mathbf{p}_{yx} + \mathbf{p}_{yy} + \mathbf{p}_{yz}, \\ \mathbf{p}_z &= \mathbf{p}_{zx} + \mathbf{p}_{zy} + \mathbf{p}_{zz}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{p}_{xx}, \mathbf{p}_{yy}, \mathbf{p}_{zz}$.- нормальные давления на гранях тетраэдра, перпендикулярные плоскостям Oyz, Oxz, Oxy соответственно, а касательные напряжения на тех же гранях тетраэдра представляются как векторы, параллельные граням, причём справедливы равенства

$$\mathbf{p}_{xy} = \mathbf{p}_{yx}, \quad \mathbf{p}_{xz} = \mathbf{p}_{zx}, \quad \mathbf{p}_{yz} = \mathbf{p}_{zy} \tag{5}$$

Из этих компонентов давления составляются уравнения **равновесия сил поверхностных давлений**

$$\left.\begin{aligned} p_{nx}\delta S_n &= p_{xx}\delta S_x + p_{yx}\delta S_y + p_{zx}\delta S_z, \\ p_{ny}\delta S_n &= p_{xy}\delta S_x + p_{yy}\delta S_y + p_{zy}\delta S_z, \\ p_{nz}\delta S_n &= p_{xz}\delta S_x + p_{yz}\delta S_y + p_{zz}\delta S_z. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Поделив все уравнения (6) на δS_n, получают эту систему через косинусы углов в виде

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= p_{xx}\cos(\mathbf{n},x) + p_{yx}\cos(\mathbf{n},y) + p_{zx}\cos(\mathbf{n},z), \\ p_{ny} &= p_{xy}\cos(\mathbf{n},x) + p_{yy}\cos(\mathbf{n},y) + p_{zy}\cos(\mathbf{n},z), \\ p_{nz} &= p_{xz}\cos(\mathbf{n},x) + p_{yz}\cos(\mathbf{n},y) + p_{zz}\cos(\mathbf{n},z). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Заключение 2. Гидродинамическое давление определяется тремя нормальными давлениями $p_{xx}, \; p_{yy}, \; p_{zz}$ и тремя касательными напряжениями $p_{xy} = \tau_{xy} = \tau_{yx}, p_{xz} = \tau_{xz} = \tau_{zx}, \; p_{yz} = \tau_{yz} = \tau_{zy}$. Подставляя (7) в уравнение (3), получают

$$p_{nn} = \alpha_1^2\, p_{xx} + \alpha_2^2\, p_{yy} + \alpha_3^2\, p_{zz} + 2\alpha_1\alpha_2\,\tau_{xy} + 2\alpha_1\alpha_3\,\tau_{xz} + 2\,\alpha_2\alpha_3\,\tau_{yz} \tag{8}$$

Здесь получается **тензор напряжений** в виде

$$T = \begin{Bmatrix} p_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & p_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & p_{zz} \end{Bmatrix}, \tag{11}$$

который характеризует **состояние жидкости** с помощью входящих в него **девяти** величин.

ГЛАВА 1. ПОНЯТИЕ ТЕНЗОРА

§ 1. Основные понятия и определения.

Если **скаляр** – это величина, которая характеризуется **одним** числом, не зависящим от систем координат, то для описания **вектора** требуется **три** числа, зависящие от системы координат.

Замечание 1.1 Простота или сложность решения физических задач часто зависит от **выбора системы координат**, и **переход из одной системы координат в другую** является одной из важных составляющих процесса решения.

Например, как видно из описанного выше примера, для описания **напряжений** в теле или в жидкости требуется **девять** чисел, которые записываются в виде матрицы третьего порядка.

Определение 1.1 Числа (или функции), которые полностью определяют величину в какой-то системе координат, называются **компонентами** этой величины.

Замечание 2.1 В общем случае компоненты **могут быть функциями времени и координат**.

Изучаемые величины можно рассматривать в системах координат **с разным началом и с разной ориентацией.** Но в каждой системе координат компоненты определяют **одну и ту же величину**. Именно поэтому перевод величины из одной системы координат в другую не может быть произвольным. При этом **закон описания компонент** изучаемой величины **не должен зависеть от системы координат**.

Определение 2.1 Требование **неизменности закона зависимости** изучаемой величины от компонент при переходе от одной системы координат к другой называется требованием **инвариантности**.

Замечание 3.1 Практически решение физических задач чаще всего сводится к отысканию **инвариантов,** то есть величин, которые **не зависят** от системы координат и от применяемых методов решения.

Исходя из определения 1.1, удобно рассматривать задаваемые в виде матриц **компоненты** некой величины как **тензоры различных рангов**.

Далее будет дано более строгое определение тензора (ПРИЛОЖЕНИЕ 3, определения 4, 5. 6) .

Ранг тензора.

Тензоры можно классифицировать по **рангу** (или **порядку**) в соответствии с частным видом **законов преобразования**, которым они подчиняются. В трёхмерном евклидовом пространстве, таком как обычное физическое пространство, число компонент тензора равно 3^n, где n - **ранг** тензора.

Определение 3.1 Тензор **нулевого** ранга в любой системе координат в пространстве любого числа измерений задаётся **одной** компонентой и называется **скаляром.** Он характеризует физическую величину, выражаемую **одним** числом (ПРИЛОЖЕНИЕ 3, определение 1)..

Примерами скаляров являются

1) Длина отрезка как расстояние между двумя точками.

2) Любое **постоянное число**.

3) Квадратичная форма трёхмерного пространства

$$x^i x^k \quad (i,k=1,2,3)$$

Пример 1.1 Пусть A и B – две точки в пространстве, координаты которых в декартовой системе (K) - $x_k^A, x_k^B \quad (k=1,2,3)$, а в другой декартовой системе (K') - x'^A_k, x'^B_k .

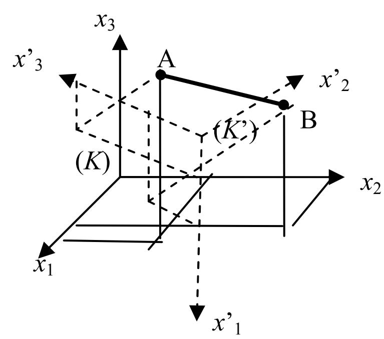


Рис. 1.1 К инвариантности отрезка AB

Замечание 4.1 Инвариантность длины отрезка (по теореме Пифагора), равной $\Delta x = |AB| = \sqrt{\left(x_1^B - x_1^A\right)^2 + \left(x_2^B - x_2^A\right)^2 + \left(x_3^B - x_3^A\right)^2} = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2}$, лежит в основе вывода формулы ортогонального преобразования координат, так как длина отрезка Δx является скаляром и $\Delta x' = \Delta x$ (рис. 1.1).

Следовательно, для любых двух систем декартовых координат необходимо выполнение следующего равенства (при неизменности масштабов)

$$\sum_{k=1}^{3} \Delta x_k^2 = \sum_{k=1}^{3} \Delta x'^2_k \tag{1.1}$$

Здесь применяется запись

$$\begin{aligned} \Delta x_k &= x_k^B - x_k^A \quad (k=1,2,3) \\ \Delta x'_k &= x'^B_k - x'^A_k \quad (k=1,2,3) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Как известно из аналитической геометрии, формулы преобразования декартовых координат имеют вид:

$$x_1^{'} = \alpha_{1'k} x_k + x_1^{'o}; \quad x_1 = \alpha_{k'1} x'_k + x_1^{o1};$$
$$x_2^{'} = \alpha_{2'k} x_k + x_2^{'o}; \quad x_2 = \alpha_{k'2} x'_k + x_2^{o1}; \qquad (3.1)$$
$$x_3^{'} = \alpha_{3'k} x_k + x_3^{'o}; \quad x_3 = \alpha_{k'3} x'_k + x_3^{o1};$$

или

$$x_i^{'} = \alpha_{i'k} x_k + x_i^{'o}; \quad x_i = \alpha_{k'i} x'_k + x_i^{oi}; \quad (i = 1,2,3) \qquad (4.1)$$

Отсюда ясно, что связь между отрезками в двух системах координат имеет вид

$$\Delta x'_k = \alpha_{i'k} \Delta x_k \qquad (5.1)$$

Здесь $\alpha_{i'k} = \cos(x_i^{'}, x_k)$ **косинус угла между i-той новой осью и k -той старой осью.** Все коэффициенты $\alpha_{i'k}$ этого **ортогонального линейного преобразования** не зависят от значений координат, и между ними должны существовать следующие соотношения

$$\alpha_{l'i} \alpha_{l'k} = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases} \qquad (6.1)$$

$$\alpha_{i'l} \alpha_{k'l} = \delta'_{ik} = \begin{cases} 0, & i' \neq k' \\ 1, & i' = k' \end{cases} \qquad (7.1)$$

Требуется доказать, что выполнение ортогонального линейного преобразования (5.1) при выполнении условий (6.1) и (7.1) где . δ_{ik} и δ'_{ik} - **дельта Кронекера,** обеспечивают **выполнение условия** (1.1), Действительно, вычислим сумму $\sum_{k=1}^{3} \Delta x'^2_k$, используя (5.1),

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta x'^2_i = \sum_{i'=1}^{3} \alpha_{i'k} \Delta x_k \alpha_{i'l} \Delta x_l = \Delta x_k \Delta x_l \alpha_{i'k} \alpha_{i'l}. \qquad (8.1)$$

В силу соотношений (6.1) и (7.1) имеем:

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta x'^2_i = \sum_{i'=1}^{3} \alpha_{i'k} \Delta x_k \alpha_{i'l} \Delta x_l = \Delta x_k \Delta x_l \delta_{kl} = \sum_{k=1}^{3} \Delta x_k^2. \qquad (9.1)$$

Таким образом, закон преобразования координат (4.1) обеспечивает **инвариантность длины отрезка прямой** по отношению к любым ортогональным изменениям координатной системы.

Тензоры **первого** ранга ($n = 1$) имеют **три** координатные компоненты в трёхмерном пространстве и называются **векторами**. Они задают величины, которые характеризуются численным значением в виде.

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}\, a_1 + \mathbf{j}\, a_2 + \mathbf{k}\, a_3 \qquad (10.1)$$

Определение 4.1 Вектор – это величина, определяемая в любой системе координат **тремя числами** (или функциями) a_i, которые при изменении пространственной системы координат преобразуются в $a_i^{'}$ **по закону**

$$a_i^{'} = \alpha_{i'k} a_k\,. \qquad (11.1)$$

где $\alpha_{i'k}$ - косинус угла между i-той осью координат исходной системы и k-той осью системы, в которую осуществляется переход. Равенство (11.1) даст возможность далее дать **общее определение вектора** (ПРИЛОЖЕНИЕ 3, определения 2 и 3).

Определение 5.1 Три величины a_i называются **компонентами вектора**.

Определение 6.1 Если для каждой прямолинейной прямоугольной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трёх величин a_x, a_y, a_z, преобразующихся по формулам

$$\left.\begin{aligned} a_{x'} &= a_x \cos(x',x) + a_y \cos(x',y) + a_z \cos(x',z), \\ a_{y'} &= a_x \cos(y',x) + a_y \cos(y',y) + a_z \cos(y',z), \\ a_{z'} &= a_x \cos(z',x) + a_y \cos(z',y) + a_z \cos(z',z). \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

в величины $a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}$, отвечающие другой системе координат $Ox'y'z'$, то совокупность этих величин определяет величину **a**, называемую **аффинным ортогональным вектором.**

Определение 7.1 Тензоры **второго** ранга ($n = 2$) называются **диадиками** и описывают некоторые характеристики, важные в механике сплошной среды.

Определение 8.1 Тензор **второго** ранга - это величина, полностью определяемая в любой системе координат $3^2 = 9$ **компонентами**.

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{13.1}$$

Аналогично определению 4.1 **вектора** можно дать определение **тензора второго ранга**.

Определение 9.1 Если для каждой прямолинейной прямоугольной системы координат $Oxyz$ имеется совокупность трёх векторов $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$, преобразующихся в векторы $\mathbf{p}_{x'}, \mathbf{p}_{y'}, \mathbf{p}_{z'}$, которые отвечают другой системе координат $Ox'y'z'$ и получаются по формулам

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{p}_{x'} &= \mathbf{p}_x \cos(x',x) + \mathbf{p}_y \cos(x',y) + \mathbf{p}_z \cos(x',z), \\ \mathbf{p}_{y'} &= \mathbf{p}_x \cos(y',x) + \mathbf{p}_y \cos(y',y) + \mathbf{p}_z \cos(y',z), \\ \mathbf{p}_{z'} &= \mathbf{p}_x \cos(z',x) + \mathbf{p}_y \cos(z',y) + \mathbf{p}_z \cos(z',z). \end{aligned}\right\} \tag{14.1}$$

то совокупность трёх векторов определяет новую величину **П**, называемую **аффинным ортогональным тензором второго ранга, составляющими которого являются в**екторы $\mathbf{p}_x, \mathbf{p}_y, \mathbf{p}_z$, направленные по осям Ox, Oy, Oz.

Замечание 5.1 По аналогии с обозначениями вектора для **тензора второго ранга** вводят обозначение

$$\Pi = \mathbf{i}\,\mathbf{p}_x + \mathbf{j}\mathbf{p}_y + \mathbf{k}\,\mathbf{p}_z \tag{15.1}$$

Прежде, чем рассматривать тензоры любого ранга, требуется изучить основные свойства **тензоров второго ранга** и действия с ними в **декартовой системе координат**.

§ 2. Взаимное положение двух векторов

Проекция вектора a на единичный вектор $\mathbf{u}^o$

Из определения скалярного произведения двух векторов **a** и **b** известны следующие формулы

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\varphi \tag{1.2}$$

где φ - угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. С учётом рисунка 1.2, можно записать так:

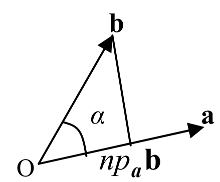


Рис. 1.2. Проекция вектора **b** на вектор **a**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot np_{\boldsymbol{a}}\mathbf{b} \tag{2.2}$$

или

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \cdot np_{\boldsymbol{b}}\mathbf{a} \tag{3.2}$$

Для того, чтобы получить проекцию вектора **a** на вектор **u**, запишем её выражение из формулы (3.2)

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} = |\mathbf{u}|\cdot np_{\boldsymbol{u}}\mathbf{a} \tag{4.2}$$

в виде

$$np_{\boldsymbol{u}}\mathbf{a} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \tag{5.2}$$

где отношение $\dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}$ является единичным вектором $\mathbf{u}^o$ и имеет вид

$$\mathbf{u}^o = \frac{\mathbf{u}}{|\boldsymbol{u}|} = \cos(\mathbf{u},x)\mathbf{i} + \cos(\mathbf{u},y)\mathbf{j} + \cos(\mathbf{u},z)\mathbf{k}\ . \tag{6.2}$$

Пусть вектор **u** выражен через свои проекции $|\mathbf{u}|\cos(\mathbf{u},x),\ |\mathbf{u}|\cos(\mathbf{u},y),\ |\mathbf{u}|\cos(\mathbf{u},z)$ на координатные оси x, y, z. Тогда его можно из формулы (6.2) записать в виде

$$\mathbf{u} = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k} = |\mathbf{u}|\cos(\mathbf{u},x)\mathbf{i} + |\mathbf{u}|\cos(\mathbf{u},y)\mathbf{j} + |\mathbf{u}|\cos(\mathbf{u},z)\mathbf{k} \tag{7.2}$$

Аналогично можно записать

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} = |\mathbf{a}|\cos(\mathbf{u},x)\mathbf{i} + |\mathbf{a}|\cos(\mathbf{u},y)\mathbf{j} + |\mathbf{a}|\cos(\mathbf{u},z)\mathbf{k} \tag{8.2}$$

Используя формулы (5.2), (6.2) и (8.2), запишем выражение проекции вектора **a** на единичный вектор $\mathbf{u}^{\mathrm{o}}$ в виде

$$np_{\boldsymbol{u}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}^o = [a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\ ]\cdot[\cos(\mathbf{u},x)\mathbf{i} + \cos(\mathbf{u},y)\mathbf{j} + \cos(\mathbf{u},z)\mathbf{k}\ ] \tag{9.2}$$

С учётом формулы скалярного произведения векторов в прямоугольной системе координат

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z \tag{10.2}$$

получим

$$\begin{aligned} np_{\boldsymbol{u}}\mathbf{a} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{u}^{\mathrm{O}} &== [|\mathbf{a}|\cos(\mathbf{a},x)\mathbf{i} + |\mathbf{a}|\cos(\mathbf{a},y)\mathbf{j} + |\mathbf{a}|\cos(\mathbf{a},z)\mathbf{k}\ ]\cdot \\ &\cdot[\cos(\mathbf{u},x)\mathbf{i} + \cos(\mathbf{u},y)\mathbf{j} + \cos(\mathbf{u},z)\mathbf{k}\ ] = \\ &= |\mathbf{a}|\cdot[\cos(\mathbf{a},x)\cos(\mathbf{u},x) + \cos(\mathbf{a},y)\cos(\mathbf{u},y) + \cos(\mathbf{a},z)\cos(\mathbf{u},z)\ ] \end{aligned} \tag{11.2}$$

Проекция вектора а на единичный вектор $\mathbf{u}^{\mathrm{o}}$ **равна произведению модуля вектора а на сумму произведений одноименных направляющих косинусов обоих векторов.**

Косинус угла между двумя векторами

С учётом того, что модуль $|\mathbf{u}^{\mathrm{O}}|$=1 из формул (2.2) или (3.2) получается

$$np_{\boldsymbol{u}}\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{u}^{\mathrm{o}}|\cdot\cos(\mathbf{u},\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|\cdot\cos\varphi \tag{12.2}$$

Приравнивая правые части выражений (11.2) и (12.2), получим **выражение для косинуса угла** φ **между двумя векторами** в виде

$$\cos\varphi = \cos(\mathbf{a},x)\cdot\cos(\mathbf{u},x) + \cos(\mathbf{a},y)\cdot\cos(\mathbf{u},y) + \cos(\mathbf{a},z)\cdot\cos(\mathbf{u},z) \tag{13.2}$$

Формулу (13.2) можно получить прямо через единичные векторы $\mathbf{a}^{\mathrm{o}}$ и $\mathbf{u}^{\mathrm{o}}$, которые выражается через направляющие косинусы так:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^o &= \cos\alpha\,\mathbf{i} + \cos\beta\,\mathbf{j} + \cos\gamma\,\mathbf{k}, \quad |\mathbf{a}| = 1, \\ \mathbf{u}^o &= \cos\alpha_1\mathbf{i} + \cos\beta_1\mathbf{j} + \cos\gamma_1\mathbf{k}, \ \ |\mathbf{u}| = 1. \end{aligned} \tag{14.2}$$

Скалярное произведение этих единичных векторов равно

$$\mathbf{a}^o\mathbf{u}^o = |\mathbf{a}^o|\cdot|\mathbf{u}^o|\cos(\mathbf{u}^o,\mathbf{a}^o) = \cos(\mathbf{u}^o,\mathbf{a}^o) = \cos\varphi \tag{15.2}$$

С другой стороны, с учётом формул (15.2) можно записать

$$\mathbf{a}^o \mathbf{u}^o = \cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\alpha_1 + \cos\beta \cdot \cos\beta_1 + \cos\gamma \cdot \cos\gamma_1 \tag{16.2}$$

где

$$\begin{aligned} &\cos\alpha = \cos(\mathbf{a}, x), \quad \cos\beta = \cos(\mathbf{a}, y), \quad \cos\gamma = \cos(\mathbf{a}, z), \\ &\cos\alpha_1 = \cos(\mathbf{u}, x), \quad \cos\beta_1 = \cos(\mathbf{u}, y), \quad \cos\gamma_1 = \cos(\mathbf{u}, z). \end{aligned} \tag{17.2}$$

Косинус угла между двумя векторами равен сумме произведений направляющих косинусов этих векторов.

Замечание 1.2 Симметричность формул типа (13.2) и (16.2) позволяет легко переводить характеристики геометрических элементов из одной системы координат в другую.

Первая основная задача

Пусть в некоторой точке О выбраны два базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и $(\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3)$. Любой из векторов первого базиса можно разложить по векторам второго базиса и наоборот. **Решение.** Обозначим через $\alpha_{i'}^1, \alpha_{i'}^2, \alpha_{i'}^3$ коэффициенты разложения вектора $\mathbf{e'}_i$ по векторам базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Эти девять величин ($i = 1,,2,3$) называют коэффициентами прямого преобразования. Отсюда получается система преобразования в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{e'}_1 &= a_{1'}^1 \mathbf{e}_1 + a_{1'}^2 \mathbf{e}_2 + a_{1'}^3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e'}_2 &= a_{2'}^1 \mathbf{e}_1 + a_{2'}^2 \mathbf{e}_2 + a_{2'}^3 \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e'}_3 &= a_{3'}^1 \mathbf{e}_1 + a_{3'}^2 \mathbf{e}_2 + a_{3'}^3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \tag{i}$$

или в общем виде

$$\mathbf{e'}_i = \sum_{k=1}^{3} a_{i'}^k \mathbf{e}_k \tag{ii}$$

Аналогично, коэффициенты разложения вектора $\mathbf{e}_j$ по векторам $(\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3)$ обозначаются через $\alpha_j^{1'}, \alpha_j^{2'}, \alpha_j^{3'}$ ($j = 1,2,3$), и эти девять величин называют **коэффициентами обратного преобразования** и это записывается в виде

$$\mathbf{e}_j = \sum_{k=1}^{3} a_j^{k'} \mathbf{e'}_k \tag{iii}$$

Между коэффициентами прямого и обратного преобразования существует связь. Подставив разложение каждого вектора $\mathbf{e}_k$ из (iii) в (ii), после перегруппировки слагаемых получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e'}_i &= \alpha_{i'}^1 \mathbf{e}_1 + \alpha_{i'}^2 \mathbf{e}_2 + \alpha_{i'}^3 \mathbf{e}_3 = \\ &= \alpha_{i'}^1 \left(\alpha_1^{1'} \mathbf{e}'_1 + \alpha_1^{2'} \mathbf{e}'_2 + \alpha_1^{3'} \mathbf{e}'_3\right) + \alpha_{i'}^2 \left(\alpha_2^{1'} \mathbf{e'}_1 + \alpha_2^{2'} \mathbf{e'}_2 + \alpha_2^{3'} \mathbf{e'}_3\right) + \alpha_{i'}^3 \left(\alpha_3^{1'} \mathbf{e'}_1 + \alpha_3^{2'} \mathbf{e'}_2 + \alpha_3^{3'} \mathbf{e'}_3\right) = \\ &= (\alpha_{i'}^1 \alpha_1^{1'} + \alpha_{i'}^2 \alpha_2^{1'} + \alpha_{i'}^3 \alpha_3^{1'}) \mathbf{e'}_1 + (\alpha_{i'}^1 \alpha_1^{2'} + \alpha_{i'}^2 \alpha_2^{2'} + \alpha_{i'}^3 \alpha_3^{2'}) \mathbf{e'}_2 + (\alpha_{i'}^1 \alpha_1^{3'} + \alpha_{i'}^2 \alpha_2^{3'} + \alpha_{i'}^3 \alpha_3^{3'}) \mathbf{e'}_3 = \\ &= \mathbf{e'}_1 \sum_{m=1}^{3} \alpha_{i'}^m \alpha_m^{1'} + \mathbf{e'}_2 \sum_{m=1}^{3} \alpha_{i'}^m \alpha_m^{2'} + \mathbf{e'}_3 \sum_{m=1}^{3} \alpha_{i'}^m \alpha_m^{3'} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e'}_k \sum_{m=1}^{3} \alpha_{i'}^m \alpha_m^{k'} \end{aligned}$$

Аналогичным путём можно найти обратный переход

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_1 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{m'} \alpha_{m'}^1 + \mathbf{e}_2 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{m'} \alpha_{m'}^2 + \mathbf{e}_3 \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{m'} \alpha_{m'}^3 = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{e}_k \sum_{i=1}^{3} \alpha_i^{m'} \alpha_{m'}^k$$

Вывод: Отсюда ясно, что для каждого значения индекса i $(i=1,2,3)$ имеют место следующие 18 соотношений

$$\sum_{m=1}^{3}\alpha_{i'}^{m}\alpha_{m}^{j'}=\begin{cases}0, & i'\neq j',\\ 1, & i'=j'.\end{cases}=\delta_{i'}^{j'} \qquad \text{(iv)}$$

$$\sum_{m'=1}^{3}\alpha_{i}^{m'}\alpha_{m'}^{j}=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i=j.\end{cases}=\delta_{i}^{j} \qquad \text{(v)}$$

Проверка показывает

$$\mathbf{e'}_i=\sum_{k=1}^{3}\mathbf{e'}_k\sum_{m=1}^{3}\alpha_{i'}^{m}\alpha_{m}^{k'}=\sum_{k=1}^{3}\delta_{i'}^{k'}\mathbf{e'}_k\ , \qquad \text{(vi)}$$

$$\mathbf{e}_i=\sum_{k=1}^{3}\mathbf{e}_k\sum_{m'=1}^{3}\alpha_{i}^{m'}\alpha_{m'}^{k}=\sum_{k=1}^{3}\delta_{i}^{k}\mathbf{e}_k\ , \qquad \text{(vii)}$$

что подтверждает корректность преобразований.

Вторая основная задача

Пусть в пространстве введены две прямоугольные декартовы системы координат (*K*) и (K'). Задача заключается в том, чтобы **выразить координаты** (x_1,x_2,x_3) произвольной точки М в системе (*K*) **через координаты** (x_1',x_2',x_3') системы (K') и наоборот (рис. 2.2).

Решение. Пусть **r** и **r'** – соответственно радиусы – векторы точки *M* в системах (*K*) и (K'), орты которых $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$ и $(\mathbf{e'}_1,\mathbf{e'}_2,\mathbf{e'}_3)$. Положение начала координат O_1 системы (K') в системе (*K*) определяется радиусом – вектором $\mathbf{r'}_o$, так что $\mathbf{r}_{o_1}=-\mathbf{r'}_o$.

Пусть $\alpha_{i'k}$ - косинус угла между i - той осью системы (K') и k - той осью системы (*K*) так, что

$$\alpha_{i'k}=\cos(x'_i\,,x_k)=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k\,. \qquad \text{(i)}$$

Тогда

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}'+\mathbf{r}_{o_1};$$

$$\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\mathbf{r'}_o$$

Используя выражение для радиуса – вектора, получим

$$x_k\mathbf{e}_k=x'_k\,\mathbf{e'}_k+x_k^{o1}\mathbf{e}_k \qquad \text{(ii)}$$

$$x'_k\,\mathbf{e'}_k=x_k\mathbf{e}_k+x'^{o}_k\,\mathbf{e'}_k \qquad \text{(iii)}$$

(Нужно помнить, что

$$x_k\mathbf{e}_k=\sum_{k=1}^{3}x_k\mathbf{e}_k=x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+x_3\mathbf{e}_3).$$

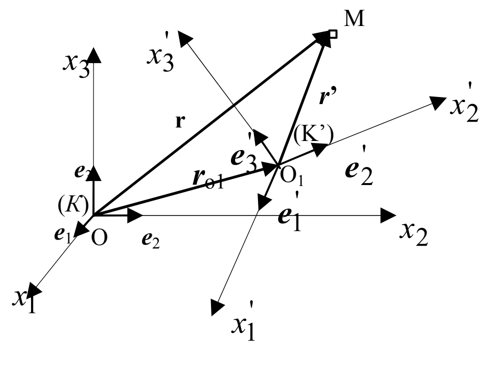


Рис. 2.2 К преобразованию координат точки М

Умножая (ii) скалярно на $\mathbf{e}_i$, а (iii) на $\mathbf{e}_i'$ и используя свойства скалярного произведения векторов

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k=\begin{cases}0, & i\neq k\\ 1, & i=k\end{cases},$$

а также (i), получим

$$x_i = (\mathbf{e}'_k \cdot \mathbf{e}_i) \cdot x'_k + x_k^{o1} = \alpha_{k'i} x'_k + x_k^{o1};$$

$$x'_i = (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}'_i) \cdot x_k + x'^{o}_i = \alpha_{i'k} x_k + x'^{o}_i.$$

Эти выражения и дают формулы линейного ортогонального преобразования координат точки. Коэффициенты этих формул удовлетворяют условиям ортогональности. Эти условия можно получить, используя формулы

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 = a_1,\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 = a_2,\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 = a_3$$

и отсюда

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3)\mathbf{e}_3 \qquad \text{(iv)}$$

для разложения ортов $\mathbf{e}_k$ системы (K) по ортам $\mathbf{e}'_k$ системы (K') и ортов $\mathbf{e}'_k$ по ортам $\mathbf{e}_k$.

Полагая в (iv) $\mathbf{a} = \mathbf{e}_i'$, получим

$$\mathbf{e}_i' = (\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_l)\mathbf{e}_l = \alpha_{i'l}\mathbf{e}_l.$$

Аналогично получим

$$\mathbf{e}_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l')\mathbf{e}_l' = \alpha_{l'i}\mathbf{e}_l'.$$

Умножая первое разложение скалярно на $\mathbf{e}'_k$, а второе - на $\mathbf{e}_k$, и используя $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases}$ получим

$$\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_k' = \alpha_{i'l} . \alpha_{k'l} .;$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = \alpha_{l'i} . \alpha_{l'k} ..$$

Вводя **символ (дельту) Кронекера**

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 0, \text{ если } & i \neq k \\ 1, \text{ если } & i = k \end{cases},$$

получим

$$\begin{aligned} \alpha_{i'l} . \alpha_{k'l} . &= \delta'_{ik}, \\ \alpha_{l'i} . \alpha_{l'k'} &= \delta_{ik}. \end{aligned} \qquad \text{(v)}$$

Эти формулы доказывают **ортогональность** выполненного преобразования.

§ 3. Реперы и кореперы в пространстве

Проекции вектора на прямоугольные координаты

Пусть вектор задан в виде суммы своих компонентов (рис. 1.3)

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{a}_k \qquad (1.3)$$

Проекции вектора **а** на оси прямоугольной системы координат определяются в виде скалярных произведений этого вектора **а** на соответствующие орты $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$.

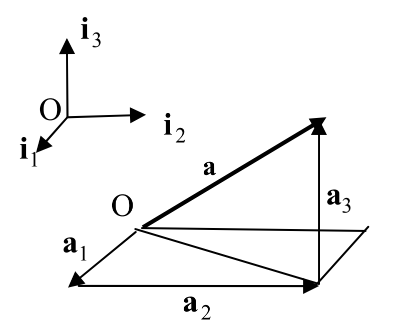


Рис. 1.3 Компоненты вектора

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_1, \quad a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_2 \quad a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_3. \quad (2.3)$$

так как по формуле (2.2) легко получить проекцию на орт в виде $\mathbf{a} \cdot \mathbf{i}_\text{k} = |\mathbf{i}_\text{k}| \cdot np_{\mathbf{i}_\text{k}} \mathbf{a} = a_\text{k}$.

Замечание 1.3 Следует помнить, что компоненты $\mathbf{a}_1$ $\mathbf{a}_2$ $\mathbf{a}_3$ вектора **а** (1.3) направлены по ортам $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$.

Если выразить орты $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ как частное в виде $\mathbf{i}_1 = \mathbf{a}_1/a_1$, $\mathbf{i}_2 = \mathbf{a}_2/a_2$ и $\mathbf{i}_3 = \mathbf{a}_3/a_3$, то вектор **а** в прямоугольной системе координат можно записать в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{k=1}^{3} \mathbf{a}_k = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{\mathbf{a}_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{3} (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{i}_k) \frac{\mathbf{a}_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{3} (\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{a}_k}{a_k}) \frac{\mathbf{a}_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{3} (\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{a}_k}{a_k^2}) \mathbf{a}_k \qquad (3.3)$$

Замечание 2.3 Равенство (3.3) было рассмотрено для **прямоугольной** системы координат, а задача состоит в том, чтобы определить компоненты вектора в **произвольном** базисе.

Проекции вектора на оси пространственных координат

Определение 1.3 Два базиса **реперы** $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и **кореперы** $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$ называются **взаимными**, если их векторы удовлетворяют условию

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq k \\ 1 & \text{если} \quad i = k \end{cases} \qquad (4.3)$$

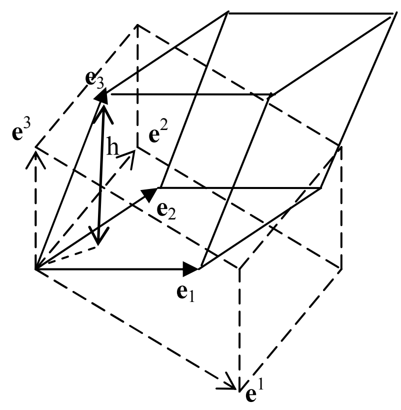


Рис. 2.3 Связь основного и взаимного базисов

Замечание 3.3 Векторы $\mathbf{e}_k$ (**реперы**) расположены под **произвольными** углами друг к другу, и их модули **не обязательно равны единице**.

Замечание 4.3 Из равенства $\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_k = 0$, если $i \neq k$, следует, что **каждый вектор** одного базиса **перпендикулярен** к двум векторам другого базиса (например, $\mathbf{e}^1 \perp \mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}^1 \perp \mathbf{e}_3$, а это значит, что он **перпендикулярен плоскости** векторов $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$), а с третьим вектором, с которым совпадает его индекс, он составляет острый угол (потому что их произведение равно положительному числу).

Замечание 5.3 Если на двух **взаимных базисах** построить параллелепипеды с объёмами $V_1 = |\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)|$ и $V^1 = \left|\mathbf{e}^1 \cdot (\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3)\right|$, то **рёбра одного из них будут перпендикулярны к граням другого** и наоборот (рис. 2.3)..

Например, $\mathbf{e}^3 \cdot \mathbf{e}_3 = \left|\mathbf{e}^3\right| \cdot |\mathbf{e}_3| \cos(\mathbf{e}^3, \mathbf{e}_3) = 1$ означает, что

$$\left|\mathbf{e}^3\right| = \frac{1}{|\mathbf{e}_3| \cos(\mathbf{e}^3, \mathbf{e}_3)} = \frac{1}{h} \qquad (5.3)$$

где $h = |\mathbf{e}_3| \cos(\mathbf{e}^3, \mathbf{e}_3)$

Отсюда следует, что **модули векторов одного базиса равны обратным значениям параллельным им высот параллелепипеда взаимного базиса.**

Построение взаимного базиса.

Пусть дан базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Вектор $\mathbf{e}^1$ взаимного базиса должен быть перпендикулярен к векторам $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$, т.е. параллелен их векторному произведению

$$\mathbf{e}^1 = m(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \qquad (6.3)$$

Скаляр m определяется из условия

$$\mathbf{e}^1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1, \qquad (7.3)$$

т.е.

$$m \mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) = 1 \qquad (8.3)$$

Поскольку смешанное произведение $\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \neq 0$, (так как векторы $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ составляют базис) получим

$$m = \frac{1}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} = \frac{1}{V_1} \tag{9.3}$$

Это выражение используется далее в виде

$$\mathbf{e}^1 = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{\mathbf{e}_1 \cdot (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)} = \frac{\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3}{V_1}. \tag{10.3}$$

Здесь модуль $|V_1|$ равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Аналогично строятся векторы

$$\mathbf{e}^2 = \frac{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1}{V_1} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}^3 = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{V_1}. \tag{11.3}$$

Замечание 6.3 Соотношения (10.3) и (11.3) можно записать короче:

$$\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_l (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n)} \tag{12.3}$$

где (i, j, k) и (l, m, n) составляют циклические перестановки чисел 1, 2, 3.

Полученные формулы дают выражения **кореперов** $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ через **реперы** $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Аналогично получаются **реперы** через **кореперы**.:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{e}^2 \times \mathbf{e}^3}{V^1}. \ \mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{e}^3 \times \mathbf{e}^1}{V^1} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{e}^1 \times \mathbf{e}^2}{V^1}. \tag{13.3}$$

где модуль $|V^1|$ равен объёму параллелепипеда, построенного на **кореперах** $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$.

Сокращенная запись выражений (13.3) аналогична выражению (12.3) и имеет вид

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k}{\mathbf{e}^l (\mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n)} \tag{14.3}$$

Свойства взаимных базисов

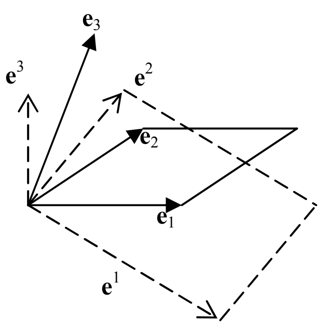


Рис. 3.3 Взаимные базисы

Свойство 1. Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ - орты **прямоугольной** системы координат, то взаимный к нему базис $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ **совпадает** с основным, то есть,

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^1 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}^2 = \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}^3 = \mathbf{i}_3. \tag{15.3}$$

Свойство 2. **Взаимные базисы** либо оба **правые**, либо оба **левые** (рис. 3.3)..

Это следует из того, что $V_1 \cdot V^1 = 1$, что в свою очередь получается из формулы

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k}{\mathbf{e}^l (\mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n)} \cdot \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_l (\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n)} = 1 \tag{16.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о формулы $V_1 \cdot V^1 = 1$.

Из известной формулы скалярного произведения двух векторных произведений

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$$

следует, что числитель формулы (16.3) равен единице

$$(\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_j) \cdot (\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_k) - (\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \tag{17.3}$$

а тогда знаменатель должен быть равен тоже единице, так как $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^i = 1$, а, кроме того, легко видеть, что $\mathbf{e}^m \times \mathbf{e}^n = \mathbf{e}^l$, $\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_l$, откуда получается, что

$$V_1 \cdot V^1 = 1, \text{ ч.т.д.} \tag{18.3}$$

Определение связи между проекциями вектора во взаимных базисах

Задача 1.3 Пусть заданы **три произвольных некомпланарных** вектора $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$, которые выбираются в виде системы координат. Требуется разложить по ним вектор $\mathbf{b}$. Задача сводится к определению компонентов b^1, b^2, b^3 из системы трёх скалярных уравнений, полученных проектированием выражения

$$\mathbf{b} = b^1\mathbf{b}_1 + b^2\mathbf{b}_2 + b^3\mathbf{b}_3$$

на оси этого базиса.

Решение. Для решения этой задачи нужно использовать **два взаимных базиса,** чтобы получить связь между проекциями векторов во взаимных базисах. Для определения проекций b^k из векторного уравнения

$$\mathbf{b} = b^1\mathbf{b}_1 + b^2\mathbf{b}_2 + b^3\mathbf{b}_3 = \sum_{i=1}^{3} b^i\mathbf{b}_i\ , \tag{19.3}$$

где $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ - некомпланарные векторы, умножим вектор $\mathbf{b}$ на $\mathbf{b}^k$ - вектор взаимного базиса. Тогда получим (см. формулу (4.3))

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^k = \sum_{i=1}^{3} b^i\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}^k = b^k \tag{20.3}$$

так как

$$\mathbf{b}^i \cdot \mathbf{b}_k = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq k \\ 1 & \text{если} \quad i = k \end{cases}.$$

Отсюда получаются искомые проекции в виде

$$b^k = \sum_{i=1}^{3} b^i\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}^k \tag{21.3}$$

Замечание 7.3 Из формул (20.3) и (12.3) получается

$$b^1 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^1 = \frac{\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)}{\mathbf{b}_1 \cdot (\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3)} \tag{22.3}$$

Замечание 8.3. Здесь интересно равенство $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^1 = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}_1}$ которое получается из $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^1 \cdot \mathbf{b}_1 = \mathbf{b} \cdot 1 = \mathbf{b}$ или из $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^1 / \mathbf{b}^1 = \dfrac{\mathbf{b}}{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}^1} = \mathbf{b}$.

Задача 2.3 Требуется найти вектор $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющий трём уравнениям

$$\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{a}_1 = m_1; \quad \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{a}_2 = m_2; \quad \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{a}_3 = m_3, \tag{23.3}$$

где заданы некомпланарные векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, а m_1, m_2, m_3 - скаляры.

Решение. Для решения данной задачи нужно выразить вектор $\boldsymbol{A}$ через компоненты **взаимного базиса** в виде

$$\boldsymbol{A} = m_1\mathbf{a}^1 + m_2\mathbf{a}^2 + m_3\mathbf{a}^3 \tag{24.3}$$

Для доказательства того, что (24.3) является решением поставленной задачи, умножим это равенство на $\mathbf{a}_1$. Тогда получается, что

$$\boldsymbol{A} \cdot \mathbf{a}_1 = m_1\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}^2 \cdot \mathbf{a}_1 + m_3\mathbf{a}^3 \cdot \mathbf{a}_1 = m_1\mathbf{a}^1 \cdot \mathbf{a}_1 = m_1, \tag{25.3}$$

что и отвечает условиям задачи (2.3).

Векторы $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ определяются по формулам (12.3).

Доказательство единственности решения (24.3) выполняется от противного. Допустим, что есть решение, отличное от (23.3) в виде

$$\boldsymbol{A}'\cdot\mathbf{a}_1 = m_1; \quad \boldsymbol{A}'\cdot\mathbf{a}_2 = m_2; \quad \boldsymbol{A}'\cdot\mathbf{a}_3 = m_3 \qquad (26.3)$$

Вычитая из (23.3) выражение (26.3), получим

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}')\cdot\mathbf{a}_1 &= m_1 - m_1 = 0,\\ (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}')\cdot\mathbf{a}_2 &= m_2 - m_2 = 0,\\ (\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}')\cdot\mathbf{a}_3 &= m_3 - m_3 = 0.\end{aligned} \qquad (27.3)$$

Вектор $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}'$ перпендикулярен всем некомпланарным векторам $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ (так как скалярное произведение равно нулю, если векторы взаимно перпендикулярны) и может быть только нуль – вектором, откуда $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$, и значит, решение единственно, ч.т.д. Отсюда следует, что решением поставленной задачи 2.3 является выражение (24.3)

Замечание 9.3 Эти задачи демонстрируют каким образом **использование взаимного базиса** упрощает решение геометрических задач.

§ 4. Переход от одного ортонормированного базиса к другому

Замечание 1.4 Переход от одного базиса к другому является **ключевой задачей тензорного исчисления** (эта задача была сформулирована выше в § 2 в виде первой основной задачи).

Пусть требуется записать в знаках и индексах тензорного исчисления систему перехода от одного **ортонормированного** базиса к другому. Для этого базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ нужно выразить через базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, то есть, получить систему

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= a_{1'1}\mathbf{e}_1 + a_{1'2}\mathbf{e}_2 + a_{1'3}\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}'_2 &= a_{2'1}\mathbf{e}_1 + a_{2'2}\mathbf{e}_2 + a_{2'3}\mathbf{e}_3\\ \mathbf{e}'_3 &= a_{3'1}\mathbf{e}_1 + a_{3'2}\mathbf{e}_2 + a_{3'3}\mathbf{e}_3\end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

Это можно записать в виде произведения матриц

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1\\ \mathbf{e}'_2\\ \mathbf{e}'_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3}\\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3}\\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix} = a_{i'i}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix} \qquad (1'.4)$$

В сокращённой записи эта система выглядит так:

$$\mathbf{e}'_i = a_{i'i}\mathbf{e}_i \quad (i, i' = 1,2,3), \qquad (2.4)$$

где

$$a_{i'i} = \begin{pmatrix}a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3}\\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3}\\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3}\end{pmatrix} \qquad (3.4)$$

матрица коэффициентов, которая является тензором второго ранга, Базисные векторы записываются тоже в матричном виде

$$\mathbf{e}'_i = \begin{pmatrix}\mathbf{e}'_1\\ \mathbf{e}'_2\\ \mathbf{e}'_3\end{pmatrix}; \quad \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix} \qquad (4.4)$$

Каждое из равенств (1.4) умножим скалярно на каждый из векторов $\mathbf{e}_i$. При этом с учётом того, что $|\mathbf{e}'_i|\cdot|\mathbf{e}_i| = 1\cdot 1 = 1$, и формулы (3.4) можно написать

$$\mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{e}_i = |\mathbf{e'}_i| \cdot |\mathbf{e}_i| \cos(\mathbf{e'}_i, \mathbf{e}_i) = \cos(\mathbf{e'}_i, \mathbf{e}_i) = a_{i'i} \qquad (5.4)$$

так как векторы $\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_i$ в данном случае элементы матрицы (3.4) равны

$$a_{i'i} = \cos(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_i) \quad \text{при} \quad (i', i = 1,2,3) \qquad (6.4)$$

Если выразить $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ через $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3$, то получим

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= a_{11'}\mathbf{e}'_1 + a_{12'}\mathbf{e}'_2 + a_{13'}\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_2 &= a_{21'}\mathbf{e}'_1 + a_{22'}\mathbf{e}'_2 + a_{23'}\mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_3 &= a_{31'}\mathbf{e}'_1 + a_{32'}\mathbf{e}'_2 + a_{33'}\mathbf{e}'_3 \end{aligned} \qquad (7.4)$$

или
$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11'} & a_{12'} & a_{13'} \\ a_{21'} & a_{22'} & a_{23'} \\ a_{31'} & a_{32'} & a_{33'} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e'}_1 \\ \mathbf{e'}_2 \\ \mathbf{e'}_3 \end{pmatrix} \qquad (7'.4)$$

или сокращённо

$$\mathbf{e}_i = a_{ii'}\mathbf{e'}_i \qquad (8.4)$$

Умножая каждое равенство системы (7.4) на каждый из новых векторов $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3$, получим

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e'}_i = |\mathbf{e}_i| \cdot |\mathbf{e'}_i| \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e'}_i) = a_{ii'} \qquad (9.4)$$

или

$$a_{ii'} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_i = \cos(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}'_i) \qquad (9'.4)$$

Сравнивая (2.4) и (8.4), легко видеть, что матрицы преобразований равны, так как косинус – чётная функция. Отсюда получается **важное равенство элементов матриц коэффициентов систем**

$$a_{i'i} = a_{ii'} \qquad (10.4)$$

Замечание 1.4 Следует помнить, что формула (10.4) справедлива для **ортонормированных** базисов.

Числа $a_{i'i}$ матрицы (3.4) являются элементами **матрицы перехода** A

$$A = \begin{pmatrix} a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3} \\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3} \\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3} \end{pmatrix} \qquad (11.4)$$

от старого базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к новому $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3$. Это матрица третьего порядка. Матрица перехода от нового базиса к старому обозначается в виде A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11'} & a_{12'} & a_{13'} \\ a_{21'} & a_{22'} & a_{23'} \\ a_{31'} & a_{32'} & a_{33'} \end{pmatrix} \qquad (12.4)$$

Сокращённая запись (11.4) и (12.4), как и (3.4), имеет вид

$$A = a_{i'i} \quad \text{и} \quad A^{-1} = a_{ii'} \qquad (13.4)$$

Докажем, что матрица (12.4) **действительно является обратной** по отношению к матрице (11.4). Для этого подставим векторы новой системы (1'.4) в выражение (7'.4) Тогда мы получим

$$\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11'} & a_{12'} & a_{13'}\\ a_{21'} & a_{22'} & a_{23'}\\ a_{31'} & a_{32'} & a_{33'}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{e'}_1\\ \mathbf{e'}_2\\ \mathbf{e'}_3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11'} & a_{12'} & a_{13'}\\ a_{21'} & a_{22'} & a_{23'}\\ a_{31'} & a_{32'} & a_{33'}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3}\\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3}\\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{e}_1\\ \mathbf{e}_2\\ \mathbf{e}_3\end{pmatrix} \qquad (14.4)$$

Вспомним, во-первых, что две матрицы **равны** в том случае, когда на одинаковых местах стоят равные элементы, во-вторых, что произведение любой матрицы на единичную матрицу равно исходной матрице $A\cdot E=A$ и $E\cdot A=A$. Следовательно, для того, чтобы левая часть равенства (14.4) равнялась правой части, необходимо и достаточно, чтобы произведение матриц $A\cdot A^{-1}$ равнялось единичной матрице $A\cdot A^{-1}=E$. Итак, это равенство может выполняться только, если

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}a_{11'} & a_{12'} & a_{13'}\\ a_{21'} & a_{22'} & a_{23'}\\ a_{31'} & a_{32'} & a_{33'}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3}\\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3}\\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3}\end{pmatrix}=E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Перемножение прямой и обратной матриц даёт ряд важных зависимостей

$$\begin{pmatrix}a_{1'1} & a_{1'2} & a_{1'3}\\ a_{2'1} & a_{2'2} & a_{2'3}\\ a_{3'1} & a_{3'2} & a_{3'3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a_{11'} & a_{12'} & a_{13'}\\ a_{21'} & a_{22'} & a_{23'}\\ a_{31'} & a_{32'} & a_{33'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{1'1}a_{11'}+a_{1'2}a_{21'}+a_{1'3}a_{31'} & a_{1'1}a_{12'}+a_{1'2}a_{22'}+a_{1'3}a_{32'} & a_{1'1}a_{13'}+a_{1'2}a_{23'}+a_{1'3}a_{33'}\\ a_{2'1}a_{11'}+a_{2'2}a_{21'}+a_{2'3}a_{31'} & a_{2'1}a_{12'}+a_{2'2}a_{22'}+a_{2'3}a_{32'} & a_{2'1}a_{13'}+a_{2'2}a_{23'}+a_{2'3}a_{33'}\\ a_{3'1}a_{11'}+a_{3'2}a_{21'}+a_{3'3}a_{31'} & a_{3'1}a_{12'}+a_{3'2}a_{22'}+a_{3'3}a_{32'} & a_{3'1}a_{13'}+a_{3'2}a_{23'}+a_{3'3}a_{33'}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Отсюда в силу справедливости формулы (10.4) получаются очевидные равенства

$$\begin{aligned}&a_{1'1}a_{11'}+a_{1'2}a_{21'}+a_{1'3}a_{31'}=1\\ &a_{2'1}a_{11'}+a_{2'2}a_{21'}+a_{2'3}a_{31'}=0\\ &a_{3'1}a_{11'}+a_{3'2}a_{21'}+a_{3'3}a_{31'}=0\end{aligned} \qquad (15.4)$$

$$\begin{aligned}&a_{1'1}a_{12'}+a_{1'2}a_{22'}+a_{1'3}a_{32'}=0\\ &a_{2'1}a_{12'}+a_{2'2}a_{22'}+a_{2'3}a_{32'}=1\\ &a_{3'1}a_{12'}+a_{3'2}a_{22'}+a_{3'3}a_{32'}=0\end{aligned} \qquad (16.4)$$

$$\begin{aligned}&a_{1'1}a_{13'}+a_{1'2}a_{23'}+a_{1'3}a_{33'}=0\\ &a_{2'1}a_{13'}+a_{2'2}a_{23'}+a_{2'3}a_{33'}=0\\ &a_{3'1}a_{13'}+a_{3'2}a_{23'}+a_{3'3}a_{33'}=1\end{aligned} \qquad (17.4)$$

например, (17.4) коротко можно записать в тензорном виде (см. соглашение о суммировании в § 6 этой главы):

$$\begin{aligned}&a_{k'j}a_{jk'}=a_{k'1}a_{1k'}+a_{k'2}a_{2k'}+a_{k'3}a_{3k'}=1 \quad k'=1,2,3\\ &a_{i'j}a_{jk'}=a_{i'1}a_{1k'}+a_{i'}a_{2k'}+a_{i'3}a_{3k'}=0 \quad i'\neq k'\end{aligned} \qquad (18.4)$$

или

$$a_{i'k}\cdot a_{k\,j'}=a_{k\,i'}\cdot a_{j'k}=\delta_{i'j'} \qquad (k=1,2,3) \qquad (19.4)$$

$$a_{k'i}\cdot a_{j\,k'}=a_{i\,k'}\cdot a_{k'j}=\delta_{i\,j} \qquad (k'=1,2,3) \qquad (20.4)$$

где $\delta_{i'j'}$ и $\delta_{i\,j}$ - **символы (дельта) Кронекера**.

Замечание 2.4 **Дельту Кронекера** иногда называют **оператором замены**, потому что она даёт следующие преобразования

$$\delta_{ij} b_j = \delta_{i1} b_1 + \delta_{i2} b_2 + \delta_{i3} b_3 = b_i \tag{21.4}$$

или

$$\delta_{ij} A_{ik} = \delta_{1j} A_{1k} + \delta_{2j} A_{2k} + \delta_{3j} A_{3k} = A_{jk} \tag{22.4}$$

Замечание 3.4 Благодаря этим свойствам **дельта Кронекера** является аналогом **единичного тензора второго ранга**.

Пример 1.4 Пусть заданы углы между направлениями координат системы со штрихами и системы без штрихов в следующей таблице:

	x_1	x_2	x_3
x_1'	135°	60°	120°
x_2'	90°	45°	45°
x_3'	45°	60°	120°

Определить коэффициенты преобразования a_{ij} и показать, что выполнены условия ортогональности.

Решение. Коэффициенты a_{ij} являются направляющими косинусами и могут быть вычислены в соответствии с данной таблицей углов

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Условия ортогональности $a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$ требуют, чтобы выполнялись следующие условия:

1) при $j = k = 1$ должно быть $a_{ij} a_{ij} = a_{11} a_{11} + a_{21} a_{21} + a_{31} a_{31} = 1$. Левая часть представляет собой сумму квадратов элементов первого столбца.
2) при $j = 2, \quad k = 3$ должно быть выполнено равенство $a_{12} a_{13} + a_{22} a_{23} + a_{32} a_{33} = 0$. Левая часть представляет собой сумму произведений соответствующих элементов второго и третьего столбца.
3) сумма произведений соответствующих элементов любых двух столбцов должна быть равна нулю.
4) сумма квадратов элементов любого столбца должна быть равна единице.
5) если условие ортогональности написано в виде $a_{ji} a_{ki} = \delta_{jk}$, то вместо столбцов перемножаются строки

Проверка суммы квадратов столбцов.

$$\left(-\sqrt{2}/2\right)^2 + 0^2 + \left(\sqrt{2}/2\right)^2 = 2/4 + 0 + 2/4 = 1$$

$$(1/2)^2 + \left(\sqrt{2}/2\right)^2 + (1/2)^2 = 1/4 + 2/4 + 1/4 = 1$$

$$(-1/2)^2 + \left(\sqrt{2}/2\right)^2 + (-1/2)^2 = 1/4 + 2/4 + 1/4 = 1$$

Проверка условия 2).

$$1/2(-1/2) + \sqrt{2}/2\sqrt{2}/2 + 1/2(-1/2) = -1/4 + 2/4 - 1/4 = 0$$

Проверка суммы квадратов строк.

$$\left(-\sqrt{2}/2\right)^2+(1/2)^2+(-1/2)^2=2/4+1/4+1/4=1$$

$$0^2+\left(\sqrt{2}/2\right)^2+\left(\sqrt{2}/2\right)^2=0+2/4+2/4=1$$

$$\left(\sqrt{2}/2\right)^2+(1/2)^2+(-1/2)^2=2/4+1/4+1/4=1$$

Проверка суммы произведений соответствующих элементов двух параллельных строк

$(1)\cdot(2)\quad -\sqrt{2}/2\cdot 0+1/2\cdot\sqrt{2}/2-1/2\cdot\sqrt{2}/2=0+\sqrt{2}/4-\sqrt{2}/4=0$

$(1)\cdot(3)\quad -\sqrt{2}/2\cdot\sqrt{2}/2+1/2\cdot 1/2+1/2\cdot 1/2=-2/4+1/4+1/4=0$

$(3)\cdot(2)\quad -\sqrt{2}/2\cdot 0+1/2\cdot\sqrt{2}/2-1/2\cdot\sqrt{2}/2=0+\sqrt{2}/4-\sqrt{2}/4=0$

Проверка произведений соответствующих элементов двух параллельных столбцов

$(1)\cdot(2)\quad -\sqrt{2}/2\cdot 1/2+0\cdot\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2\cdot 1/2=-\sqrt{2}/4+0+\sqrt{2}/4=0$

$(1)\cdot(3)\quad -\sqrt{2}/2\cdot(-1/2)+0\cdot\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2\cdot(-1/2)=\sqrt{2}/4+0-\sqrt{2}/4=0$

$(2)\cdot(3)\quad 1/2\cdot(-1/2)+\sqrt{2}/2\cdot\sqrt{2}/2+1/2\cdot(-1/2)=-1/4+2/4-1/4=0$

Ответ: все условия ортогональности в данной таблице выполняются.

§ 5. Ковариантные и контравариантные компоненты

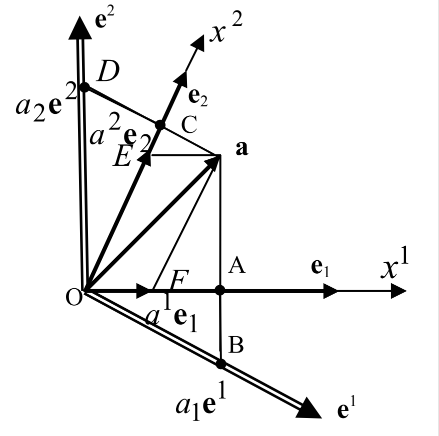


Рис. 1.5 Реперы и кореперы

Замечание 1.5 В векторной алгебре **компонентами** вектора называют его составляющие, которые являются **векторами**. В отличие от векторной алгебры, в тензорном исчислении **компонентами** называют **проекции**, которые являются скалярами a^1, a^2 и a_1, a_2. Рассмотрим связь между реперами и кореперами не в пространстве, как выше, а на плоскости.

На рисунке 1.5 показан вектор **a** в основном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ (**реперы**) и во взаимном базисе $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$ (**кореперы**). Векторы взаимного базиса **перпендикулярны** векторам основного базиса. На рисунке 1.5 показаны также **компоненты** a^1, a^2 вектора в **основном** базисе и a_1, a_2 во **взаимном** базисе.

Составляющие вектора по основному базису равны $\overline{OF}=a^1\mathbf{e}_1$, $\overline{OE}=a^2\mathbf{e}_2$, а по взаимному базису - $\overline{OB}=a_1\mathbf{e}^1$, $\overline{OD}=a_2\mathbf{e}^2$ ..

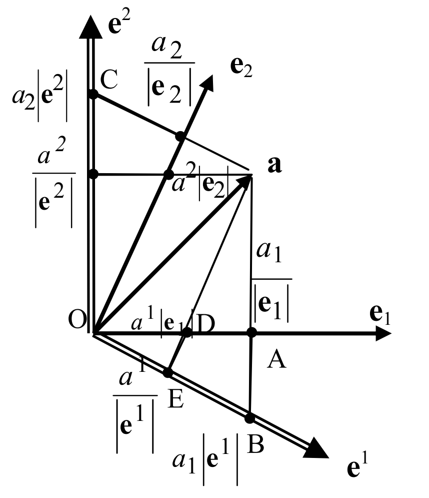


Рис. 2.5 Вектор **a** в основном и взаимном базисе

Определение 1.5 Числа a^1, a^2 называются **контравариантными** компонентами вектора **a.**

Определение 2.5 Числа a_1, a_2 называются **ковариантными** компонентами вектора **a.**

Определение 3.5 Контравариантные компоненты a^1, a^2 (индекс вверху) можно найти из составляющих $a^1|\mathbf{e}_1|, a^2|\mathbf{e}_2|$ по направлению основного базиса, а также из проекций на оси взаимного базиса $\frac{a^1}{|\mathbf{e}^1|}, \frac{a^2}{|\mathbf{e}^2|}$.

Определение 4.5 Ковариантные компоненты a_1, a_2 (индекс внизу) могут быть найдены либо по составляющим $a_1\left|\mathbf{e}^1\right|, a_2\left|\mathbf{e}^2\right|$ вектора $\mathbf{a}$ по направлениям взаимного базиса, либо по ортогональным проекциям $\dfrac{a_1}{|\mathbf{e}_1|}, \dfrac{a_2}{|\mathbf{e}_2|}$ вектора $\mathbf{a}$ на оси основного базиса (рис. 2.5).

Замечание 2.5. Получение ортогональных проекций на оси каждого базиса делается следующим образом: получаются **единичные** векторы $\mathbf{e}_1/|e_1|$, $\mathbf{e}_2/|e_2|$, $\mathbf{e}^1/\left|e^1\right|$, $\mathbf{e}^2/\left|e^2\right|$, а тогда, например,

$$a_1 \cdot \frac{\mathbf{e}_1}{|\mathbf{e}_1|} = \frac{a_1}{|\mathbf{e}_1|} \cdot \mathbf{e}_1 \qquad (1.5)$$

где $\dfrac{a_1}{|\mathbf{e}_1|}$ и есть проекция вектора **a** на ось $\mathbf{e}_1$ и т.д (рис. 2.5).

Замечание 3.5 В системе координат, определяемой основным базисом $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, мы имеем **контравариантные** компоненты a^i вектора $\mathbf{a}$.

Замечание 4.5. Вспомним, что **ковариантные** компоненты получаются по формулам

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1, \quad a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2, \quad a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3, \qquad (2.5)$$

а **контравариантные** - по формулам

$$a^1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^1, \quad a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^2, \quad a^3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^3, \qquad (3.5)$$

где сам вектор $\mathbf{a}$ записывается через них по **основному** базису как

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3, \qquad (4.5)$$

и по **взаимному** базису как

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3. \qquad (5.5)$$

Определим в новом базисе $\mathbf{e'}_1, \mathbf{e'}_2, \mathbf{e'}_3$ **ковариантные** компоненты $a_{i'}$ вектора $\mathbf{a}$ через его компоненты a_i и **контравариантные** компоненты $a^{i'}$ - через a^i. Вспомним, что

$$a_{i'i} = \mathbf{e'}_i \cdot \mathbf{e}_i \ \text{ и } \ a_{ii'} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e'}_i \qquad (6.5)$$

Умножая обе части равенства (5.5) скалярно на вектор $\mathbf{e}_{i'}$, получим

$$a_{i'} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_{i'} = a_i\mathbf{e}^i\mathbf{e}_{i'} = a_i\mathbf{e}_{i'}\mathbf{e}^i = a_{i'i}a_i \qquad (7.5)$$

Это закон **прямого преобразования**. Аналогично получается закон **обратного преобразования**

Замечание 5.5 Название **ковариантный** связано с тем, что **прямое** преобразование **ковариантных** компонент выполняется при помощи **прямой матрицы** $A = a_{i'i}$

$$a_{i'} = a_{i'i}a_i, \qquad (8.5)$$

и **контравариантных** компонент - при помощи той же матрицы

$$a^{i'} = a_{i'i}\,a^i \qquad (9.5)$$

Замечание 6.5 Для **обратного** преобразования применяется обратная матрица $A^{-1} = a_{ii'}$

$$a_i = a_{ii'}a_{i'} \quad \text{и} \quad a^i = a_{ii'}a^{i'} \qquad (10.5)$$

Замечание 7.5 Важно отметить, что **косоугольные декартовы координаты точки** следует писать с **индексами вверху** x^1, x^2, x^3. Это становится ясным, если учесть, что эти координаты являются **контравариантными** компонентами радиуса – вектора этой точки, так что

$$\mathbf{r} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3 = x^k\mathbf{e}_k \tag{11.5}$$

Пример 1.5 Определить **ковариантные компоненты данного тензора** в системе $K_1^{'}$
Пусть в декартовой системе координат $K(\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ даны компоненты тензора 2-го ранга

$$\left\|A^{ik}\right\| = \left\|A_i^{\cdot k}\right\| = \left\|A^i_{\cdot k}\right\| = \left\|A_{ik}\right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}. \tag{i}$$

Базисные векторы координатной системс $K_1^{'}$ выражаются через базисные векторы декартовой системы по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{e}_2 &= \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{e}_3 &= \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3 \end{aligned} \tag{ii}$$

Определение **ковариантных** компонент $A_{ik}^{'}$ делается по формулам

$$A_{ik}^{'} = \alpha_{i'}^{l}\,\alpha_{k'}^{m} A_{lm}, \tag{iii}$$

где $\alpha_{i'}^{l}$, $\alpha_{k'}^{m}$ - коэффициенты прямого преобразования. Коэффициенты $\alpha_{i'}^{l}$ имеют вид

$$\begin{aligned} &\alpha_{1'}^{1} = 1, \quad \alpha_{1'}^{2} = 0, \quad \alpha_{1'}^{3} = 0, \\ &\alpha_{2'}^{1} = 1, \quad \alpha_{2'}^{2} = 1, \quad \alpha_{2'}^{3} = 0, \\ &\alpha_{3'}^{1} = 1, \quad \alpha_{3'}^{2} = 1, \quad \alpha_{3'}^{3} = 1. \end{aligned} \tag{iv}$$

таким образом, получим

$$A_{11}^{'} = \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{1}A_{11} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{2}A_{12} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{3}A_{13} = 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 3 = 2,$$

$$A_{12}^{'} = \alpha_{1'}^{1}\alpha_{2'}^{1}A_{11} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{2'}^{2}A_{12} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{2'}^{3}A_{13} = 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 3 = 2 + 1 = 3$$

$$A_{13}^{'} = \alpha_{1'}^{1}\alpha_{3'}^{1}A_{11} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{3'}^{2}A_{12} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{3'}^{3}A_{13} = 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3 = 6$$

так как $\alpha_{1'}^{2} = 0, \quad \alpha_{1'}^{3} = 0,$ то суммирование по l в этих формулах не выполняется.

$$\begin{aligned} A_{21}^{'} &= \alpha_{2'}^{1}\alpha_{1'}^{1}A_{11} + \alpha_{2'}^{1}\alpha_{1'}^{2}A_{12} + \alpha_{2'}^{1}\alpha_{1'}^{3}A_{13} + \\ &\quad + \alpha_{2'}^{2}\alpha_{1'}^{1}A_{21} + \alpha_{2'}^{2}\alpha_{1'}^{2}A_{22} + \alpha_{2'}^{2}\alpha_{1'}^{3}A_{23} = \\ &= 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 4 = 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{22}^{'} &= \alpha_{2'}^{1}\alpha_{2'}^{1}A_{11} + \alpha_{2'}^{1}\alpha_{2'}^{2}A_{12} + \alpha_{2'}^{1}\alpha_{2'}^{3}A_{13} + \\ &\quad + \alpha_{2'}^{2}\alpha_{2'}^{1}A_{21} + \alpha_{2'}^{2}\alpha_{2'}^{2}A_{22} + \alpha_{2'}^{2}\alpha_{2'}^{3}A_{23} = \\ &= 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 4 = 2 + 1 + 2 + 3 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{23}^{'} &= \alpha_{2'}^{1}\alpha_{3'}^{1}A_{11} + \alpha_{2'}^{1}\alpha_{3'}^{2}A_{12} + \alpha_{2'}^{1}\alpha_{3'}^{3}A_{13} + \\ &\quad + \alpha_{2'}^{2}\alpha_{3'}^{1}A_{21} + \alpha_{2'}^{2}\alpha_{3'}^{2}A_{22} + \alpha_{2'}^{2}\alpha_{3'}^{3}A_{23} = \\ &= 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 4 = 2 + 1 + 3 + 2 + 3 + 4 = 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{31}^{'} &= \alpha_{3'}^{1}\alpha_{1'}^{1}A_{11} + \alpha_{3'}^{1}\alpha_{1'}^{2}A_{12} + \alpha_{3'}^{1}\alpha_{1'}^{3}A_{13} + \\ &\quad + \alpha_{3'}^{2}\alpha_{1'}^{1}A_{21} + \alpha_{3'}^{2}\alpha_{1'}^{2}A_{22} + \alpha_{3'}^{2}\alpha_{1'}^{3}A_{23} + \\ &\quad + \alpha_{3'}^{3}\alpha_{1'}^{1}A_{31} + \alpha_{3'}^{3}\alpha_{1'}^{2}A_{32} + \alpha_{3'}^{3}\alpha_{1'}^{3}A_{33} = \\ &= 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 1 = 2 + 2 + 1 = 5 \end{aligned}$$

$$A'_{32} = \alpha^{1}_{3'}\alpha^{1}_{2'}A_{11} + \alpha^{1}_{3'}\alpha^{2}_{2'}A_{12} + \alpha^{1}_{3'}\alpha^{3}_{2'}A_{13} +$$
$$+ \alpha^{2}_{3'}\alpha^{1}_{2'}A_{21} + \alpha^{2}_{3'}\alpha^{2}_{2'}A_{22} + \alpha^{2}_{3'}\alpha^{3}_{2'}A_{23} +$$
$$+ \alpha^{3}_{3'}\alpha^{1}_{2'}A_{31} + \alpha^{3}_{3'}\alpha^{2}_{2'}A_{32} + \alpha^{3}_{3'}\alpha^{3}_{2'}A_{33} =$$
$$= 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 0\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 0\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 0\cdot 1 =$$
$$2 + 1 + 2 + 3 + 1 + 2 = 11$$
$$A'_{33} = \alpha^{1}_{3'}\alpha^{1}_{3'}A_{11} + \alpha^{1}_{3'}\alpha^{2}_{3'}A_{12} + \alpha^{1}_{3'}\alpha^{3}_{3'}A_{13} +$$
$$+ \alpha^{2}_{3'}\alpha^{1}_{3'}A_{21} + \alpha^{2}_{3'}\alpha^{2}_{3'}A_{22} + \alpha^{2}_{3'}\alpha^{3}_{3'}A_{23} +$$
$$+ \alpha^{3}_{3'}\alpha^{1}_{3'}A_{31} + \alpha^{3}_{3'}\alpha^{2}_{3'}A_{32} + \alpha^{3}_{3'}\alpha^{3}_{3'}A_{33} =$$
$$= 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot 1 =$$
$$= 2 + 1 + 3 + 2 + 3 + 4 + 1 + 2 + 1 = 19$$

Таким образом, **ковариантные компоненты** равны:

$$\|A'_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 19 \end{Vmatrix} \qquad \text{(v)}$$

§ 6. Индексные обозначения и соглашение о суммировании

Правило индексных обозначений

Рассмотрим сокращенные написания тензоров, например, таких как $a_{ij}b_j$, $\varepsilon_{ijk}u_i\upsilon_k$. Для того, чтобы легко читать работы, в которых используются тензоры, необходимо знать правила написания индексов.

1) Буквенный индекс в каждом члене может встречаться **один** или **два** раза.

2) Если индекс встречается **один** раз, то подразумевается, что он принимает значения натурального ряда 1, 2, 3, …, N. N - заданное положительное целое число, которое определяет **размерность** индекса, то есть, интервал его **изменения**. **Размерность индекса** определяет **размерность пространства**, в котором решается задача.

3) Неповторяющиеся индексы называются **свободными.**

4) **Тензорный ранг** данного члена определяется числом **свободных** индексов в этом члене.

5) Правильно написанные тензорные **соотношения** имеют **одинаковые** свободные индексы в каждом члене.

Пример 1.6 В трёхмерном пространстве расшифровать следующие тензорные символы: 1) A_{ii}, 2) B_{ijj}, 3) R_{ij}, 4) a_iT_{ij}, 5) $a_ib_jS_{ij}$.

Решение:

1) $A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$.

2) B_{ijj} представляет три суммы

при $i = 1$ $\quad B_{111} + B_{122} + B_{133}$,

при $i = 2$ $\quad B_{211} + B_{222} + B_{233}$,

при $i = 3$ $\quad B_{311} + B_{322} + B_{333}$.

3) R_{ij}, представляет 9 компонент $R_{11}, R_{12}, R_{13}, R_{21}, R_{22}, R_{23}, R_{31}, R_{32}, R_{33}$. .

4) a_iT_{ij} представляет три суммы:

при $j = 1$ $\quad a_1T_{11} + a_2T_{21} + a_3T_{31}$, при $j = 2 \qquad a_1T_{12} + a_2T_{22} + a_3T_{32}$,

при $j = 3 \qquad a_1T_{13} + a_2T_{23} + a_3T_{33}$.

Пример 2.6 В трёхмерном пространстве вычислить следующие выражения, содержащие **дельту Кронекера** δ_{ij} 1) δ_{ii} 2) $\delta_{ij}\delta_{ij}$ 3) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$ 4) $\delta_{ij}\delta_{jk}$ 5) $\delta_{ij}A_{ik}$

1) $\delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$

2) $\delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{1j}\delta_{1j} + \delta_{2j}\delta_{2j} + \delta_{3j}\delta_{3j} = 3$

3) $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk} = \delta_{1j}\delta_{1k}\delta_{jk} + \delta_{2j}\delta_{2k}\delta_{jk} + \delta_{3j}\delta_{3k}\delta_{jk} = 3$

4) $\delta_{ij}\delta_{jk} = \delta_{i1}\delta_{1k} + \delta_{i2}\delta_{2k} + \delta_{i3}\delta_{3k} = \delta_{ik}$

5) $\delta_{ij}A_{ik} = \delta_{1j}A_{1k} + \delta_{2j}A_{2k} + \delta_{3j}A_{3k} = A_{jk}$

Соглашение о суммировании А. Эйнштейна.

Соглашение о суммировании состоит в том, что если **индекс употребляется дважды,** то этот индекс принимает **все значения из своего интервала изменения,** и члены, соответствующие **каждому значению индекса** из этого набора, **суммируются.**

Правило 1.6

1) **Повторяющиеся** индексы называют **немыми,** так как их замена на любые другие буквы, не использованные в качестве свободных индексов**,** не меняет значения членов, в которые они входят.

2) В **правильно** написанном тензорном выражении ни один индекс **не встречается более двух раз.**

3) Если в некотором выражении какой-нибудь индекс приходится писать **более, чем дважды**, соглашение о суммировании **не используется**.

4) Тензоры **первого** ранга (**векторы**) обозначаются основной буквой с **одним свободным** индексом, то есть, в виде

$$a_i \text{ или } b^i.$$

5) В следующих выражениях, имеющих один свободный индекс, можно узнать тензоры первого ранга (векторы)

$$a_{ij}b_j,\ F_{ikk},\ R^{p}_{.qp},\quad \varepsilon_{ijk}u_i\upsilon_k.$$

так как в каждом из них после выполнения суммирования останется по одному индексу.

6) Тензоры **второго** ранга обозначаются буквами с **двумя свободными** индексами. Так произвольный тензор второго ранга **T** будет записан в одной из четырёх возможных форм

$$T^{ij},\ T_i^{j} \text{ или } T^{i}_{.j},\ T_{ij}.$$

В смешанной форме точка указывает на то, что индекс j - второй по порядку.

7) Тензорные величины **второго ранга** могут выглядеть **по-разному**, например, так:

$$a_{ijip},\quad b^{ij}_{,,jk},\quad \delta_{ij}u_k\upsilon_k.$$

Здесь после выполнения суммирования по одинаковому индексу останутся по **два** свободных индекса, что даёт тензор **второго ранга**.

8) Продолжая логически эту цепочку, получим, что тензор **третьего** ранга записывают с **тремя свободными** индексами.

9) Символ, который не имеет связанного с ним индекса, изображает **скаляр**, то есть, тензор **нулевого** ранга.

Замечание 1.6 Соглашение о суммировании часто используют в связи с **представлением векторов** в символических обозначениях через **базисные векторы**, снабжённые индексами. Так, если декартовы оси и единичные векторы базиса, изображённые на рис. 1.6, переобозначить, как на рис. 2.6, то произвольный вектор $\mathbf{v} = \upsilon_1\mathbf{i} + \upsilon_2\mathbf{j} + \upsilon_3\mathbf{k}$ можно записать в виде

$$\mathbf{v} = \upsilon_1\mathbf{e}_1 + \upsilon_2\mathbf{e}_2 + \upsilon_3\mathbf{e}_3 \qquad (1.6)$$

где $\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3$ - декартовы координаты вектора **v.** Применяя к этому равенству соглашение о суммировании, его можно переписать **в сокращённом виде**

$$\mathbf{v} = \upsilon_i\mathbf{e}_i \qquad (2.6)$$

где i **-** индекс суммирования. При таком сочетании обозначений **не действует правило повторяющихся индексов**, принятое в чисто индексном обозначении тензорных величин.

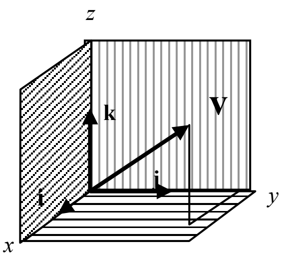


Рис. 1.6 Вектор **v** в декартовой системе координат

Тензоры второго ранга тоже могут быть представлены суммированием по базисным векторам, снабжённым индексами. Так, диаду **ab**[1], заданную в девятизначной форме, можно записать в виде

$$\mathbf{ab} = (a_i\mathbf{e}_i)(b_j\mathbf{e}_j) = a_i b_j \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \qquad (3.6)$$

Замечание 2.6 В этом выражении важно сохранять **порядок** написания базисных векторов.

Девятичленная форма любого тензора второго ранга D может быть представлена в компактном обозначении так:

$$\boldsymbol{D} = D_{ij}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j \qquad (4.6)$$

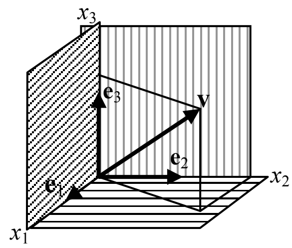


Рис. 2.6 Вектор **v** в обобщённой системе координат

Пример 3.6 Пусть даны два произвольных тензора a_{ijk} и b_{lm} ранга 3 и 2.

1. **Определить ранг** произведения $a_{ijk}b_{lm}$.
2. Получить из них **тензор третьего ранга** и **свернуть** его по индексам k и l.
3. **Получить** из произведения этих тензоров **тензор первого ранга**.

Решение.

1.Ранг произведения $a_{ijk}b_{lm}$ равен 3 + 2 = 5.

2.Для уменьшения ранга на 2 единицы нужно **произвести свёртывание** по каждой паре индексов, принадлежащих разным сомножителям. При этом получается 6 тензоров

$$a_{ijk}b_{im},\ a_{ijk}b_{li}, a_{ijk}b_{jm}, a_{ijk}b_{lj}, a_{ijk}b_{km}, a_{ijk}b_{lk}$$

третьего ранга, потому что в каждом из них остаётся только по три свободных индекса.

3.Для получения тензора первого ранга достаточно тензор третьего ранга свернуть по индексам i, j и m, то есть,

$$a_{ijk}b_{ij},\ a_{ijk}b_{ji}, a_{ijk}b_{jk}, a_{ijk}b_{kj}, a_{ijk}b_{ki}, a_{ijk}b_{ik},$$

в каждом из них только по одному свободному индексу, и из каждого получается один и тот же тензор $a_k b$ первого ранга.

Задача 1.6 Свёртывание произведения произвольного тензора a_{ijk} с **единичным тензором** δ_{ij}

Решение.

$$a_{ijk}\delta_{kl} = a_{ij1}\delta_{1l} + a_{ij2}\delta_{2l} + a_{ij3}\delta_{3l} = a_{ijl}$$

---

[1] Подробно понятие диады рассматривается в главе 2.

Как и следовало ожидать, получился исходный тензор, так как δ_{ij} равен единице только в том случае, когда $k = l$.

Замечание 3.6 Операция свёртывания используется для получения **обратного тензорного признака.**

В обычном **физическом** пространстве базис состоит из **трёх** некомпланарных векторов, и **любой вектор** в этом пространстве задаётся своими **тремя** компонентами. Поэтому индексы у величин a_i принимают значения 1, 2, 3, и a_i представляет сразу три компоненты a_1, a_2, a_3.

Замечание 4.6 Символ a_i можно толковать в одном случае как i - тую компоненту вектора **a**, а в другом - как сам вектор.

В трёхмерном пространстве, где оба индекса i и j меняются от 1 до 3, символ a_{ij} представляют **девять** компонент тензора второго ранга**.** Подробно, в виде квадратной таблицы это выглядит так:

$$a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Таким же образом компоненты тензора **первого ранга (вектора)** в трёхмерном пространстве можно наглядно изобразить упорядоченной строкой или столбцом из компонент в виде

$$a_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \text{ или } a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

10) В общем случае в N - мерном пространстве тензор n-го ранга будет иметь N^n компонент;

11) Удобство индексных обозначений для записи систем равенств иллюстрируется двумя примерами. В трёхмерном пространстве уравнение в индексной записи имеет вид

$$x_i = c_{ij} z_j , \tag{7.6}$$

а в развёрнутом виде три уравнения

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= c_{11}z_1 + c_{12}z_2 + c_{13}z_3 \\ x_2 &= c_{21}z_1 + c_{22}z_2 + c_{23}z_3 \\ x_3 &= c_{31}z_1 + c_{32}z_2 + c_{33}z_3 \end{aligned} \right\} \tag{8.6}$$

12) Если i и j принимают значения 1 и 2, то, например, равенство в индексной записи

$$a_{ij} = b_{ip} c_{jq} d_{pq} \tag{9.6}$$

в развёрнутой форме даёт четыре соотношения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_{11}c_{11}d_{11} + b_{11}c_{12}d_{12} + b_{12}c_{11}d_{21} + b_{12}c_{12}d_{22}, \\ a_{12} &= b_{11}c_{21}d_{11} + b_{11}c_{22}d_{12} + b_{12}c_{21}d_{21} + b_{12}c_{22}d_{22}, \\ a_{21} &= b_{21}c_{11}d_{11} + b_{21}c_{12}d_{12} + b_{22}c_{11}d_{21} + b_{22}c_{12}d_{22}, \\ a_{22} &= b_{21}c_{21}d_{11} + b_{21}c_{22}d_{12} + b_{12}c_{21}d_{21} + b_{22}c_{22}d_{22}. \end{aligned} \tag{10.6}$$

Если же $i, j = 1,2,3$, то формула (10.6) даст девять соотношений, каждое из которых имеет девять членов в правой части.

13) Если нужно уточнить, какие значения пробегает **греческий** индекс, то эти значения заключаются в угловые скобки.

$$a^{\alpha}\mathbf{e}_{\alpha} \quad \langle \alpha = 1,2,3 \rangle \tag{11.6}$$

Замечание 5.6 В **прямоугольной декартовой** системе координат **ковариантные и контравариантные** компоненты **совпадают**

Замечание 6.6 Для **верхних** и **нижних** индексов существуют правила, которое используется для проверки формул:

Правило 2.6 Суммирование может производиться **только по** верхнему и нижнему «немым» индексам. Запись $a_i b^i$, $a^{ik}a_k$ является верной. $a^k b^k$, $a^{ik}a^k$ - неверные записи (в обобщённой системе координат!).

Правило 3.6 Формула $a_i = a_{ik}a^k$ называется операцией **«опускания»** индекса, а формула $a^i = a^{ik}a_k$ - **«поднятия»** индекса.

Замечание 7.6 Эти правила относятся к компонентам тензоров в **обобщённых** системах координат. В **прямоугольной** декартовой системе допустимы записи $A_{ik}B_i$, $C_{ik}A_k$ и т.п., потому что **основной** и **взаимный** базисы совпадают.

§ 7 Связь между ковариантными и контравариантными компонентами вектора.

Для простоты на рисунках 1.5 и 2.5 были показаны только по две компоненты вектора в каждой системе. Выражение **ковариантных** компонент a_k вектора **через его контравариантные** a^k компоненты в пространстве можно получить, если разложение

$$\mathbf{a} = a^1\mathbf{e}_1 + a^2\mathbf{e}_2 + a^3\mathbf{e}_3 = \sum_{k=1}^{3} a^k\mathbf{e}_k = a^k\mathbf{e}_k \tag{1.7}$$

умножить скалярно на $\mathbf{e}_i$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i = a^k(\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_i) \tag{2.7}$$

и наоборот, **контравариантные** a^k компоненты можно выразить **через ковариантные** a_k

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3 = \sum_{k=1}^{3} a_k\mathbf{e}^k = a_k\mathbf{e}^k \tag{3.7}$$

если умножить скалярно на $\mathbf{e}^i$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}^i = a_k(\mathbf{e}^k\cdot\mathbf{e}^i) \tag{4.7}$$

Введём обозначения

$$g_{ki} = g_{ik} = \mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_i \tag{5.7}$$

$$g^{ki} = g^{ik} = \mathbf{e}^k\cdot\mathbf{e}^i \tag{6.7}$$

Тогда, учитывая, что $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}^i = a^i$ и $\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_i = a_i$, из (4.7) и (2.7) получим

$$a^i = g^{ik}a_k, \tag{7.7}$$

$$a_i = g_{ik}a^k, \tag{8.7}$$

которые и дают искомые выражения для связи компонентов вектора ***a***. Эти действия называются действиями **подъёма и опускания индекса** с помощью **метрического** тензора**.**

Кроме выражений (5.7) и (6.7) вводится обозначение для выражения **взаимности базисов**:

$$\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i = g_i^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0, \text{ если } & i \neq k \\ 1, \text{ если } & i = k \end{cases} \qquad (9.7)$$

Определение 1.7 Каждое из выражений g_{ik} и g^{ik} представляет собой тензор второго ранга и, так как они определяют **метрику** пространства, их называют **метрическими тензорами**

Замечание 1.7 Дельта Кронекера $g_i^k = \delta_i^k$ также **тензор второго ранга.**

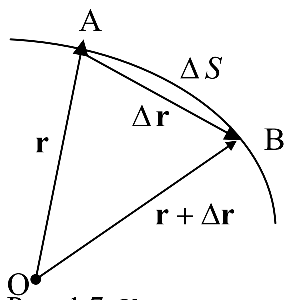


Рис. 1.7 К понятию длины дуги

Рассмотрим некоторые свойства величин g_{ik}, g^{ik} и g_i^k. Они важны, так как являются основной характеристикой пространства, связанного базисом $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Это легко понять, если выразить приращение длины дуги ΔS через числа g_{ik} и g^{ik}. Приращение длины дуги можно заменить, как всегда в математическом анализе, приращением радиуса – вектора $|\Delta \mathbf{r}|$ (рис. 1.7). Отсюда

$$(\Delta S)^2 = |\Delta \mathbf{r}|^2, \qquad (10.7)$$

где $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{e}_i \Delta x^i$, $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{e}_k \Delta x^k$, что, в силу инвариантности длины отрезка, можно написать в виде

$$(\Delta S)^2 = (\Delta \mathbf{r}) \cdot (\Delta \mathbf{r}) = \mathbf{e}_i \Delta x^i \cdot \mathbf{e}_k \Delta x^k = \mathbf{e}_i \Delta x^i \cdot \mathbf{e}^k \Delta x_k = \mathbf{e}^i \Delta x_i \cdot \mathbf{e}^k \Delta x_k \qquad (11.7)$$

где $\Delta x_i, \Delta x^i$ - компоненты вектора $\Delta \mathbf{r}$ в **основном** и **взаимном** базисах. Тогда, используя обозначения (5.7) и (6.7), можно записать

$$(\Delta S)^2 = g_{ik} \Delta x^i \cdot \Delta x^k \qquad (12.7)$$

или

$$(\Delta S)^2 = g^{ik} \Delta x_i \cdot \Delta x_k \qquad (12'.7)$$

или

$$(\Delta S)^2 = \Delta x_i \cdot \Delta x^i, \qquad (12''.7)$$

где $\Delta x_i, \Delta x_k$ - **ковариантные** компоненты вектора $\Delta \mathbf{r}$, а $\Delta x^i, \Delta x^k$ - **контравариантные** компоненты вектора $\Delta \mathbf{r}$.

Формулы (12.7), (12’.7) и (12’’.7) определяют квадрат элемента дуги в выбранной системе координат через метрические тензоры g_{ik} (или g^{ik}).

Определение 2.7 Говорят, что величины g_{ik} (или g^{ik}) определяют **метрику пространства**, арифметические свойства которого устанавливаются **введённой системой координат** x^1, x^2, x^3.

Связь между величинами g_{ik} и g^{ik} можно установить, если рассмотреть выражения

$$a_i = g_{ik} a^k \ (i = 1,2,3)$$

как систему трёх линейных относительно a^k уравнений:

$$a_1 = g_{11}a^1 + g_{12}a^2 + g_{13}a^3,$$
$$a_2 = g_{21}a^1 + g_{22}a^2 + g_{23}a^3, \tag{13.7}$$
$$a_3 = g_{31}a^1 + g_{32}a^2 + g_{33}a^3$$

Для решения этой системы введём обозначение определителя этой системы

$$G = \det(g_{ik}) = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \tag{14.7}$$

где (g_{ik}) - матрица

$$(g_{ik}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \tag{15.7}$$

Отсюда, решая систему (13.7) по Крамеру, получим

$$a^1 = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & g_{12} & g_{13} \\ a_2 & g_{22} & g_{23} \\ a_3 & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}}{G} = \frac{\sum_{k=1}^{3} G^{1k} a_k}{G} \quad , \tag{16.7}$$

$$a^2 = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & a_1 & g_{13} \\ g_{21} & a_2 & g_{23} \\ g_{31} & a_3 & g_{33} \end{vmatrix}}{G} = \frac{\sum_{k=1}^{3} G^{2k} a_k}{G}, \tag{17.7}$$

$$a^3 = \frac{\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & a_1 \\ g_{21} & g_{22} & a_2 \\ g_{31} & g_{32} & a_3 \end{vmatrix}}{G} = \frac{\sum_{k=1}^{3} G^{3k} a_k}{G}, \tag{18.7}$$

или

$$a^i = \frac{\sum_{k=1}^{3} G^{ik} a_k}{G} = \frac{G^{ik} a_k}{G} \quad (i = 1,2,3) \tag{19.7}$$

где G^{ik} - алгебраические дополнения, соответствующие члену (g_{ik}) детерминанта (определителя) G, могут быть записаны в виде

$$G^{ik} = \begin{vmatrix} g_{ps} & g_{pt} \\ g_{rs} & g_{rt} \end{vmatrix}, \tag{20.7}$$

где индексы (i, p, r) и (k, s, t) составляют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3. Таким образом, например, имеем

$$G^{11} = \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}, \quad G^{12} = \begin{vmatrix} g_{13} & g_{12} \\ g_{33} & g_{32} \end{vmatrix}, \quad G^{13} = \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix}..$$

$\sum_{k=1}^{3} G^{ik} a_k$ получается из определителя $\begin{vmatrix} a_1 & g_{12} & g_{13} \\ a_2 & g_{22} & g_{23} \\ a_3 & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$.

$$\sum_{k=1}^{3} G^{1k} a_k = a_1 \begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} g_{13} & g_{12} \\ g_{33} & g_{32} \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{22} & g_{23} \end{vmatrix} = a_1 G_{11} + a_2 G_{12} + a_3 G_{13} \qquad (21.7)$$

То есть, $a^i = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{3} G^{ik}}{G} \cdot a_k$ или **по соглашению о суммировании**

$$a^i = \frac{G^{ik}}{G} \cdot a_k. \qquad (22.7)$$

Сравнивая теперь (19.7) с (7.7), получим искомую связь

$$g^{ik} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{3} G^{ik}}{G} \quad \text{или} \quad g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G}. \qquad (23.7)$$

Аналогичным путём можно получить выражение

$$g_{ik} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{3} G_{ik}}{G'} \quad \text{или} \quad g_{ik} = \frac{G_{ik}}{G'}, \qquad (24.7)$$

где

$$G' = \det g^{ik}, \quad G_{ik} = \begin{vmatrix} g^{ps} & g^{pt} \\ g^{rs} & g^{rt} \end{vmatrix}. \qquad (25.7)$$

С другой стороны, непосредственными вычислениями с учётом (5.7), (6.7) и (9.7)

$$\begin{aligned} &\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_i = g_{ik} = g_{ki} \\ &\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}^i = g^{ik} = g^{ki} \\ &\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_i = g_i^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0, \text{ если } & i \neq k \\ 1, \text{ если } & i = k \end{cases} \end{aligned} \qquad (26.7)$$

и полученных ранее в § 3 выражений

$$\mathbf{e}^i = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{\mathbf{e}_l(\mathbf{e}_m \times \mathbf{e}_n)} = \frac{\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k}{V} \qquad (27.7)$$

можно выяснить **геометрический смысл знаменателя** G.

Подставим выражения (27.7) в формулу (26.7) и используем свойство векторно – векторного произведения [2] Тогда получается

$$g^{ik} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k = \frac{\mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_r}{V} \cdot \frac{\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_t}{V} = \frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_s & \mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_t \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_s & \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_t \end{vmatrix} = \frac{1}{V^2} \begin{vmatrix} g_{ps} & g_{pt} \\ g_{rs} & g_{rt} \end{vmatrix} \qquad (28.7)$$

где (i, j, k) и (l, m, n) составляют циклические перестановки чисел 1, 2, 3..

$$G = \det(g_{ik}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}, \quad \text{а} \quad G^{ik} = \begin{vmatrix} g_{ps} & g_{pt} \\ g_{rs} & g_{rt} \end{vmatrix}$$

Сравнивая выражение (28.7) для g^{ik} с (23.7), получим

---

[2] $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, откуда

$$(\mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_r) \cdot (\mathbf{e}_s \times \mathbf{e}_t) = \mathbf{e}_t \times (\mathbf{e}_p \times \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_s = \{\mathbf{e}_p(\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_r) - \mathbf{e}_r(\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_p)\}\mathbf{e}_s =$$
$$= (\mathbf{e}_p \cdot \mathbf{e}_s)(\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_r) - (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_s)(\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_p)$$

$$G = V^2 \quad \text{и} \quad V = \pm\sqrt{G}, \tag{29.7}$$

где G определено в (23.7).

Замечание 2.7 **Знак** перед корнем для **правой** системы координат выбирается **положительным**.

Поскольку аналогичным путём можно получить

$$V' = \pm\sqrt{C'}, \tag{30.7}$$

то, учитывая, что $V \cdot V' = 1$, получим, как следствие,

$$G \cdot G' = 1\,. \tag{31.7}$$

Таким образом, объём V параллелепипеда, построенного на векторах основного базиса, равен $\sqrt{G}$, а на векторах взаимного базиса $\sqrt{G'}$.

Случай ортогональных базисов

Замечание 3.7 Случай **ортогональных** базисов рассматривается особо, потому что ортогональные системы координат наиболее распространены в приложениях.

Выше уже было указано, что **ортогональный** базис **совпадает со своим взаимным**. В этом случае, согласно (26.7), из величин (g_{ik}) отличны от нуля только g_{11}, g_{22}, g_{33}.

Тогда из $a_i = g_{ik}a^k$ и $a^i = g^{ik}a_k$ следует

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = g_{11}a^1; \quad a_2 = g_{22}a^2; \quad a_3 = g_{33}a^3 \\ a^1 = g^{11}a_1, \quad a^2 = g^{22}a_2, \quad a^3 = g^{33}a_3 \end{array}\right\} \tag{32.7}$$

Если вместо $a^i = g^{ik}a_k$ записать $a^k = g^{ki}a_i$ и подставить в $a_i = g_{ik}a^k$, то

$$a_i = g_{ik}a^k = g_{ik}g^{ki}a_i\,,$$

и тогда совершенно очевидно, что

$$g_{ik}g^{ki} = 1 \tag{33.7}$$

Следовательно,

$$g_{11} = \frac{1}{g^{11}}, \quad g_{22} = \frac{1}{g^{22}}, \quad g_{33} = \frac{1}{g^{33}},$$

потому что $g_{11} \cdot g^{11} = 1$, $g_{22} \cdot g^{22} = 1$, $g_{33} \cdot g^{33} = 1$. Кроме того, отсюда получается выражение квадрата приращения длины дуги через метрический тензор в виде

$$\Delta S^2 = g_{11}(\Delta x^1)^2 + g_{22}(\Delta x^2)^2 + g_{33}(\Delta x^3)^2. \tag{34.7}$$

Задача 1.7 Выразить **скалярное произведение** двух векторов и **косинус угла** между ними через **ковариантные и контравариантные** компоненты.

Решение. По определению

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A^i\boldsymbol{e}_i \cdot B^k\boldsymbol{e}_k = A_i\boldsymbol{e}^i \cdot B_k\boldsymbol{e}^k = A^i\boldsymbol{e}_i \cdot B_k\boldsymbol{e}^k = A_i\boldsymbol{e}^i \cdot B^k\boldsymbol{e}_k =$$

$$= g_{ik}A^iB^k = g^{ik}A_iB_k = A_iB^i = A^iB_i$$

и в силу равенства

$$g_i^k = \delta_i^k = \begin{cases} 0, \text{ если} \quad i \neq k \\ 1, \text{ если} \quad i = k \end{cases}.$$

получается

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = g_{ik}A^iB^k = g^{ik}A_iB_k = A_iB^i = A^iB_i$$

Модуль вектора **A** равен

$$|\mathbf{A}| = A = \sqrt{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}} = \sqrt{g_{ik}A^iA^k} = \sqrt{g^{ik}A_iA_k} = \sqrt{A_iA^i}\ ,$$

и угол между векторами A и B может быть найден по одной из следующих формул

$$\cos(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{g_{ik}A^iB^k}{\sqrt{g_{ik}A^iA^k}\sqrt{g_{ik}B^iB^k}} = \frac{g^{ik}A_iB_k}{\sqrt{g^{ik}A_iA_k}\sqrt{g^{ik}B_iB_k}} = \frac{A_iB^i}{\sqrt{A_iA^i}\sqrt{B_iB^i}}\ .$$

Здесь числитель и подкоренное выражение записаны в обобщённых обозначениях.

Правило поднятия, опускания и переименовании индексов

В связи с формулами (7.7) и (8.7) и им подобным в алгебре тензоров говорят об **операции поднятия и опускания индексов** у компонент тензоров. Под этим понимают правило получения одних компонент через другие при помощи оператора – **метрического тензора**. Правило заключается в том, что «поднимаемый» («опускаемый») индекс переходит в **метрический** тензор, а на то место, куда он должен быть поднят (опущен), становится «немой» индекс суммирования. Вторым «немым» индексом суммирования является свободный индекс метрического тензора. Например.

$$a_{ikl} = g_{im}a^{m}_{\cdot kl\cdot} = g_{im}g_{kn}a^{mn}_{\cdot\cdot l\cdot} = g_{im}g_{kn}g_{lr}a^{mnr}\ . \tag{35.7}$$

Замечание 4.7 Иногда о тождественном преобразовании вида

$$a_{ik} = g_i^{\cdot l}a_{lk} \tag{36.7}$$

говорят как об операции «**переименования**» индекса.

Фундаментальный (метрический) тензор

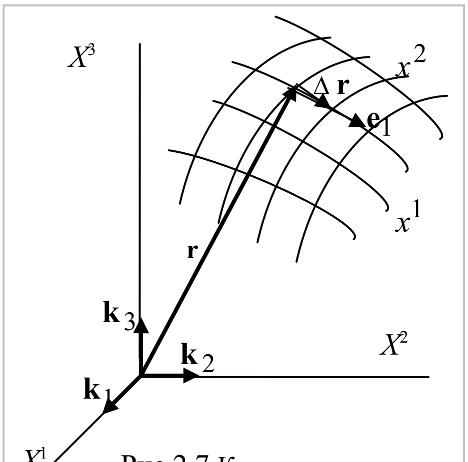


Рис.2.7 К понятию фундаментального тензора

Определение 3.7 Метрический тензор называют **фундаментальным**. в том случае, когда хотят подчеркнуть его значение в курсе тензорного анализа.

До сих пор рассматривались прямолинейные системы координат, но можно получить метрический тензор и для криволинейных координат. Для этого можно g_{ik} и g^{ik} считать функциями координат n-мерного пространства $x^1,...,x^n$. Тогда

$$(\Delta S)^2 = g_{ik}(x^1,...,x^n)dx^idx^k \tag{37.7}$$

Это **фундаментальная квадратичная форма**, определяющая квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками многообразия.

По самому определению, значение квадратичной формы (37.7) **должно оставаться тем же самым,** независимо от того, в каких координатах производится вычисление, иными словами**, квадратичная форма** (37.7) является **инвариантом.**

Функции g_{ik} удовлетворяют **условиям симметрии**

$$g_{ik} = g_{ki} \tag{38.7}$$

и ещё требуется, чтобы определитель

$$G = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \cdots g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} \cdots g_{2n} \\ \cdots & \cdots \\ g_{n1} & g_{n2} \cdots g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{39.7}$$

был отличен от нуля в рассматриваемой области изменения переменных.

Рассмотрим системы криволинейных координат $\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3$ (рис. 2.7) Для этого зададим радиус-вектор $\mathbf{r}$ как дифференцируемую вектор -функцию от трёх переменных

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3) \tag{40.7}$$

Векторное соотношение (40.7) равносильно трём скалярным

$$x^i = x^i(\alpha^1,\alpha^2,\alpha^3) \tag{41.7}$$

На рисунке 2.7 показана координатная сетка линий α^1,α^2. Если дать приращение радиусу-вектору $\mathbf{r}$ по координатной линии $\Delta\alpha^1$, то (рис. 2.7)

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^1} = \lim_{\Delta\alpha^1 \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta \alpha^1} \tag{42.7}$$

вектор $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^1}$ является вектором, касательным к линии α^1. Таким образом, в каждой точке пространства можно рассмотреть тройку векторов $\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^i}$, которые можно принять за векторы базиса (**реперы**), **если они не компланарны**. Это условие выполнено, если в каждой точке определитель

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^1},\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^2},\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^3}\right) \neq 0 \tag{43.7}$$

или

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \alpha^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \alpha^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial \alpha^3} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial \alpha^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \alpha^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial \alpha^3} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial \alpha^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \alpha^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial \alpha^3} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{44.7}$$

не равен нулю

В этом случае существует обращение формул (40.7)

$$\alpha^i = \alpha^i(x^1,x^2,x^3), \tag{45.7}$$

так что якобианы (см. § 8) матрицы $\dfrac{\partial x^i}{\partial \alpha^j} \equiv X^i_j$ (или X) и матрицы $\dfrac{\partial \alpha^i}{\partial x^j} \equiv Y^i_j$ (короче Y) являются взаимно-обратными. Таким образом, при выполнении условий (39.7 и 44.7) в каждой точке пространства существует связанный с криволинейной системой координат базис

$$\mathbf{e}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^i}, \tag{46.7}$$

который называют **локальным**. Если $\mathbf{k}_i$ - тройка единичных векторов, то **локальный базис** $\mathbf{e}_i$ связан с ней соотношением

$$\mathbf{e}_i \equiv X_i^j \mathbf{k}_j; \qquad \mathbf{k}_i \equiv Y_i^j \mathbf{e}_j. \tag{48.7}$$

Итак, в каждой точке вектор $\mathbf{a}(a^1, a^2, a^3)$ представляется в **локальном базисе** $\mathbf{e}_i$ своими **контравариантными компонентами**

$$\mathbf{a} = a^i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^i} = a^i \cdot \mathbf{e}_i \tag{49.7}$$

Его **ковариантные компоненты** согласно (49.7) определяются следующим образом

$$a_j = \mathbf{a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^j} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j = a^i \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \qquad (50.7)$$

Определим теперь матрицу

$$g_{ij} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \alpha^j} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j, \qquad (51.7)$$

которая, очевидно, является симметричной. Она называется **фундаментальной матрицей**. Определитель этой матрицы

$$G = \det\left|g_{ij}\right| \qquad (52.7)$$

согласно условиям (7.7) или (8.7) является отличным от нуля. Следовательно, существует матрица g^{ij}, обратная по отношению к g_{ij}

$$g_{ij} \cdot g^{ij} = \delta_i^j, \qquad (53.7)$$

где δ_i^j - элементы **единичной матрицы (дельты Кронекера)**

$$\delta_i^j = \begin{cases} 0, \text{если} & i \neq j \\ 1, \text{если} & i = j \end{cases} \qquad (54.7)$$

Из формул (39.7) и (44.7) была установлена **связь между ковариантными и контравариантными** компонентами вектора **a**

$$a_j = a^i g_{ij} \qquad (55.7)$$

Умножая левую и правую части этого соотношения на g^{ij} и производя суммирование по j, получим, используя (53.7), соотношение, обратное к (55.7)

$$a_j g^{jk} = a^k \qquad (56.7)$$

С помощью формул (55.7) и (56.7) и определения (14.7) **скалярное произведение двух векторов a** и **b** можно выразить четырьмя различными способами

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a^i b^j g_{ij} = a^i b^j = g^{ij} a_i b_j = a_i b^j \qquad (57.7)$$

Признак тензорности величин

Рассмотрим тензор второго ранга, содержащий 9 компонент.

Пусть A_i и B_i - компоненты двух произвольных векторов. Если при помощи девяти величин T_{ik} можно образовать инвариант вида

$$T_{ik} A_i B_k = \text{inv}\,, \qquad (58.7)$$

то девять величин T_{ik} образуют тензор 2-го ранга.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дано: **выражение** (58.7) **является инвариантом**. Преобразуем компоненты векторов A_i и B_i по закону перехода в другую систему координат. Тогда

$$T'_{ik} A'_i B'_k = T_{lm} A_l B_m = T_{lm} \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} A'_i B'_k \qquad (59.7)$$

Перенося всё влево, получим

$$(T'_{ik} - T_{lm} \alpha_{i'l} \alpha_{k'm}) A'_i B'_k = 0 \qquad (60.7)$$

Так как векторы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ взяты произвольно, то равенство нулю может быть только в том случае, если

$$T'_{ik} - T_{lm} \alpha_{i'l} \alpha_{k'm} = 0,$$

то есть справедливо равенство

$$T'_{ik} = T_{lm}\alpha_{i'l}\alpha_{k'm} \qquad (61.7)$$

Равенство (61.7) представляет собой **преобразование**, которое и **доказывает тензорность выражения** T_{ik}.

Замечание 5.7 Этот **признак** тензорности является также **определением** тензора второго ранга.
Замечание 6.7 В случае **системы обобщённых координат**, если можно написать, что

$$T_{ik}A^i B^k = \text{inv},\ T^{ik}A_i B_k = \text{inv},\ T_i^{.k}A^i B_k = \text{inv}$$

где A_i, B_i **- ковариантные**, а A^i, B^i - **контравариантные** компоненты двух произвольных векторов, то величины T_{ik}, T^{ik}, $T_i^{.k}$ являются соответственно **ковариантными, контравариантными и смешанными компонентами** тензора второго ранга.

Обратный тензорный признак

Теорема 1.7 Пусть в каждом ортонормированном базисе задана совокупность 3^{p+q} **чисел** $A_{i_1\ldots i_p l_1\ldots l_q}$ **такая, что при свёртывании её с произвольным тензором** $T_{l_1\ldots l_q}$ **ранга** q **снова получается тензор ранга р. Тогда исходная система чисел является тензором ранга** $p+q$**. (**без доказательства):

Символ Леви-Чивита

Символ Леви-Чивита или к**кососимметричный символ Кронекера** записывается следующим образом:

$\varepsilon_{ijk} =$ 1, если значения индексов $\mathrm{i, j, k}$ образуют **чётную** перестановку из чисел 1,2,3

$\varepsilon_{ijk} =$ - 1, если значения индексов $\mathrm{i, j, k}$ образуют **нечётную** перестановку из чисел 1,2,3 (62.7)

$\varepsilon_{ijk} =$ 0, если значения индексов $\mathrm{i, j, k}$ **не образуют перестановки** из чисел 1,2,3 (если есть равные индексы)

Определение 4.7 Транспозицией называется перестановка двух индексов 1, 2, 3.
Определение 5.7 Чётность и **нечётность** определяется числом транспозиций, необходимых для приведения данной перестановки к виду 1, 2, 3.
Например, (2, 1, 3) – **нечётная** транспозиция, Например**,** (2, 3, 1).- **чётная** транспозиция.
Замечание 7.7 С помощью этого тензора векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$ представляется в индексной записи следующим образом:

$$\varepsilon_{ijk}a_j b_k = c_i \qquad (63.7)$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_2 - a_2b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1) \qquad (64.7)$$

$$\begin{aligned} c_1 &= \varepsilon_{123}a_2b_3 + \varepsilon_{132}a_3b_2 = a_2b_3 - a_3b_2 \\ c_2 &= \varepsilon_{231}a_3b_1 + \varepsilon_{213}a_1b_3 = a_3b_1 - a_1b_3 \\ c_3 &= \varepsilon_{312}a_1b_2 + \varepsilon_{321}a_2b_1 = a_1b_2 - a_2b_1 \end{aligned} \qquad (65.7)$$

Замечание 8.7 Символ Леви-Чивита автоматически учитывает знаки места, которые необходимо принимать при раскрытии определителя.

Таким же образом можно представить и смешанное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$, которое обычно выражается в виде определителя

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1) \quad (66.7)$$

Через символ Леви-Чивита **смешанное произведение** трёх векторов $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$ записывают как $\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k$. Если раскрыть это выражение, то получается

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k &= \varepsilon_{123}a_1b_2c_3+\varepsilon_{132}a_1b_3c_2+\varepsilon_{312}a_3b_1c_2+\varepsilon_{321}a_3b_2c_1+\\ &+\varepsilon_{231}a_2b_3c_1+\varepsilon_{213}a_2b_1c_3=a_1b_2c_3-a_1b_3c_2+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1+ \\ &+a_2b_3c_1-a_2b_1c_3=a_1(b_2c_3-b_3c_2)+a_2(b_3c_1-b_1c_3)+a_3(b_1c_2-b_2c_1).\end{aligned} \quad (67.7)$$

Замечание 9.7 Символ Леви-Чивита часто используют для выражения **величины определителя третьего порядка.**

Замечание 10.7 Символ ε_{ijk} подчиняется **правилу преобразования декартовых тензоров третьего ранга**.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk} &= \varepsilon_{111}+\varepsilon_{112}+\varepsilon_{121}+\varepsilon_{211}+\varepsilon_{113}+\varepsilon_{131}+\varepsilon_{311}+\\ &+\varepsilon_{222}+\varepsilon_{221}+\varepsilon_{212}+\varepsilon_{122}+\varepsilon_{223}+\varepsilon_{232}+\varepsilon_{322}+\\ &+\varepsilon_{333}+\varepsilon_{331}+\varepsilon_{313}+\varepsilon_{133}+\varepsilon_{332}+\varepsilon_{323}+\varepsilon_{233}+\\ &+\varepsilon_{123}+\varepsilon_{132}+\varepsilon_{312}+\varepsilon_{321}+\varepsilon_{213}+\varepsilon_{231}\end{aligned} \quad (68.7)$$

Замечание 11.7 $\varepsilon_{ijk}a_ja_k$ является **индексной формой** записи векторного произведения вектора $\mathbf{a}$ **самого на себя и, следовательно,** $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$**.**

Задача 2.7 Показать, что определитель

$$\det A_{ij}=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

можно записать в виде $\varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Вспомним (из таблицы), что $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ и что $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=\varepsilon_{kij}a_ib_jc_k$

Если положить $a_i=A_{1i}$, $b_i=A_{2i}$, $c_i=A_{3i}$ (**строчки**), то получим

$$\lambda=\varepsilon_{ijk}a_ib_jc_k=\varepsilon_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$$

Замечание 12.7 Этот же результат можно получить непосредственным **разложением определителя по строке.**

Замечание 13.7 Определитель можно также записать в виде $\varepsilon_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}$ (**разложение по столбцу**)

Задача 3.7 Вектор υ_i задан в базисе $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ своими компонентами $\upsilon_i=\alpha a_i+\beta b_i+\gamma c_i$.

Показать, что $\alpha=\dfrac{\varepsilon_{ijk}\upsilon_ib_jc_k}{\varepsilon_{pqr}a_pb_qc_r}$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Нам дано

$$\begin{aligned}\upsilon_1&=\alpha a_1+\beta b_1+\gamma c_1,\\ \upsilon_2&=\alpha a_2+\beta b_2+\gamma c_2,\\ \upsilon_3&=\alpha a_3+\beta b_3+\gamma c_3.\end{aligned}$$

По правилу Крамера

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} \upsilon_1 & a_1 & c_1 \\ \upsilon_2 & b_2 & c_2 \\ \upsilon_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}$$

Учитывая выражения задачи 2.7, можно записать $\alpha = \dfrac{\varepsilon_{ijk}\upsilon_i b_j c_k}{\varepsilon_{pqr} a_p b_q c_r}$.

Аналогично получаются выражения

$$\beta = \frac{\varepsilon_{ijk} a_i \upsilon_j c_k}{\varepsilon_{pqr} a_p b_q c_r} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\varepsilon_{ijk} a_i b_j \upsilon_k}{\varepsilon_{pqr} a_p b_q c_r}$$

Задача 4.7 Показать, что $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{lp}\delta_{jq}$; а) при $i=1,\ j=q=2,\ p=3$ и б) $i=q=1,\ j=p=2,\ p=3$. (В этой задаче доказывается, что это тождество **справедливо при любом выборе индексов**).

Решение. а) Положим $i=1,\ \ j=2, p=3, q=2$ и заметим, что k индекс суммирования и, следовательно, пробегает значения 1, 2, 3. Тогда

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \varepsilon_{12k}\varepsilon_{k32} = \varepsilon_{121}\varepsilon_{132} + \varepsilon_{122}\varepsilon_{232} + \varepsilon_{123}\varepsilon_{332} = 0$$

$$\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} = \delta_{13}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{23} = 0;$$

б) Пусть $i=1,\ \ j=2,\ \ p=2,\ \ q=1$. Тогда

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \varepsilon_{123}\varepsilon_{321} = -1$$

$$\delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp} = \delta_{12}\delta_{21} - \delta_{11}\delta_{22} = -1.$$

Задача 5.7 Воспользовавшись результатами задачи 4.7, доказать, что

а) $\varepsilon_{pqs}\varepsilon_{mnr} = \delta_{pn}\delta_{qr} - \delta_{pr}\delta_{qn}$ б) $\varepsilon_{pqs}\varepsilon_{mnr} = -2\delta_{pr}$.

Решение. В тождестве, доказанном в задаче 4.7, разложим определитель по первой строке:

$$\varepsilon_{pqs}\varepsilon_{mnr} = \delta_{mp}(\delta_{nq}\delta_{rs} - \delta_{ns}\delta_{rq}) + \delta_{mq}(\delta_{ns}\delta_{rq} - \delta_{np}\delta_{rs}) + \delta_{ms}(\delta_{np}\delta_{rq} - \delta_{nq}\delta_{rp})$$

а) Положив $m=s$, получим

$$\varepsilon_{pqs}\varepsilon_{snr} = \delta_{sp}(\delta_{nq}\delta_{rs} - \delta_{ns}\delta_{rq}) + \delta_{sq}(\delta_{ns}\delta_{rq} - \delta_{np}\delta_{rs}) + \delta_{ss}(\delta_{np}\delta_{rq} - \delta_{nq}\delta_{rp}) =$$

$$= \delta_{rp}\delta_{nq} - \delta_{pn}\delta_{rq} + \delta_{qn}\delta_{rp} - \delta_{np}\delta_{qr} + 3\delta_{np}\delta_{rq} - 3\delta_{nq}\delta_{rp} = \delta_{np}\delta_{rq} - \delta_{nq}\delta_{rp}.$$

б) В полученном в «а» соотношении положим $n=q$. Тогда

$$\varepsilon_{pqs}\varepsilon_{sqr} = \delta_{qp}\delta_{rq} - \delta_{qq}\delta_{rp} = .\delta_{pr} - 3\delta_{pr} = -2\delta_{pr}.$$

Задача 6.7 Для тензора Леви-Чивита ε_{ijk} непосредственным расписыванием по индексам показать, что а) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = 6$, б) $\varepsilon_{ijk} a_j a_k = 0$.

Решение.

а) Просуммируем сначала по i:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{1jk}\varepsilon_{k1j} + \varepsilon_{2jk}\varepsilon_{k2j} + \varepsilon_{3jk}\varepsilon_{k3j}$$

Затем суммируем по j, записывая только отличные от нуля члены:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{12k}\varepsilon_{k12} + \varepsilon_{23k}\varepsilon_{k23} + \varepsilon_{21k}\varepsilon_{k21} + \varepsilon_{23k}\varepsilon_{k23} + \varepsilon_{31k}\varepsilon_{k31} + \varepsilon_{32k}\varepsilon_{k32}$$

Наконец, суммируем по k, опять оставляя только ненулевые члены:

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kij} = \varepsilon_{123}\varepsilon_{312} + \varepsilon_{132}\varepsilon_{213} + \varepsilon_{213}\varepsilon_{321} + \varepsilon_{231}\varepsilon_{123} + \varepsilon_{312}\varepsilon_{231} + \varepsilon_{321}\varepsilon_{132} =$$

$$= (1)(1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) + (1)(1) + (1)(1) + (-1)(-1) = 6$$

б) Суммируем по j, потом по k:

$\varepsilon_{ijk} a_j a_k = \varepsilon_{i1k} a_1 a_k + \varepsilon_{i2k} a_2 a_k + \varepsilon_{i3k} a_3 a_k =$

$= \varepsilon_{i12} a_1 a_2 + \varepsilon_{i23} a_2 a_3 + \varepsilon_{i21} a_2 a_1 + \varepsilon_{i23} a_2 a_3 + \varepsilon_{i31} a_3 a_1 + \varepsilon_{i32} a_3 a_2$

Из этого выражения получим:

при $i = 1$ $\varepsilon_{1jk} a_j a_k = a_2 a_3 - a_3 a_2 = 0$

при $i = 2$ $\varepsilon_{2jk} a_j a_k = a_1 a_3 - a_3 a_1 = 0$

при $i = 3$ $\varepsilon_{3jk} a_j a_k = a_1 a_2 - a_2 a_1 = 0$

§ 8 Якобиан

Определение 1.8 Функциональный определитель, составленный из частных производных первого порядка, вида $A^i_{\cdot k} = \dfrac{\partial y^i}{\partial x^k}$

$$J_1 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial y^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \tag{1.8}$$

называется **якобианом** (**якобиевой матрицей**).

Замечание 1.8 Комплекты частных производных некоторой скалярной функции y точки P представляют интерес в механике в связи с понятием **градиента потенциальной функции**.

Рассмотрим непрерывно дифференцируемую функцию $f(x^1, x^2, ..., x^n)$, представляющую скаляр $f(P)$, и преобразование координат

$$x^l = x^l(y^1, y^2, ..., y^n) \tag{2.8}$$

Если составить комплект из n частных производных

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x^n} \tag{3.8}$$

то можно выяснить, что произойдёт с этим комплектом, если к нему применить преобразование (2.8). В этом случае функции будут зависеть от $y^1, y^2, ..., y^n$. Тогда, например, комплект функций (3.8) станет

$$\frac{\partial f}{\partial y^i}, \frac{\partial f}{\partial y^2}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^n} \tag{4.8}$$

Если взять частные производные как производные сложной функции, то частные производные будут иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial y^i} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \qquad (i, \alpha = 1,2,...,n) \tag{5.8}$$

Если имеется функция $f(x^1, x^2, ..., x^n)$ и преобразование

$$x^l = x^l(z^1, z^2, ..., z^n), \tag{6.8}$$

то по такому же закону, как (5.8), получится

$$\frac{\partial f}{\partial z^i} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \cdot \frac{\partial x^\alpha}{\partial z^i} \tag{7.8}$$

Замечание 2.8 Можно представить себе комплекты функций $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y^i}$, $\dfrac{\partial f}{\partial z^i}$, как один и тот же математический аппарат, но в разных системах координат. В каждой отдельной точке $P(x^1, x^2, ..., x^n)$ комплект (3.8) представляет n чисел, которые можно рассматривать как **компоненты градиента вектора**, а комплект (5.8) представляет собой тот же **вектор** в другой системе координат.

Из формул (5.8) и (7.8) видно, что каждый раз при переходе из одной системы координат в другую происходит умножение на тензор вида $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial y^i}$, $\dfrac{\partial x^\alpha}{\partial z^i}$. Эти тензоры являются **матрицами преобразования величин из одной системы координат в другую**.

Замечание 3.8 Определитель прямого преобразования $A^i_{\cdot k} = \dfrac{\partial y^i}{\partial x^k}$ (производные новых координат по старым) имеет вид

$$J_1 = \frac{D(y^1, y^2, y^3)}{D(x^1, x^2, x^3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial y^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^2}{\partial x^3} \\ \dfrac{\partial y^3}{\partial x^1} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^2} & \dfrac{\partial y^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} \tag{8.8}$$

Замечание 4.8 Определитель обратного преобразования $C^k_{\cdot i} = \dfrac{\partial x^k}{\partial y^i}$ (производные старых координат по новым) имеет вид

$$J_2 = \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(y^1, y^2, y^3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \dfrac{\partial x^1}{\partial y^2} & \dfrac{\partial x^1}{\partial y^3} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial y^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial y^3} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial y^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial y^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial y^3} \end{vmatrix} \tag{9.8}$$

Замечание 5.8 Транспонированный якобиан $B^i_{\cdot j} = \dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}$ имеет вид

$$J_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial y^1} & \dfrac{\partial x^2}{\partial y^1} & \dfrac{\partial x^3}{\partial y^1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^2} & \dfrac{\partial x^2}{\partial y^2} & \dfrac{\partial x^3}{\partial y^2} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial y^3} & \dfrac{\partial x^2}{\partial y^3} & \dfrac{\partial x^3}{\partial y^3} \end{vmatrix} \tag{10.8}$$

Замечание 6.8 Здесь $A^i_{\cdot k} = \left|\dfrac{\partial y^i}{\partial x^k}\right|$ **- якобиан прямого преобразования** (11.8)

$B^i_{\cdot j} = \left|\dfrac{\partial x^i}{\partial y^j}\right|$ **- якобиан обратного преобразования** (12.8)

Замечание 7.8 Произведения **прямого и обратного** преобразования равны **дельте Кронекера**

$$A^{i}_{\cdot k} \cdot B^{k}_{\cdot j} = \delta^{i}_{\cdot j} \qquad B^{i}_{\cdot j} \cdot A^{j}_{\cdot k} = \delta^{i}_{\cdot k} \tag{13.8}$$

Замечание 8.8 Преобразование получается по формулам

$$a_{j'} = a_j B^{j}_{\cdot j'} = (a_1 \; a_2 \; a_3) \begin{pmatrix} b^1_{1'} & b^1_{2'} & b^1_{3'} \\ b^2_{1'} & b^2_{2'} & b^2_{3'} \\ b^3_{1'} & b^3_{2'} & b^3_{3'} \end{pmatrix} =$$

$$= (a_1 b^1_{1'} + a_2 b^2_{1'} + a_3 b^3_{1'} \quad a_1 b^1_{2'} + a_2 b^2_{2'} + a_3 b^3_{2'} \quad a_1 b^1_{3'} + a_2 b^2_{3'} + a_3 b^3_{3'}) = (a_{1'} \quad a_{2'} \quad a_{3'}) \tag{14.8}$$

и

$$a^{i'} = a^i A^{i'}_{\cdot i} = (a^1 \; a^2 \; a^3) \begin{pmatrix} a^{1'}_1 & a^{2'}_1 & a^{3'}_1 \\ a^{1'}_2 & a^{2'}_2 & a^{3'}_2 \\ a^{1'}_3 & a^{2'}_3 & a^{3'}_3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= (a^1 a^{1'}_1 + a^2 a^{1'}_2 + a^3 a^{1'}_3 \quad a^1 a^{2'}_1 + a^2 a^{2'}_2 + a^3 a^{2'}_3 \quad a^1 a^{3'}_1 + a^2 a^{3'}_2 + a^3 a^{3'}_3) = \\ &= (a^{1'} \; a^{2'} \; a^{3'}) \end{aligned} \tag{15.8}$$

ГЛАВА 2. СВОЙСТВА ТЕНЗОРОВ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

§ 9. Свойство симметрии тензоров

Определение 1.9 Тензор $S_{ikl...}$ называется **симметричным** по паре индексов, например i и k, если компоненты, получающиеся при перестановке этих индексов, равны друг другу, то есть

$$S_{ikl...} = S_{kil...}. \qquad (1.9)$$

Таким образом,

$$S_{12l...} = S_{21l...}; \quad S_{23l...} = S_{32l...} \text{ и т.д.}$$

Определение 2.9 Тензор $A_{ikl.}$ называется **антисимметричным** по паре индексов, например i и k, если при их перестановке компоненты меняют знак, то есть

$$A_{ikl...} = -A_{kil...} \qquad (2.9)$$

Таким образом, для **антисимметричного** тензора справедливы равенства

$$A_{12l...} = -A_{21l...}; \quad A_{23l...} = -A_{32l...} \text{ и т.д.}$$

Замечание 1.9 У **антисимметричного** тензора компоненты с **равными** индексами, по которым имеет место антисимметрия, **равны нулю**.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $A_{ikl...} = -A_{kil...}$, то, например, при $i = k = 1$ получается $A_{11l...} = -A_{11l}$. При переносе влево правой части получается $A_{11l...} + A_{11l...} = 0$, а отсюда $2A_{11l...} = 0 \Rightarrow A_{11l...} = 0$, ч.т.д.

Замечание 2.9 Свойство **симметрии или антисимметрии не зависит** от выбора системы координат.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Свойство симметрии следует из **закона преобразования** тензоров. Действительно, если тензор T_{ik} симметричен в системе (К), т.е. $T_{ik} = T_{ki}$, то

$$T'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}T_{lm} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}T_{ml} = T'_{ki} \qquad (3.9)$$

Аналогично доказывается инвариантность **свойства антисимметрии** по отношению к выбору системы координат.

Симметричный S_{ik} и антисимметричный A_{ik} тензоры второго ранга имеют матрицы следующего вида

$$\|S_{ik}\| = \begin{Vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{Vmatrix}; \quad \|A_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{Vmatrix}. \qquad (4.9)$$

Определение 3.9 Антисимметричный тензор 2-го ранга называется **бивектором**.

Замечание 3.9 Любой тензор 2-го ранга T_{ik} может быть представлен в виде суммы симметричного тензора S_{ik} и антисимметричного A_{ik}.

Д о к а з а т е л ь с т в о: следует из очевидно равенства

$$T_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki}) + \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}). = S_{ik} + A_{ik} \qquad (5.9)$$

Тензор $S_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} + T_{ki})$ - **симметричный** тензор, так как компоненты

$$S_{ik} = S_{ki}. \qquad (6.9)$$

Тензор $A_{ik} = \frac{1}{2}(T_{ik} - T_{ki}).$ - **антисимметричный** тензор, так как

$$A_{ik} = -A_{ki}, \text{ ч.т.д.} \qquad (7.9)$$

Перестановка индексов, симметрирование и альтернирование

Компоненты тензора, например, ковариантного T_{ik} можно рассматривать как элементы квадратной матрицы

$$\begin{Vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{Vmatrix} \qquad (8.9)$$

Если в тензоре T_{ik} поменять местами индексы, то получится новый тензор T_{ki}, матрица которого

$$\begin{Vmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{Vmatrix} \qquad (9.9)$$

будет **транспонированной** по отношению к матрице T_{ik} (столбцы станут строками), совокупность величины T_{ki} будет преобразовываться по формулам

$$a'_{ik} = \alpha_{i'l}\, a_{k'm} a_{lm}\,.$$

Таким образом, простейшая операция - перестановка индексов - приводит к построению нового тензора. Очевидно, что для симметричного тензора перестановка индексов приводит к тому же тензору.

Определение 4.9 Симметрированием называется операция **перестановки пары индексов с последующим сложением полученного тензора с исходным тензором**. В результате получится тензор, симметричный относительно принятой пары индексов.

Определение 5.9 Альтернированием называется операция **перестановки пары индексов с последующим вычитанием полученного тензора из исходного тензора**. В результате получится тензор, антисимметричный относительно принятой пары индексов.

Из формулы (5.9) следует, что симметричная часть S_{ik} тензора T_{ik} равна половине результатов симметрирования, а альтернирование A_{ik} - половине от результатов альтернирования.

Замечание 4.9 Наличие у тензора свойства **симметрии уменьшает число его независимых компонент.**

Замечание 5.9 Число независимых компонент симметричного тензора 2-го ранга равно 6, а **антисимметричного** тензора 2-го ранга равно 3.

Задача 1.9 Единичный тензор 2-го ранга δ_{ik} является симметричным тензором

$$\delta_{ik} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Задача 2.9 Антисимметричный тензор 2-го ранга

$$C_{ik} = A_i B_k - A_k B_i\,,$$

где A_i и B_i - компоненты двух векторов.

$$C_{ik} = \begin{Vmatrix} A_1B_1 - A_1B_1 & A_1B_2 - A_2B_1 & A_1B_3 - A_3B_1 \\ A_2B_1 - A_1B_2 & A_2B_2 - A_2B_2 & A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 & A_3B_2 - A_2B_3 & A_3B_3 - A_3B_3 \end{Vmatrix} =$$

$$\begin{Vmatrix} 0 & A_1B_2 - A_2B_1 & A_1B_3 - A_3B_1 \\ A_2B_1 - A_1B_2 & 0 & A_2B_3 - A_3B_2 \\ A_3B_1 - A_1B_3 & A_3B_2 - A_2B_3 & 0 \end{Vmatrix}$$

Замечание 6.9 Свойство **симметрии и антисимметрии** тензоров, отнесённое к системам обобщённых координат, **устанавливается по парам одноимённых** (ковариантных или контравариантных) индексов. Так, например, тензор $A_{ik}^{\cdot\cdot l}$ - **симметричен**, а $B_{ik}^{\cdot\cdot l}$ **антисимметричен**, если

$$A_{ik}^{\cdot\cdot l} = A_{ki}^{\cdot\cdot l} \quad B_{ik}^{\cdot\cdot l} = -B_{ki}^{\cdot\cdot l}$$

Задача 3.9. Пусть задан антисимметричный декартов тензор B_{ij} и вектор $b_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}B_{jk}$ /

Показать, что $Bpq = \varepsilon_{pqi}b_i$.

Решение. Умножим данный вектор на ε_{pqi} и воспользуемся тождеством, доказанным в задаче 5.7.

$$\varepsilon_{pqi}b_i = {}^1\!/_2\,\varepsilon_{pqi}\varepsilon_{ijk}B_{jk} = {}^1\!/_2(\delta_{pj}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{qj})B_{jk} =$$
$$= {}^1\!/_2(B_{pq} - B_{qp}) = {}^1\!/_2(B_{pq} + B_{pq}) = B_{pq}$$

Задача 4.9 Показать, что тензор $B_{ik} = \varepsilon_{ijk}a_j$ **антисимметричен**.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с определением **символа Леви-Чивита** ε_{ijk} перемена местами двух индексов ведёт к изменению знака, так что

$$B_{ik} = \varepsilon_{ijk}a_j = -(\varepsilon_{kji}a_j) = -(B_{ki}) = -B_{ki}.$$

§ 10. Диады и диадики.

В дополнение к скалярному и векторному произведениям векторов вводится **индефинитное (неопределённое)**, или **диадное**, **произведение векторов**.

Определение 1.10 Диадой называется **неопределённое произведение двух векторов** $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, которое по определению является написанием векторов один за другим, например, $\mathbf{a},\mathbf{b}$ (**совокупность двух векторов**).

Диадное произведение не имеет геометрической интерпретации. Это некоторый **оператор**, используемый **при преобразовании** векторных выражений.

Определение 2.10 Вектор $\mathbf{a}$ называется **первым (левым)** вектором диады. Вектор $\mathbf{b}$ - **вторым (правым)** вектором диады.

Замечание 1.10 Применяются такие **обозначения диады**

$$\mathbf{a};\mathbf{b} \text{ или } \mathbf{a}\otimes\mathbf{b} \tag{1.10}$$

Определение 3.10 Символы ; и $\otimes$ между векторами **диады** называются символами **диадного умножения**.

Определение 4.10 Совокупность чисел $a^i b^j$ называется **компонентами** диады

$$\mathbf{a};\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} a^1b^1 & a^1b^2 & a^1b^3 \\ a^2b^1 & a^2b^2 & a^2b^3 \\ a^3b^1 & a^3b^2 & a^3b^3 \end{Bmatrix} \tag{2.10}$$

или

$$\mathbf{a};\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{Bmatrix} \tag{3.10}$$

в зависимости от того, являются ли векторы **контравариантными** или **ковариантными**.

Замечание 2.10 Из этой записи видно, что диады $\mathbf{a};\mathbf{b}$ и $\mathbf{b};\mathbf{a}$ не равны между собой.

$$\mathbf{b};\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} b^1a^1 & b^1a^2 & b^1a^3 \\ b^2a^1 & b^2a^2 & b^2a^3 \\ b^3a^1 & b^3a^2 & b^3a^3 \end{Bmatrix} \qquad (4.10)$$

Легко видеть, что (3.10) не равно (5.10)

$$\mathbf{b};\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 \end{Bmatrix} \qquad (5.10)$$

то есть, **диадное** произведение в общем случае **некоммутативно** $\mathbf{a};\mathbf{b} \neq \mathbf{b};\mathbf{a}$.

Замечание 3.10 Диада является **тензором** второго ранга специального вида, потому что столбцы и строки компонент этого тензора **пропорциональны между собой**.

Замечание 4.10 Тензором второго ранга является также сумма диад

$$(\mathbf{a};\mathbf{b}) + (\mathbf{c};\mathbf{d}) + (\mathbf{e};\mathbf{f})$$

Скалярное умножение диады $\mathbf{a};\mathbf{b}$ на вектор a

Пусть скалярное произведение двух векторов

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} = \lambda \qquad (6.10)$$

Тогда скалярное **произведение диады на вектор $\mathbf{c}$** слева имеет вид

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \lambda\mathbf{b} \qquad (7.10)$$

Получается что-то вроде **проекции** вектора $\mathbf{c}$ на вектор $\mathbf{b}$.

Умножение справа даёт

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\lambda \qquad (8.10)$$

даёт что-то вроде **проекции** вектора **$\mathbf{c}$ на вектор $\mathbf{a}$** .

Замечание 5.10 Единичная диада составляется из **векторов основного и взаимного репера**

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j\otimes\mathbf{e}^j \qquad (9.10)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}^j\otimes\mathbf{e}_i = \begin{Bmatrix} e^1e_1 & e^1e_2 & e^1e_3 \\ e^2e_1 & e^2e_2 & e^2e_3 \\ e^3e_1 & e^3e_2 & e^3e_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad (10.10)$$

Умножение вектора а на единичную диаду Е

Легко видеть из следующих выражений, что умножение на единичную диаду не меняет вектора

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}_i = \mathbf{a}^i\cdot\mathbf{e}_i \qquad (11.10)$$

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{e}^i\otimes\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{a} = \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{e}^i \qquad (12.10)$$

Выражение (11.10) – это **разложение** вектора $\mathbf{a}$ по векторам **основного базиса**,

Выражение (12.10) – это **разложение** вектора $\mathbf{a}$ по векторам **взаимного базиса**,

Замечание 6.10 Диаду можно представить как разложение **по двум диадам**

$$\mathbf{a}\otimes\mathbf{b} = \mathbf{a}^i\cdot\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{b}^j\cdot\mathbf{e}_j = \mathbf{a}^i\mathbf{b}^j\cdot\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j, \qquad (13.10)$$

где $\mathbf{e}_i\otimes\mathbf{e}_j$ **- диадный базис**. (14.10)

Задача 1.10 Даны два базиса

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}^j = (\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \mathbf{e}_3) \tag{15.10}$$

Их произведение даёт 9 диад, то есть,

$$G = \mathbf{e}_i;\mathbf{e}^j = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1;\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}_1;\mathbf{e}^2 & \mathbf{e}_1;\mathbf{e}^3 \\ \mathbf{e}_2;\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}_2;\mathbf{e}^2 & \mathbf{e}_2;\mathbf{e}^3 \\ \mathbf{e}_3;\mathbf{e}^1 & \mathbf{e}_3;\mathbf{e}^2 & \mathbf{e}_3;\mathbf{e}^3 \end{pmatrix} \tag{16.10}$$

Диадики

Определение 5.10 Диадиком $\mathbf{D}$ называется **тензор второго ранга**, который в общем случае может быть представлен в виде суммы **любого числа диад**

$$\mathbf{D} = \mathbf{a}_1;\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2;\mathbf{b}_2 + ... + \mathbf{a}_N;\mathbf{b}_N \tag{17.10}$$

В зависимости от того, какое произведение векторов имеется в виду, обозначение диадика может быть другим.

Определение 6.10 Скаляром диадика $\mathbf{D}$ называется диадик, который получается, если все диады являются **скалярными произведениями**

$$\mathbf{D_s} = \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{b}_2 + ... + \mathbf{a}_N \cdot \mathbf{b}_N, \tag{18.10}$$

Определение 7.10 Вектором диадика $\mathbf{D}$ называется диадик, который получается, если все диады являются **векторными произведениями**

$$\mathbf{D}_\upsilon = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2 + ... + \mathbf{a}_N \times \mathbf{b}_N \tag{19.10}$$

Определение 8.10 Если в каждой диаде выражения (17.10) сомножители поменять местами, то получается тензор, который называется **сопряжённым** исходному

$$\mathbf{D_c} = \mathbf{b}_1;\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2;\mathbf{a}_2 + ... + \mathbf{b}_N;\mathbf{a}_N \tag{20.10}$$

Свойство 1.10 Дистрибутивность диадиков

$$\mathbf{a};(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a};\mathbf{b} + \mathbf{a};\mathbf{c} \tag{21.10}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b});\mathbf{c} = \mathbf{a};\mathbf{c} + \mathbf{b};\mathbf{c} \tag{22.10}$$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b});(\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \mathbf{a};\mathbf{c} + \mathbf{a};\mathbf{d} + \mathbf{b};\mathbf{c} + \mathbf{b};\mathbf{d} \tag{23.10}$$

Свойство 2.10 Если λ и μ -скаляры, то

$$(\lambda + \mu)\mathbf{a};\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a};\mathbf{b} + \mu\mathbf{a};\mathbf{b} \tag{24.10}$$

$$\lambda\,\mathbf{a};\mathbf{b} = \mathbf{a};(\lambda\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a});\mathbf{b} \tag{25.10}$$

Произведение вектора a на диадик D

Пусть $\mathbf{u}$ - любой вектор.

Определение 9.10 Скалярные произведения $\mathbf{u}\cdot\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}\cdot\mathbf{u}$ являются **векторами**, которые определяются формулами

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{D} = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2 + ... + (\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}_N)\mathbf{b}_N \tag{26.10}$$

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{u}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{u}) + ... + \mathbf{a}_N(\mathbf{b}_N\cdot\mathbf{u}) \tag{27.10}$$

Алгебра диадиков

Определение 10.10 Два лиадика $\mathbf{D}$ и $\mathbf{F}$ **равны** тогда и только тогда, когда для **любого** вектора $\mathbf{v}$ справедливы равенства

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{F} \text{ или } \mathbf{D}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}. \tag{28.10}$$

Определение 11.10 Единичным диадиком (или **единичным тензором**) называется диадик $\mathbf{I}$, который представляется в виде

$$\mathbf{I} = \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3, \qquad (29.10)$$

$$\mathbf{I} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \qquad (30.10')$$

где $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ - векторы **любого ортонормированного базиса** в трёхмерном евклидовом пространстве.

Замечание 7.10 При умножении **единичного** диадика на **вектор** $\mathbf{v}$ справа или слева получается вектор $\mathbf{v}$

.
$$\mathbf{I} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{v} \qquad (31.10)$$

для всех векторов $\mathbf{v}$.

Определение 12.10 Векторные произведения $\mathbf{v} \times \mathbf{D}$ и $\mathbf{D} \times \mathbf{v}$ являются **диадиками**, которые представляются соответственно формулами

$$\mathbf{v} \times \mathbf{D} = (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_1)\mathbf{b}_1 + (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_2)\mathbf{b}_2 + ... + (\mathbf{v} \times \mathbf{a}_N)\mathbf{b}_N = \mathbf{F} \qquad (32.10)$$

$$\mathbf{D} \times \mathbf{v} = \mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1 \times \mathbf{v}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2 \times \mathbf{v}) + ... + \mathbf{a}_N(\mathbf{b}_N \times \mathbf{v}) = \mathbf{E} \qquad (33.10)$$

Определение 13.10 Скалярное произведение двух **диад** $\mathbf{a};\mathbf{b}$ и $\mathbf{c};\mathbf{d}$ по определению есть **диада** вида

$$\mathbf{a};\mathbf{b} \cdot \mathbf{c};\mathbf{d} = \mathbf{a}(\mathbf{bc});\mathbf{d} = \mathbf{a};(\mathbf{bc})\mathbf{d} = (\mathbf{bc})(\mathbf{a};\mathbf{d}) = (\mathbf{a};\mathbf{d})(\mathbf{bc}) \qquad (34.10)$$

и снова представляет собой **диаду**. Отсюда видно, что произведение диад не меняется при **переносе скалярного произведения** $(\mathbf{bc})$.

Определение 14.10 Скалярное произведение любых двух **диадиков** $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ тоже является **диадиком** (на основании формулы 17.10)

$$\begin{aligned} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} &= (\mathbf{a}_1;\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2;\mathbf{b}_2 + ... + \mathbf{a}_N;\mathbf{b}_N) \cdot (\mathbf{c}_1;\mathbf{d}_1 + \mathbf{c}_2;\mathbf{d}_2 + ... + \mathbf{c}_N;\mathbf{d}_N) = \\ &= (\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{c}_1)(\mathbf{a}_1;\mathbf{d}_1) + (\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{c}_2)(\mathbf{a}_2;\mathbf{d}_2) + ... + (\mathbf{b}_N \cdot \mathbf{c}_N)(\mathbf{a}_N;\mathbf{d}_N) \end{aligned} \qquad (35.10)$$

Определение 15.10 Диадики $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ являются **взаимно обратными**, если

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = \mathbf{I} \qquad (36.10)$$

Замечание 8.10 Для **обратных** диадиков часто используются обозначения $\mathbf{E} = \mathbf{D}^{-1}$ и $\mathbf{D} = \mathbf{E}^{-1}$.

Определение 16.10 Дважды скалярное произведение диад $\mathbf{a};\mathbf{b}$ и $\mathbf{c};\mathbf{d}$ определяется следующим образом

$$\mathbf{a};\mathbf{b} : \mathbf{c};\mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = \lambda \qquad \textbf{скаляр} \qquad (37.10)$$

Определение 17.10 Дважды смешанное произведение диад $\mathbf{a};\mathbf{b}$ и $\mathbf{c};\mathbf{d}$ определяется следующим образом

$$\mathbf{a};\mathbf{b} \times\cdot\, \mathbf{c};\mathbf{d} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = \mathbf{h} \qquad \textbf{вектор} \qquad (38.10)$$

$$\mathbf{a};\mathbf{b} \cdot\times\, \mathbf{c};\mathbf{d} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{g} \qquad \textbf{вектор} \qquad (39.10)$$

Определение 18.10 Дважды векторное произведение диад $\mathbf{a};\mathbf{b}$ и $\mathbf{c};\mathbf{d}$ определяется как

$$\mathbf{a};\mathbf{b} \times\times\, \mathbf{c};\mathbf{d} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{uw} \qquad \textbf{диада} \qquad (40.10)$$

Определение 19.10 Диадик $\mathbf{D}$ называют **самосопряжённым** или **симметричным**, если выполняется условие

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}_\mathbf{c} \qquad (41.10)$$

Определение 20.10 Диадик $\mathbf{D}$ называют **антисимметричным**, если выполняется условие

$$\mathbf{D} = -\mathbf{D}_\mathbf{c} \qquad (42.10)$$

Замечание 9.10 Каждый диадик можно представить в **виде суммы симметричного и антисимметричного диадиков**, причём это представление **единственно**. Это можно записать так:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D_c}) + \frac{1}{2}(\mathbf{D} - \mathbf{D_c}) \qquad (43.10)$$

Задача 2.10 Показать, что **тензор второго ранга**, заданный в виде суммы N диад, можно свести к **сумме трёх членов**, если использовать базисные векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ в качестве а) первых сомножителей, б) в качестве вторых сомножителей в диадах.

Пусть

$$\mathbf{D} = \mathbf{a}_1;\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2;\mathbf{b}_2 + ... + \mathbf{a}_N;\mathbf{b}_N = \mathbf{a}_i;\mathbf{b}_i \qquad (i = 1,2,...,N) \qquad (44.10)$$

а) Запишем все первые сомножители диад $\mathbf{a}_i$ через базисные векторы

$$\mathbf{a}_i = a_{1i}\mathbf{e}_1 + a_{2i}\mathbf{e}_2 + a_{3i}\mathbf{e}_3 = a_{ji}\,\mathbf{e}_j, \qquad (45.10)$$

тогда

$$\mathbf{D} = a_{ji}\mathbf{e}_j;\mathbf{b}_i = \mathbf{e}_j;(a_{ji}\mathbf{b}_i) = \mathbf{e}_j;\mathbf{c}_j, \text{ где } (j = 1, 2, 3) \text{ и вектор } \mathbf{c}_j = a_{ji}\mathbf{b}_i \qquad (46.10)$$

б) Аналогично, подставляя $\mathbf{b}_i$ в виде $\mathbf{b}_i = b_{ij}\mathbf{e}_j$, получим

$$\mathbf{D} = \mathbf{a}_i b_{ji}\mathbf{e}_j = (b_{ij}\mathbf{a}_i)\mathbf{e}_j = \mathbf{g}_j\mathbf{e}_j, \text{ где } (j = 1, 2, 3) \text{ .и вектор } \mathbf{g}_j = b_{ij}\mathbf{a}_i \qquad (47.10)$$

Задача 3.10. Показать, что для произвольных диадика $\mathbf{D}$ и вектора $\mathbf{v}$ справедливо равенство $\mathbf{D}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{D}_c$. ($\mathbf{D}_c$ - **симметричный** диадик)

Решение. Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + ... + \mathbf{a}_N\mathbf{b}_N = \mathbf{a}_i\mathbf{b}_i$. Тогда

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{v}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{v}) + ... + \mathbf{a}_N(\mathbf{b}_N\cdot\mathbf{v}) =$$

$$= (\mathbf{b}_1\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{a}_1 + (\mathbf{b}_2\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{a}_2 + ... + (\mathbf{b}_N\cdot\mathbf{v})\cdot\mathbf{a}_N = \mathbf{v}\cdot\mathbf{D}_c$$

Задача 4.10. Доказать, что $(\mathbf{D}_c\cdot\mathbf{D})_c = \mathbf{D}_c\cdot\mathbf{D}$

Решение. Любой тензор 2-го ранга может быть представлен в виде диадика $\mathbf{D} = D_{\mathrm{ij}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, а симметричный - в виде $\mathbf{D}_\mathrm{c} = D_{\mathrm{ji}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$.

Тогда

$$\mathbf{D}_\mathrm{c}\cdot\mathbf{D} = D_{\mathrm{ji}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\cdot D_{\mathrm{pq}}\mathbf{e}_p\mathbf{e}_q = D_{\mathrm{ji}}D_{\mathrm{pq}}(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_p)\mathbf{e}_i\mathbf{e}_q$$

и

$$(\mathbf{D}_\mathrm{c}\cdot\mathbf{D})_\mathbf{c} = D_{\mathrm{ji}}D_{\mathrm{pq}}(\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_p)\mathbf{e}_q\mathbf{e}_i = D_{\mathrm{pq}}\mathbf{e}_q(\mathbf{e}_p\cdot\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i D_{\mathrm{ji}} = D_{\mathrm{pq}}\mathbf{e}_q\mathbf{e}_p\cdot D_{\mathrm{ji}}\mathbf{e}_j\mathbf{e}_i = \mathbf{D}_\mathrm{c}\cdot\mathbf{D}$$

Задача 5.10 Для тензоров $\mathbf{D} = \mathbf{3ii} + \mathbf{2jj} - \mathbf{jk} + 5\mathbf{kk}$, $\mathbf{F} = \mathbf{4ik} + \mathbf{6jj} - \mathbf{3kj} + \mathbf{kk}$ вычислить и сравнить **двойные скалярные произведения:** $\mathbf{D}:\mathbf{F}$ и $\mathbf{D}:\mathbf{F}$.

Решение. По определению $\mathbf{ab}:\mathbf{cd} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})$, следовательно

$$\mathbf{D}:\mathbf{F}(=\mathbf{F}:\mathbf{D}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) =$$

$$= 3\cdot 4\cdot(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\cdot(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) + 3\cdot 6\cdot(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})\cdot(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + 3\cdot(-3)\cdot(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}) + 3\cdot 1\cdot(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}) +$$

$$+ 2\cdot 4\cdot(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})\cdot(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) + 2\cdot 6\cdot(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})\cdot(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + 2\cdot(-3)(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})\cdot(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}) + 2\cdot 1\cdot(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})\cdot(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}) -$$

$$- 1\cdot 4\cdot(\mathbf{j}\cdot\mathbf{i})\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) - 1\cdot 6\cdot(\mathbf{j}\cdot\mathbf{j})\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) - 1\cdot 3\cdot(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) - 1\cdot 1\cdot(\mathbf{j}\cdot\mathbf{k})\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) +$$

$$+ 5\cdot 4\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{i})\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) + 5\cdot 6\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j})\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + 5\cdot(-3)\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}) + 5\cdot 1\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k})\cdot(\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) =$$

$$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 12 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 - 0 + 0 + 0 + 0 + 5 = 17$$

Аналогично $\mathbf{ab}\cdot\cdot\,\mathbf{cd} = (\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})$ и, следовательно, $\mathbf{D}\cdot\cdot\,\mathbf{F} = 12 + 3 + 5 = 20$

Задача 6.10 Показать, что $(\mathbf{D}\times\mathbf{v})_c = -\mathbf{v}\times\mathbf{D}_c$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Известно, что $\mathbf{D} = \mathbf{a}_1\,\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\,\mathbf{b}_2 + ... + \mathbf{a}_N\,\mathbf{b}_N$ Тогда

$$\mathbf{D}\times\mathbf{v} = \mathbf{a}_1(\mathbf{b}_1\times\mathbf{v}) + \mathbf{a}_2(\mathbf{b}_2\times\mathbf{v}) + ... + \mathbf{a}_N(\mathbf{b}_N\times\mathbf{v}).$$

$$(\mathbf{D}\times\mathbf{v})_c = (\mathbf{b}_1\times\mathbf{v})\mathbf{a}_1 + (\mathbf{b}_2\times\mathbf{v})\mathbf{a}_2 + ... + (\mathbf{b}_N\times\mathbf{v})\mathbf{a}_N =$$

$$= -(\mathbf{v}\times\mathbf{b}_1)\mathbf{a}_1 - (\mathbf{v}\times\mathbf{b}_2)\mathbf{a}_2 - ... - (\mathbf{v}\times\mathbf{b}_N)\mathbf{a}_N = -\mathbf{v}\times\mathbf{D}_c$$

§ 11 Произведения тензоров и свёртки.

Свёртки

Определение 1.11 Свёртыванием тензора **по двум свободным** индексам называется такая операция, когда **два индекса обозначаются одной и той же буквой**, вследствие чего они становятся **индексами суммирования**.

Пусть дан какой-нибудь тензор не менее, чем 2-го ранга (валентности), например, трёхвалентный тензор A_{ijk}. Выберем какие-нибудь два индекса и сделаем следующее: в каждой координатной системе отберём те координаты этого тензора, у которых выбранные индексы равны между собой. Это будут координаты вида A_{ill}. Составим сумму всех таких координат при каких-нибудь фиксированных остальных индексах (в данном случае индекса i. Эта сумма имеет вид $\sum\limits_{l=1}^{3} A_{ill}$. Обозначим её A_i. Итак,

$$A_i \equiv \sum_{l=1}^{3} A_{ill} \tag{1.11}$$

Требуется доказать, что числа A_i, составленные в каждой координатной системе в соответствии с (1.11), образуют тензор 1-го ранга (вектор). Пусть этот тензор получается из исходного тензора A_{ijk} **свёртыванием** 2-го и 3-го индексов.

Д о к а з а т е л ь с т в о**.** Выпишем закон преобразования и применим к исходному тензору

$$A'_{pqr} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \alpha_{pi}\alpha_{qj}\alpha_{rk}A_{ijk} \tag{2.11}$$

Составим теперь числа A_i в новой (штрихованной) системе координат. Обозначим эти числа A'_p и получим согласно (27.11) формулу

$$A_p \equiv \sum_{s=1}^{3} A_{pss} \tag{3.11}$$

Заменяя в преобразовании (2.11) индексы q и r через s и, вставляя результат в (3.11), получим

$$A'_{pqr} = \sum_{s=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \alpha_{pi}\alpha_{sj}\alpha_{sk}A_{ijk} \tag{4.11}$$

Выполним суммирование по s и получим

$$\sum_{s=1}^{3} \alpha_{sj}\alpha_{sk} = \delta_{jk} \tag{5.11}$$

Тогда (4.11) принимает вид

$$A'_p = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \alpha_{pi}\delta_{jk}A_{ijk} \tag{6.11}$$

В процессе суммирования по j и k можно сохранить лишь члены, для которых $j = k$.. Остальные члены в соответствии с (5.11) обратяться в нуль. Обозначим общее значение индексов j и k через l. При этом $\delta_{jk} = \delta_{ll} = 1$ и тогда (6.11) примет вид

$$A'_p = \sum_{i=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}\alpha_{pi}A_{ill} = \sum_{i=1}^{3}\alpha_{pi}A_i \qquad (7.11)$$

В (7.11) была использована формула (1.11). Этим **доказано**, что тензорный закон преобразования чисел A_i и суммирование (**свёртка**) действительно определяют одновалентный (1-го ранга) тензор.

Замечание 1.11 В **результате** свёртывания всегда получается **тензор** (**свёртка**), порядок (**ранг**) которого на две единицы **меньше,** чем у исходного.

Замечание 2.11 На приведенном выше доказательстве можно показать, **каким образом** соглашение о суммировании **упрощает** запись.

Итак, пусть A_{ikl} образуют тензор 3-го ранга. Произведём свёртывание его по двум индексам i и k. Для этого, как уже указано в приведенном выше доказательстве, нужно взять только те его компоненты, у которых i и k равны, и составить их сумму

$$A_{iil} \equiv \sum_{i=1}^{3} A_{iil} = A_{11l} + A_{22l} + A_{33l} \qquad (8.11)$$

В результате свёртывания A_{ikl} по другим индексам получим суммы A_{iki}, A_{ikk}. Таких сумм каждого вида будет три. Например, получим суммы A_{iil}

$$A_{ii1} \equiv \sum_{i=1}^{3} A_{ii1}; \quad A_{ii2} \equiv \sum_{i=1}^{3} A_{ii2}; \quad A_{ii3} \equiv \sum_{i=1}^{3} A_{ii3} \qquad (9.11)$$

Докажем, что любая такая группа из трёх сумм, например, A_{ii1} образует тензор 1-го ранга, то есть, **вектор.** Так как A'_{ikl} образуют тензор 3-го ранга, то по закону преобразования получим

$$A'_{ikl} = \alpha_{i'm}\alpha_{k'n}\alpha_{l'r}A_{mnr} \qquad (10.11)$$

Отсюда, свёртывая по индексам i и k, аналогично формулам (4.11) и (6.11),получим

$$A'_{iil} = \alpha_{i'm}\alpha_{i'n}\alpha_{l'r}A_{mnr} = \delta_{mn}\alpha_{l'r}A_{mnr} = \alpha_{l'r}A_{mmr} \qquad (11.11)$$

Отсюда видно, что получен тензор **первого ранга**, определяемый тремя величинами A_{iil}, то есть, **вектор** (см. определение 3 в ПРИЛОЖЕНИИ 3)

Пример 1.11 Образовать **скаляры** путём свёртывания тензоров, матрицы которых имеют вид:

$$1)\begin{Vmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 6 & 3\\ 2 & 4 & 3\end{Vmatrix}; \quad 2)\begin{Vmatrix}5 & 0 & 1\\ 3 & 6 & 3\\ 4 & 5 & 4\end{Vmatrix}; \quad 3)\begin{Vmatrix}3 & 5 & 3\\ 4 & 4 & 4\\ 3 & 2 & 6\end{Vmatrix}$$

Решение: Свёртка тензора T_{ij} равна $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$. Отсюда

1) $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = 1 + 6 + 3 = 10$

2) $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = 5 + 6 + 4 = 15$

3) $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = 3 + 4 + 6 = 13$

Практически путём свёртывания тензора мы получаем **след** (*tr*) **матрицы**.

Общие правила свёртывания

Правило 1.11 При свёртывании по **двум** индексам тензора ранга n получается тензор **ранга** $n-2$**.**

Правило 2.11 Операцию **свёртывания** можно применять к тензору **несколько раз**, до тех пор, пока его ранг не станет меньше двух.

Правило 3.11 Тензор **чётного** ранга может быть свёрнут до **скаляра**, потому что его можно свёртывать до тех пор, пока не останется **ни одного индекса**.

Правило 4.11. Тензор **нечётного** ранга может быть свёрнут только до **вектора** (потому что останется **один индекс**, который уже нельзя свернуть).

Определение 2.11 Скалярным или **«внутренним»** произведением тензоров называется **умножение** тензоров с последующим **свёртыванием** по индексам, относящимся к различным множителям – тензорам.

Замечание 3.11 Можно дать определение 2.11 так: **внутренним** произведением двух тензоров называется **результат свёртывания**, применённый к **внешнему** произведению данных тензоров, причём совпадающие индексы должны фигурировать по одному в каждом из сомножителей.

Замечание 4.11 Примерами **внутреннего** произведения являются

$$\alpha_{ik} B_k = A_i,$$

$$\lambda_{iklm} B_{lm} = A_{ik}.$$

Определение 3.11 Скалярное произведение двух **векторов** является произведением **двух тензоров** 1-го ранга с последующим **свёртыванием**. ***NB!***

Замечание 5.11 При **свёртывании** тензоров, компоненты которых рассматриваются **в обобщённых системах координат**, важно помнить, что свёртывание может производиться **только по парам** разноимённых индексов, то есть, один свёртываемый индекс должен быть «**ковариантным»,** а другой обязательно «**контравариантным**». Это следует из требования чтобы результат свёртывания оставался **тензором**.

Например, пусть мы произвели свёртку тензора $A_i^{\cdot kl}$ по индексам i и k; тогда величины $A_i^{\cdot il}$ будут компонентами тензора (**вектора**), потому что в силу формул (3.7), (4.7) первой главы

$$\left.\begin{aligned} A'_{ik} &= \alpha_{i'}^{l} \alpha_{k'}^{m} A_{lm}, \qquad & A'^{lk} &= \alpha_{l}^{i'} \alpha_{m}^{k'} A^{lm}, \\ A'^{\cdot k}_{i} &= \alpha_{i'}^{l} \alpha_{m}^{k'} A_{l}^{\cdot m}, \qquad & A'^{i}_{\cdot k} &= \alpha_{l}^{i'} \alpha_{k'}^{m} A^{l}_{\cdot m}. \end{aligned}\right\}$$

а также в силу известного условия

$$\delta_i^k = \begin{cases} 0, \text{ если} & i \neq k \\ 1, \text{ если} & i = k \end{cases},$$

получим вектор

$$A'^{\cdot il}_{i} = \alpha_{i'}^{n} \alpha_{m}^{i'} \alpha_{r}^{l'} A_n^{\cdot mr} = \delta_m^n \alpha_r^{l'} A_n^{\cdot mr} = \alpha_r^{l'} A_n^{\cdot nr}$$

Свёртка же $A'^{\cdot kl}_{i}$ по индексам k и l даёт величины, закон преобразования которых

$$A'^{\cdot kk}_{i} = \alpha_i^n \alpha_m^{k'} \alpha_r^{k'} A_n^{\cdot mr}$$

указывает на то, что три величины $A'^{\cdot kk}_{i}$ не образуют вектор.

Задача 1.11 Свёртывание произведения произвольного тензора a_{ijk} с единичным тензором δ_{ij}

Решение.

$$a_{ijk}\delta_{kl} = a_{ij1}\delta_{1l} + a_{ij2}\delta_{2l} + a_{ij3}\delta_{3l} = a_{ijl}$$

Как и следовало ожидать, получился исходный тензор, так как δ_{ij} равен единице только в том случае, когда $k = l$.

Произведение тензоров и векторов

Тензор символически записывается в виде

$$\left\| T_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{T} = \begin{Bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Bmatrix} \qquad (11.11)$$

Вектор записывается в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 a_1 + \mathbf{e}_2 a_2 + \mathbf{e}_3 a_3. \qquad (12.11)$$

Каждый **тензор второго ранга** можно представить в подобном виде, то есть, в виде трёх векторов или записать его как сумму трёх диад (диадика)

$$\boldsymbol{T} = \mathbf{e}_1 \boldsymbol{t}_1 + \mathbf{e}_2 \boldsymbol{t}_2 + \mathbf{e}_3 \boldsymbol{t}_3 \qquad (13.11)$$

Это получается следующим образом: пусть матрица – столбец ортов и матрица – строка имеют вид

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \qquad (14.11)$$

а векторы тензора записаны в форме

$$\begin{aligned} \boldsymbol{t}_1 &= \mathbf{e}_1 t_{11} + \mathbf{e}_2 t_{12} + \mathbf{e}_3 t_{13} \\ \boldsymbol{t}_2 &= \mathbf{e}_1 t_{21} + \mathbf{e}_2 t_{22} + \mathbf{e}_3 t_{23} \\ \boldsymbol{t}_3 &= \mathbf{e}_1 t_{31} + \mathbf{e}_2 t_{32} + \mathbf{e}_3 t_{33} \end{aligned} \qquad (15.11)$$

потому что произведение тензора на столбец ортов справа получается в виде

$$\boldsymbol{T} \cdot \mathbf{E} = \begin{Bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 t_{11} + \mathbf{e}_2 t_{12} + \mathbf{e}_3 t_{13} \\ \mathbf{e}_1 t_{21} + \mathbf{e}_2 t_{22} + \mathbf{e}_3 t_{23} \\ \mathbf{e}_1 t_{31} + \mathbf{e}_2 t_{32} + \mathbf{e}_3 t_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{t}_1 \\ \boldsymbol{t}_2 \\ \boldsymbol{t}_3 \end{pmatrix} \qquad (15.11)$$

Если умножить матрицу-столбец (14.11) слева на $\mathbf{E}$, получим исходный тензор

$$\boldsymbol{T} = \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 t_{11} + \mathbf{e}_2 t_{12} + \mathbf{e}_3 t_{13} \\ \mathbf{e}_1 t_{21} + \mathbf{e}_2 t_{22} + \mathbf{e}_3 t_{23} \\ \mathbf{e}_1 t_{31} + \mathbf{e}_2 t_{32} + \mathbf{e}_3 t_{33} \end{pmatrix} \cdot = \begin{Bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Bmatrix} \qquad (16.11)$$

Умножение тензора T скалярно на вектор **a** даёт выражение нового вектора **a'**

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= \boldsymbol{T} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{e}_1 \cdot (\boldsymbol{t}_1 \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{e}_2 \cdot (\boldsymbol{t}_2 \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{e}_3 \cdot (\boldsymbol{t}_3 \cdot \mathbf{a}) = \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot (t_{11} a_1 + t_{12} a_2 + t_{13} a_3) + \mathbf{e}_2 \cdot (t_{21} a_1 + t_{22} a_2 + t_{23} a_3) + \\ &+ \mathbf{e}_3 \cdot (t_{31} a_1 + t_{32} a_2 + t_{33} a_3) \end{aligned} \qquad (17.11)$$

Произведение тензора T на вектор а с последующим свёртыванием

Определение 4.11 Скалярным произведением тензора *T* на вектор а называется вектор $\boldsymbol{a}'$, составляющие которого линейным образом выражаются через составляющие вектора **а**, причём коэффициентами являются компоненты тензора *T*.

Замечание 6.11 Вектор $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{a}$ называется **линейной векторной функцией** вектора $\boldsymbol{a}$.

Рассмотрим произведение, в котором производится свёртывание по первому индексу тензора $\mathrm{T}_{ik} A_i$. Это получается при умножении **сопряженного** (**транспонированного**) тензора

$$\boldsymbol{T_c} = \left\| T_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{Vmatrix}$$

на вектор **справа**

$$\boldsymbol{T_c} \cdot \mathbf{a} = \begin{pmatrix} t_{11}a_1 + t_{21}a_2 + t_{31}a_3 \\ t_{12}a_1 + t_{22}a_2 + t_{32}a_3 \\ t_{13}a_1 + t_{23}a_2 + t_{33}a_3 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{Bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = T_{ik}a_i$$

или **исходного** тензора на вектор **слева**

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} a_1t_{11} + a_2t_{21} + a_3t_{31} \\ a_1t_{12} + a_2t_{22} + a_3t_{32} \\ a_1t_{13} + a_2t_{23} + a_3t_{33} \end{pmatrix}$$

Тогда произведение вектора **a** на тензора $\boldsymbol{T}$ получается в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}' = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{T} = \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot (t_{11}a_1 + t_{21}a_2 + t_{31}a_3) + \mathbf{e}_2 \cdot (t_{12}a_1 + t_{22}a_2 + t_{32}a_3) + \mathbf{e}_3 \cdot (t_{13}a_1 + t_{23}a_2 + t_{33}a_3) \end{aligned} \qquad (18.11)$$

Замечание 7.11 Из получения произведений тензора $\boldsymbol{T}$ на вектор **a** видно, что можно использовать **исходный и сопряжённый тензор** для получения одного и того же выражения, поэтому справедливо равенство

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T_c} \cdot \mathbf{a} \qquad (19.11)$$

Свёртывание по второму индексу произведения тензора $\boldsymbol{T}$ на вектор a

Для этого тензор T умножается на вектор **a** справа

$$\begin{pmatrix} t_{11}a_1 + t_{12}a_2 + t_{13}a_3 \\ t_{21}a_1 + t_{22}a_2 + t_{23}a_3 \\ t_{31}a_1 + t_{32}a_2 + t_{33}a_3 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = T_{ik}a_k$$

Тогда произведение тензора T на вектор **a** справа получается в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}' = \boldsymbol{T} \cdot \mathbf{a} = \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot (t_{11}a_1 + t_{12}a_2 + t_{13}a_3) + \mathbf{e}_2 \cdot (t_{21}a_1 + t_{22}a_2 + t_{23}a_3) + \mathbf{e}_3 \cdot (t_{31}a_1 + t_{32}a_2 + t_{33}a_3) \end{aligned} \qquad (20.11)$$

Это получается также, если умножить **сопряжённый** тензор $\boldsymbol{T}_{\text{c}}$ на вектор **a слева**

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_1t_{11} + a_2t_{12} + a_3t_{13} & a_1t_{21} + a_2t_{22} + a_3t_{23} & a_1t_{31} + a_2t_{32} + a_3t_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{a}' = \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{T_c} = \\ &= \mathbf{e}_1 \cdot (t_{11}a_1 + t_{12}a_2 + t_{13}a_3) + \mathbf{e}_2 \cdot (t_{21}a_1 + t_{22}a_2 + t_{23}a_3) + \mathbf{e}_3 \cdot (t_{31}a_1 + t_{32}a_2 + t_{33}a_3) \end{aligned}$$

Пример 2.11 Найти произведение $a_{ij}x_j$ тензора **второго ранга** a_{ij}, матрица которого в некотором базисе равна

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix},$$

и тензора **первого ранга** x_i (**вектор**а), который в том же базисе имеет компоненты

$$(x_i) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},.$$

Решение.

$$a_{1j}x_j = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 16$$
$$a_{2j}x_j = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 5 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 19$$
$$a_{3j}x_j = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 4 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 7 \cdot 4 = 41$$

Ответ: Вектор $(16, 19, 41)$

Умножение вектора а на тензор T

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{a} \cdot T = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1) \cdot \boldsymbol{t}_1 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2) \cdot \boldsymbol{t}_2 + \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 \cdot \boldsymbol{t}_3 \qquad (21.11)$$

Координаты вектора $\boldsymbol{a}''$ получаются в виде

$$\begin{aligned} a_1'' &= a_1 t_{11} + a_2 t_{21} + a_3 t_{31} \\ a_2'' &= a_1 t_{12} + a_2 t_{22} + a_3 t_{32} \\ a_3'' &= a_1 t_{13} + a_2 t_{23} + a_3 t_{33} \end{aligned} \qquad (22.11)$$

Геометрическая интерпретация произведения вектора а на тензор T

Произведение $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{T}$ так составлено по векторам $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2\ \boldsymbol{t}_3$, как вектор $\mathbf{a}$ составлен из основных ортов $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2\ \mathbf{i}_3$.

Для получения геометрической интерпретации ограничимся случаем двумерного пространства.

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2$$
$$\mathbf{a}' = a_1 \cdot \boldsymbol{t}_1 + a_2 \cdot \boldsymbol{t}_2$$

Построим на взаимно перпендикулярных ортах $\boldsymbol{i}_1$ и $\boldsymbol{i}_2$ квадратную решётку из растяжимых прутьев, соединённых шарнирами, как показано на рисунке 1.11. Теперь растянем стержни и повернём так, чтобы квадраты перешли в параллелограммы, как показано на рис.2.11. Тогда вектор **а** перейдет в **новый вектор а**’.

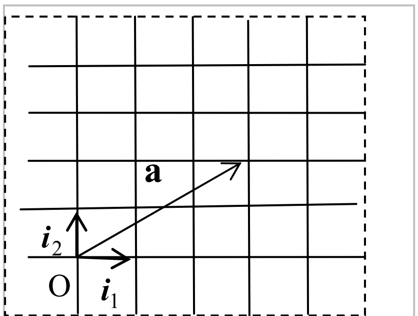


Рис.1.11 Вектор **а** в системе $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2$

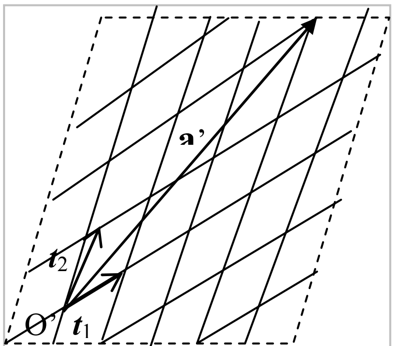


Рис.2.11 Вектор **а**’ в системе $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{t}_2$

Произведение тензоров

Пусть A_{ik} и B_{ik} - компоненты двух тензоров второго ранга. Их произведение будет иметь компоненты

$$C_{iklm} = A_{ik} \cdot B_{lm} \qquad (23.11)$$

Числа C_{iklm} образуют тензор 4 –го ранга.

Д о к а з а т е л ь с т в о:

$$A'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}\cdot A_{lm}$$
$$B'_{ik} = \alpha_{i'l}\alpha_{k'm}\cdot B_{lm} \qquad (24.11)$$

$$C'_{iklm} = A'_{ik}\cdot B'_{ik} = \alpha_{i'n}\alpha_{k'p}\cdot\alpha_{k'r}\alpha_{m's}A_{np}B_{rs} = \alpha_{i'n}\alpha_{k'p}\cdot\alpha_{k'r}\alpha_{m's}C_{nprs} \qquad (25.11)$$

Определение 5.11 Операция образования компонент C_{iklm} называется **внешним** умножением тензоров A_{ik} и B_{ik}.

Замечание 8. 11 Тензорное произведение **некоммутативно**.

$$C_{iklm} = A_{ik}\cdot B_{lm} \neq C_{lmik} = A_{lm}\cdot B_{ik} \qquad (26.11)$$

Определение 6.11 Произведением нескольких тензоров называется **тензор**, компоненты которого равны произведению компонент сомножителей. При этом **ранг произведения равен сумме рангов сомножителей.**

Определение 7.11 Внешним произведением тензоров произвольного ранга называется новый тензор, у которого компоненты образованы **умножением каждой компоненты одного тензора на каждую компоненту второго.**

$$a)\ a_ib_j = T_{ij} \qquad b)\ a_iF_{lk} = \alpha_{ilk} \qquad c)\ D_{ij}T_{lm} = \Phi_{ijlm} \qquad e)\ \varepsilon_{ijk}\upsilon_m = \theta_{ijkm} \qquad (27.11)$$

Замечание 9.11 Как видно из этих примеров, **внешние** произведения получаются путём **написания умножения тензоров друг за другом.**

Замечание 10.11 Внешнее произведение двух векторов образует одну диаду.

§ 12. Главные значения и главные направления тензора второго ранга.

Основные понятия

Рассмотрим произвольный тензор 2-го ранга T_{ik}. Если этот тензор умножить на вектор A_k и произвести свёртывание по индексу вектора и одному индексу тензора, то в результате получим некоторый вектор B_i с компонентами

$$B_i = \mathrm{T}_{ik}A_k \qquad (1.12)$$

Тензор T_{ik}, будучи умножен скалярно на некоторый вектор A_k, преобразует его в новый вектор в том смысле, что из компонент вектора A_k определённым действием получаются компоненты другого вектора – вектора B_i. Вектор B_i вообще отличен от A_k по величине и направлению. Таким образом, **тензор** при умножении на **вектор** изменяет длину этого вектора и поворачивает его оси.

Задача заключается в том, чтобы **найти для данного тензора** T_{ik} **такие векторы** A_k, которые бы **не поворачивались** этим тензором, а только **изменяли длину** (рис. 4.12).

Тогда

$$\mathrm{T}_{ik}A_k = \lambda A_i, \qquad (2.12)$$

где λ - скаляр.

Физический смысл этой задачи виден на некоторых примерах.

Задача 1.12 Напряжение на площадке с нормалью **n** равно

$$p_{nk} = p_{ik}n_i \qquad (3.12)$$

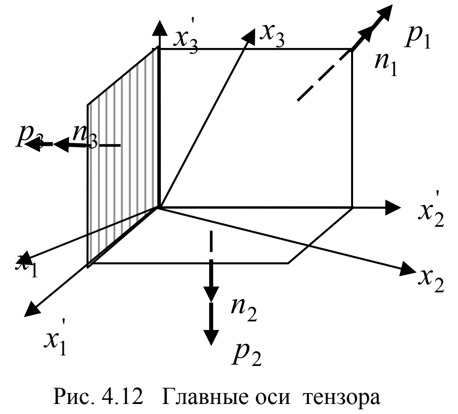


Рис. 4.12 Главные оси тензора напряжений p_{ik} в точке М. На площадках, перпендикулярным к осям x'_1, x'_2, x'_3, касательные напряжения равны нулю.

причём вообще вектор $\mathbf{p}_n$ не параллелен орту $\mathbf{n}$, то есть, на каждой площадке есть как **нормальные**, так и **касательные** напряжения.

Интерес представляют такие площадки, на которых есть **только нормальные** напряжения, а **касательные равны нулю**. Для этих площадок

$$\mathbf{p}_n \parallel \mathbf{n} \quad \text{или} \quad \lambda\mathbf{n} = \mathbf{p}_n = \mathbf{p}_i n_i$$

Тогда ориентация этих площадок, которую дают орты $\mathbf{n}$, определится из системы уравнений

$$\lambda n_k = p_{ik} n_i . \tag{4.12}$$

Задача 2.12 Если диэлектрические свойства среды определяются тензором T_{ik}, то возникает вопрос, как следует направить электрическое поле $\boldsymbol{E}$, чтобы электрическая индукция $\boldsymbol{D}$ была направлена по вектору напряжённости $\boldsymbol{E}$?

Общий вид зависимости $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ имеет линейный характер

$$D_i = T_{ik} E_k \tag{5.12}$$

Поставленная задача требует отыскания векторов E_i, удовлетворяющих уравнениям

$$\lambda E_i = T_{ik} E_k \tag{6.12}$$

Определение 1.12 Если существуют для тензора T_{ik} векторы A_k, удовлетворяющие уравнениям

$$\lambda A_i = T_{ik} A_k , \tag{7.12}$$

то направления**, определяемые этими векторами A_k,** называются **главными (собственными) направлениями тензора T_{ik} .**

Определение 2.12 Оси главных направлений называются **главными осями** тензора.

Определение 3.12 Значения компонент тензора **в координатной системе главных** осей называются **главными значениями**.

Определение главных направлений и главных значений тензора T_{ik}

Согласно (7.12) компоненты вектора **A**, определяющие оси тензора T_{ik}, удовлетворяют системе трёх уравнений:

$$T_{ik} A_k - \lambda A_i = (T_{ik} - \lambda \delta_{ik}) A_k = 0 \tag{8.12}$$

или

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) A_1 + \quad T_{12} A_2 + \quad T_{13} A_3 &= 0 \\ T_{21} A_1 + (T_{22} - \lambda) A_2 + \quad T_{23} A_3 &= 0 \\ T_{31} A_1 + \quad T_{32} A_2 + (T_{33} - \lambda) A_3 &= 0 \end{aligned} \tag{9.12}$$

Эта **однородная** система служит для определения A_1, A_2, A_3. При этом, ищется отличное от нуля, или, **нетривиальное** решение этой системы. **Однородная** система уравнений имеет **нетривиальное** решение только в том случае, когда её **определитель равен нулю**. Таким образом, для определения главных значений имеется уравнение

$$\begin{vmatrix} (T_{11} - \lambda) & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & (T_{22} - \lambda) & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & (T_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \tag{10.12}$$

Уравнение (10.12) представляет собой **кубическое** уравнение относительно λ .

Определение 4.12 Уравнение (10.12) называется **характеристическим уравнением** тензора T_{ik} .

Замечание 1.12 Корни кубического уравнения (10.12) в общем случае могут быть не все действительными, и тогда из этого уравнения **нельзя найти главные направления** тензора T_{ik}.

Замечание 2.12 При отнесении тензора к **системам обобщённых** координат можно использовать его **любые компоненты для определения** его главных направлений и значений.

Например, если известны **ковариантные** компоненты тензора T_{ik}, то уравнение, определяющее **собственные** векторы **A**, имеет вид:

$$\lambda A_i = T_{ik} A^k . \qquad (11.12)$$

Отсюда в силу $A_i = g_{ik} A^k$ получим систему линейных однородных уравнений относительно A^k вида

$$(T_{ik} - \lambda g_{ik}) A^k = 0 . \qquad (12.12)$$

Однако, для того, чтобы привести эту систему к виду (9.12), необходимо пользоваться **смешанными** компонентами тензора $g^{i}_{.k} = \delta^{i}_{.k}$. Умножив предыдущие уравнения $(i = 1,2,3)$ на g^{il}, пронумеровав по i, получим в силу уже известных формул

$$\left.\begin{array}{c} A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm}, \quad A_{ik} = g_{il} g_{km} A^{lm}, \quad A_{ik} = g_{kl} A_i^{\cdot l} = g_{il} A^{l}_{\cdot k}, \\ A_l^{\cdot k} = g^{kl} A_{il}, \quad A_l^{\cdot k} = g_{il} A^{lk}, \\ A^{i}_{\cdot k} = g^{il} A_{lk}, \quad A^{i}_{\cdot k} = g_{kl} A^{il}, \quad A^{ik} = g^{il} A_l^{\cdot k} = g^{kl} A^{i}_{\cdot l}. \end{array}\right\},$$

следующие уравнения

$$(T^{i}{}_{\cdot k} - \lambda g^{i}{}_{\cdot k}) A^k = 0 \qquad (13.12)$$

Тогда **для определения собственных значений** тензора получаем **характеристическое уравнение** вида

$$\begin{vmatrix} (T^1{}_{\cdot 1} - \lambda) & T^1{}_{\cdot 2} & T^1{}_{\cdot 3} \\ T^2{}_{\cdot 1} & (T^2{}_{\cdot 2} - \lambda) & T^2{}_{\cdot 3} \\ T^3{}_{\cdot 1} & T^3{}_{\cdot 2} & (T^3{}_{\cdot 3} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \qquad (14.12)$$

Замечание 3.12 Обычно рассматриваются **только симметричные** тензоры, потому что у них корни характеристических уравнений **всегда действительные**.

Остановимся на рассмотрении **симметричных тензоров** второго ранга, отнесённых к **прямоугольным** декартовым системам координат, так что $T_{ik} = T_{ki}$. В этом случае **все** корни $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ характеристического уравнения (13.12) **вещественные (действительные)**.

Действительно, пусть λ - какой-нибудь из корней уравнения (13.12) и пусть ему отвечают в силу системы уравнений (9.12) какие-то величины A_i, вообще комплексные. Тогда умножив каждое $(i = 1,2,3)$ из тождеств

$$\lambda A_i = T_{ik} A_k \qquad (15.12)$$

на величины $\overline{A}_i$, комплексно сопряжённые с A_i, и просуммировав по i, получим

$$\lambda A_i \overline{A}_i = T_{ik} A_k \overline{A}_i \qquad (16.12)$$

Так как $T_{ik} = T_{ki}$, то

$$T_{ik} A_k \overline{A}_i = \frac{1}{2}\left(T_{ik} A_k \overline{A}_i + T_{ik} A_k \overline{A}_i\right) = \frac{1}{2}\left(T_{ik} A_k \overline{A}_i + T_{ki} \overline{A}_k A_i\right) = \frac{1}{2} T_{ik}\left(A_k \overline{A}_i + \overline{A}_k A_i\right).$$

Отсюда видно, что сумма $T_{ik} A_k \overline{A_i}$ вещественна, так как все T_{ik} вещественны и выражение в скобках вещественно. Вспомним, что произведение комплексного числа на сопряжённое $z \cdot \bar{z} = (x+iy)\cdot(x-iy) = x^2 + y^2$ равно сумме квадратов вещественных чисел. Поскольку $A_i \overline{A_i} = |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2$ - тоже вещественная величина, то из (15.12) следует, что корень λ вещественная величина. При этом, конечно, все компоненты A_k тоже вещественны (это следует из $\lambda A_i = T_{ik} A_k$).

Итак, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - **вещественные числа**.

Заметим, что если T_{ik} - **ковариантные** компоненты тензора, то, исходя из равенства $\lambda A_i = T_{ik} A^k$, умножая его на $\overline{A_i}$, суммируя по i и используя $T_{ik} = T_{ki}$, аналогично предыдущему получим **вещественность характеристического уравнения** (13.12).

Главные значения и главные направления симметричных тензоров второго ранга

В дальнейшем будут рассмотрены **только симметричные** тензоры **с действительными** компонентами. Это несколько проще в математическом отношении, так как тензоры, важные для **механики сплошной среды, обычно симметричны**, то жертвуя немногим, целесообразно принять такое ограничение.

Для каждого **симметричного** тензора T_{ij}, заданного в некоторой точке пространства, и для каждого направления в этой точке (характеризуемого **единичным вектором** n_i) существует вектор, определяемый **внутренним** произведением (см. определение 6.11)

$$\upsilon_i = T_{ij} n_j \tag{17.12}$$

Здесь T_{ij} можно рассматривать как **линейный векторный оператор**, который ставит в соответствие направлению n_i вектор υ_i. Если направление таково, что вектор υ_i параллелен n_i, то **указанное внутреннее произведение** выражается скаляром, умноженным на n_i. В этом случае (так как $\upsilon_i = \lambda n_i$) получается

$$T_{ij} n_j = \lambda n_i \tag{18.12}$$

и направление n_i называется **главным направлением** или **главной осью** тензора T_{ij}. С помощью тождества $n_i = \delta_{ij} n_j$ соотношению (18.12) можно придать форму

$$(T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) n_j = 0, \tag{19.12}$$

которое представляет систему **трёх уравнений для четырёх неизвестных** n_i и λ, соответствующих каждому главному направлению. В развёрнутой записи система, которую следует решить, имеет вид

$$\begin{aligned} (T_{11} - \lambda) n_1 + T_{12} n_2 + T_{13} n_3 &= 0 \\ T_{21} n_1 + (T_{22} - \lambda) n_2 + T_{23} n_3 &= 0 \\ T_{31} n_1 + T_{32} n_2 + (T_{33} - \lambda) n_3 &= 0 \end{aligned} \tag{20.12}$$

Это однородная система уравнений, поэтому при любом λ существует тривиальное решение $n_i = 0$, но наша цель состоит в том, чтобы получить **нетривиальное решение**, то есть отличное от нуля. Кроме того, не теряя общности, можно ограничится только решениями, для которых $n_i n_i = 1$ (это значит, что $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, что справедливо, так как с самого начала вектор n_i **предполагался единичным**). Для того, чтобы система (19.12) или, что то же самое (20.12), имела нетривиальное решение, определитель из коэффициентов должен быть равен нулю, что можно записать так:

$$\left|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}\right| = 0. \qquad (21.12)$$

В развёрнутом виде это кубическое уравнение относительно λ:

$$\lambda^3 - \mathrm{I}_T\lambda^2 + \mathrm{II}_T\lambda - \mathrm{III}_T = 0, \qquad (22.12)$$

которое является **характеристическим уравнением** тензора T_{ij}, а его скалярные коэффициенты соответственно равны

$$\mathrm{I}_T = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}\ (= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \mathrm{inv} \qquad (23.12)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_T &= \frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}\right) = \\ &= \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{21} \\ T_{12} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{31} \\ T_{13} & T_{33} \end{vmatrix} (= \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) = \mathrm{inv}\end{aligned} \qquad (24.12)$$

$$\mathrm{III}_T = \det T_{ij} = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} (= \lambda_1\lambda_2\lambda_3) = \mathrm{inv} \qquad (25.12)$$

называются соответственно **первым, вторым и третьим инвариантами** тензора T_{ij}. Три корня кубического уравнения (20.12), обозначенные $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, называются **главными значениями** тензора T_{ij}. У симметричного тензора с действительными компонентами **главные значения действительны**; если все они различны, то **три главных направления взаимно ортогональны**. В **главных осях** таблица из компонент тензора приводится к диагональной форме

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \qquad (26.12)$$

Замечание 4.12 Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то диагональный вид тензора не зависит от выбора осей, соответствующих λ_1 и λ_2, и нужно установить только **главную ось**, соответствующую λ_3.

Замечание 5.12 Если все **главные значения равны**, то любое направление является **главным.**

Если главные значения упорядочены, то их принято обозначать $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III}$ и располагать в порядке убывания: $\lambda_I > \lambda_{II} > \lambda_{III}$.

Преобразование системы $Ox_1x_2x_3$ к системе **главных осей** $Ox_1^*x_2^*x_3^*$ даётся элементами таблицы

	x_1	x_2	x_3
x_1^*	$a_{11} = n_1^{(1)}$	$a_{12} = n_2^{(1)}$	$a_{13} = n_3^{(1)}$
x_2^*	$a_{21} = n_1^{(2)}$	$a_{22} = n_2^{(2)}$	$a_{23} = n_3^{(2)}$
x_3^*	$a_{31} = n_1^{(3)}$	$a_{32} = n_2^{(3)}$	$a_{33} = n_3^{(3)}$

где $n_i^{(j)}$ - направляющие косинусы j - того главного направления.

Пример 1.12 Найти **главные направления** и **главные значения** декартова тензора Т второго ранга, который представлен матрицей

$$[T_{ik}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Решение. Для определения **главных значений** необходимо решить уравнение

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)[(3-\lambda)^2 - 1] = 0$$

Это кубическое уравнение

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$$

Но совершенно очевидно, что один корень известен $\lambda_1 = 1$. Поделив кубическое уравнение на $\lambda - 1$, получим

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

Это квадратное уравнение имеет два корня

$$\lambda_{2,3} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\left[\frac{(-6)}{2}\right]^2 - 8} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$$

$$\lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4$$

Замечание 6.12. Здесь использовано квадратное уравнение вида $x^2 + px + q = 0$, решение которого равно $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Таким образом, найдены все три **главные значения** $\lambda_1 = 1$ $\lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 4$

Определение главных направлений.

а) Пусть n_i^1 - **компоненты единичного вектора главного направления** , соответствующего $\lambda_1 = 1$. Тогда два первых уравнения системы

$$\begin{aligned} &(3-\lambda)n_1^1 - n_2^1 + 0\cdot n_3^1 = 0 \\ &-n_1^1 + (3-\lambda)n_2^1 + 0\cdot n_3^1 = 0 \\ &0\cdot n_1^1 + 0\cdot n_2^1 + (1-\lambda)n_3^1 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2n_1^1 - n_2^1 + 0\cdot n_3^1 = 0 \\ -n_1^1 + 2n_2^1 + 0\cdot n_3^1 = 0 \\ 0\cdot n_1^1 + 0\cdot n_2^1 + 0\cdot n_3^1 = 0 \end{cases}$$

дают $2n_1^1 - n_2^1 = 0,\ -n_1^1 + 2n_2^1 = 0,$ откуда $n_1^1 = n_2^1 = 0,$ а из условия $n_i n_i = 1$ получим $n_3^1 = \pm 1.$

б) Для $\lambda_2 = 2,$ система уравнений (4) имеет вид

$$\begin{aligned} &(3-\lambda)n_1^2 - n_2^2 + 0\cdot n_3^2 = 0 \\ &-n_1^2 + (3-\lambda)n_2^2 + 0\cdot n_3^2 = 0 \\ &0\cdot n_1^2 + 0\cdot n_2^2 + (1-\lambda)n_3^2 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} n_1^2 - n_2^2 + 0\cdot n_3^2 = 0 \\ -n_1^2 + n_2^2 + 0\cdot n_3^2 = 0 \\ 0\cdot n_1^2 + 0\cdot n_2^2 - n_3^2 = 0 \end{cases}$$

даёт $n_1^2 - n_2^2 = 0,\ -n_1^2 + n_2^2 = 0,$ и $-n_3^2 = 0.$ Таким образом, $n_3^2 = 0,$ а $n_1^2 = n_2^2 = \pm 1/\sqrt{2}$, так как $n_i n_i = 1$.

в) Для $\lambda_3 = 4$ из системы

$$\begin{aligned} &(3-\lambda)n_1^3 - n_2^3 + 0\cdot n_3^3 = 0 \\ &-n_1^3 + (3-\lambda)n_2^3 + 0\cdot n_3^3 = 0 \\ &0\cdot n_1^3 + 0\cdot n_2^3 + (1-\lambda)n_3^3 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -n_1^3 - n_2^3 + 0\cdot n_3^3 = 0 \\ -n_1^3 - n_2^3 + 0\cdot n_3^3 = 0 \\ 0\cdot n_1^3 + 0\cdot n_2^3 - 3n_3^3 = 0 \end{cases}$$

получаем $-n_1^3 - n_2^3 = 0$, $-n_1^3 - n_2^3 = 0$ $3n_3^3 = 0$. Таким образом, $n_3^3 = 0$, а $n_1^3 = n_2^3 = \mp 1/\sqrt{2}$.

Ориентация главных осей $x_i^{'}$ относительно исходной системы x_i определяются **направляющими косинусами**, которые даны в следующей таблице

	x_1	x_2	x_3
$x_1^{'}$	0	0	± 1
$x_2^{'}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	0
$x_3^{'}$	$\mp 1/\sqrt{2}$	$\pm 1/\sqrt{2}$	0

Ответ Из таблицы видно, что **матрица преобразования** такова:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \pm 1 \\ \pm 1/\sqrt{2} & \pm 1/\sqrt{2} & 0 \\ \pm 1/\sqrt{2} & \pm 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Степени тензора второго ранга. Соотношения Гамильтона –Кэли

Непосредственным **матричным умножением** квадрат тензора T_{ij} получается как **внутреннее** произведение $T_{ik}T_{kj}$, куб – как произведение $T_{ik}T_{km}T_{mj}$ и т.д. Таким образом, если T_{ij} представлен в диагональной форме (26.12), то n-я степень этого тензора (и соответствующей матрицы) даётся формулой

$$(\mathrm{T})^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} \text{ или } T^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} \qquad (27.12)$$

Замечание 7.12 Сравнение (26.12) и (27.12) показывает, что тензор T_{ij} и все его целые степени имеют **одни и те же главные оси**.

Все главные значения удовлетворяют уравнению (22.12), а матрица T^n имеет **диагональный вид** (27.12), поэтому сам тензор *T* будет удовлетворять уравнению (22.12). Таким образом,

$$T^3 - \mathrm{I}_T T^2 + \mathrm{II}_T T - \mathrm{III}_T E = 0 \qquad (28.12)$$

где Е – единичная матрица. и

Определение 5.12 Соотношение (28.12) называется **соотношением Гамильтона – Кэли.**

Если умножить каждый член соотношения (28.12) на *T* по **правилу перемножения матриц, то получается** равенство

$$T^4 = \mathrm{I}_T T^3 - \mathrm{II}_T T^2 + \mathrm{III}_T T \qquad (29.12)$$

Подставляя T^3 из (28.12), получают

$$T^4 = (\mathrm{I}_T^2 - \mathrm{II}_T)T^2 + (\mathrm{III}_T - \mathrm{I}_T \mathrm{II}_T)T + \mathrm{I}_T \mathrm{III}_T E \qquad (30.12)$$

Замечание 8.12 Продолжая эту процедуру, можно получить **все целые положительные степени** *T* в виде линейных комбинаций T^2, *T* и *E*.

§ 13. Ковариантное дифференцирование тензоров

Ковариантный дифференциал тензора

Рассмотрим выражение **дифференциала вектора a** через дифференциалы его компонент. В декартовой системе координат имеем

$$d\mathbf{a} = d(a_l \mathbf{i}_l) = \mathbf{i}_l da_l. \qquad (1.13)$$

Замечание 1.13 В декартовых координатах (**и только в декартовых координатах**) **векторный базис одинаков** для всех точек пространства, поэтому для **любого** базисного вектора $d\mathbf{i}_l = 0$.

В системе **обобщённых координат** векторный базис ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) является локальным, так что каждый базисный вектор является вектор – **функцией обобщённых координат** x^1, x^2, x^3, то есть, векторы основного и взаимного базиса имеют вид

$$\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(x^1, x^2, x^3); \quad \mathbf{e}^i = \mathbf{e}^i(x^1, x^2, x^3) \tag{2.13}$$

Отсюда получается

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{a} &= \mathrm{d}(a_l\mathbf{e}^l) = \mathbf{e}^l \mathrm{d}a_l + a_l \mathrm{d}\mathbf{e}^l, \\ \mathrm{d}\mathbf{a} &= \mathrm{d}(a^l\mathbf{e}_l) = \mathbf{e}_l \mathrm{d}a^l + a^l \mathrm{d}\mathbf{e}_l. \end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

Таким образом, **абсолютный** дифференциал вектора, кроме части, отражающей **изменение компонент вектора** при переходе от точки к точке, содержит ещё часть $a_l d\mathbf{e}^l$, $a^l d\mathbf{e}_l$, связанную с тем, что **базис** введённой системы координат также **меняется от точки к точке.**

Ковариантная производная вектора

Так как

$$\mathrm{d}\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^k}\mathrm{d}x^k \ , \tag{4.13}$$

то на основании (20.13) частная производная вектора **a** по обобщённой координате x^k должна иметь вид

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^k} = \frac{\partial a_l}{\partial x^k}\mathbf{e}^l + a_l \frac{\partial \mathbf{e}^l}{\partial x^k} = \frac{\partial a^l}{\partial x^k}\mathbf{e}_l + a^l \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial x^k} \tag{5.13}$$

Определение 1.13 Компоненты (ко- и контравариантные) этих векторов $\dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^k}$ (k =1,2,3) образуют девять величин, совокупность которых называют **ковариантной** (абсолютной) производной (ковариантного или контравариантного) вектора..

Для совокупности **ковариантных** компонент вектора $\dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^k}$ вводят обозначения (с точкой с запятой)

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^k}\mathbf{e}_i \equiv a_{i\,;\,k} \tag{6.13}$$

которые называют **ковариантной производной ковариантного вектора**.

Совокупность **контравариантных** компонент векторов $\dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^k}$ обозначают через $a^i{}_{;\,k}$, то есть

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^k}\mathbf{e}^{\boldsymbol{i}} \equiv a^i{}_{;\,k} \tag{7.13}$$

и называют **ковариантной производной контравариантного вектора.**

Замечание 2.13 В дальнейшем будет показано, что $a_{i;k}$ и $a^i{}_{;k}$ являются компонентами тензора 2 – го ранга.

Символы дифференцирования в тензорном исчислении.

Символы Кристоффеля 2-го рода $\boldsymbol{\Gamma}^i_{jk}$

Найдём **явное** выражение **ковариантных производных** через компоненты векторного поля.

В соответствии с определением из (6.13) получим

$$\left.\begin{aligned} a_{i;k} &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^k}\mathbf{e}_i = \frac{\partial a_i}{\partial x^k} + a_j \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^k}\cdot \mathbf{e}_i, \\ a^i{}_{;k} &= \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x^k}\mathbf{e}^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^k} + a^j \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k}\cdot \mathbf{e}^i. \end{aligned}\right\} \tag{8.13}$$

Учитывая. что компоненты $g_i^{\cdot j} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j$ либо равны нулю, либо единице, получим

$$\frac{\partial}{\partial x^k}\cdot(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j) = 0 \tag{9.13}$$

(как производные константы).

Отсюда из (9.13), дифференцируя, получают $\mathbf{e}_i \dfrac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^k} + \mathbf{e}^j \dfrac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} = 0$, а отсюда

$$\mathbf{e}_i \frac{\partial \mathbf{e}^j}{\partial x^k} = -\mathbf{e}^j \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} \tag{10.13}$$

Вводится обозначение

$$\boldsymbol{\Gamma}^i_{jk} = \mathbf{e}^i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} \tag{11.13}$$

Определение 2.13 Величины $\boldsymbol{\Gamma}^i_{jk} = \mathbf{e}^i \cdot \dfrac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k}$ (их всего 27 в трёхмерном пространстве) носят название **символов Кристоффеля 2 – го рода**. $\boldsymbol{\Gamma}^i_{jk}$

Тогда в силу (10.13) и (11.13) формулы (8.13) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} a_{i;k} &= \frac{\partial a_i}{\partial x^k} - a_j \boldsymbol{\Gamma}^j_{ik}, \\ a^i{}_{;k} &= \frac{\partial a^i}{\partial x^k} + a^j \boldsymbol{\Gamma}^i_{jk}. \end{aligned}\right\} \tag{12.13}$$

Из этих формул следует, что **абсолютная** (**ковариантная**) **производная** векторного поля учитывает не только скорость изменения самого поля, как такового при перемещении вдоль координатных линий (члены $\dfrac{\partial a_i}{\partial x^k}$, $\dfrac{\partial a^i}{\partial x^k}$), но также и скорость изменения локального базиса (вторые члены в (12.13)).

Замечание 3.13. Если **локальный базис не меняется** от точки к точке (декартовы системы координат), то из (12.13) следует, что **все символы Кристоффеля** второго рода **равны нулю**. В этом случае **ковариантные производные** обращаются в наборы **частных производных** компонент по координатам.

Замечание 4.13. Таким образом, слагаемые $-a_j\boldsymbol{\Gamma}^j_{ik}$ и $+a^j\boldsymbol{\Gamma}^i_{jk}$ обязаны своим происхождением исключительно введением **местного подвижного координатного базиса**. Поэтому символы Кристоффеля должны выражаться через производные от компонент **метрического** тензора ($\mathbf{e}^j\cdot\mathbf{e}^k = g^{jk}$, $g_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j$, $\mathbf{e}^j\cdot\mathbf{e}_k = \delta^j_k$). Их явное выражение получается так:

$$\mathbf{e}_i\boldsymbol{\Gamma}^i_{jk} = \frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial x^k} \qquad (13.13)$$

Замечание 5.13 Таким образом, символы Кристоффеля 2 – го рода $\boldsymbol{\Gamma}^i_{jk}$ являются **коэффициентами разложения векторов** $\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial x^k}$ по векторам **основного** базиса.

Символы Кристоффеля 1-го рода $\boldsymbol{\Gamma}_{i,jk}$

Замечание 6.13 Символы Кристоффеля 1-го рода $\boldsymbol{\Gamma}_{i,jk}$ являются **коэффициентами разложения векторов** $\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial x^k}$ по векторам **взаимного** базиса, то есть

$$\mathbf{e}^i\,\boldsymbol{\Gamma}_{i,jk} = \frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial x^k} \qquad (14.13)$$

Из (14.13) получается

$$\boldsymbol{\Gamma}_{i,jk} = \mathbf{e}_i\,\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial x^k} \qquad (15.13)$$

Связь между символами Кристоффеля 1-го и 2 –го рода

Эта связь получается в виде

$$\boldsymbol{\Gamma}_{i,jk} = g_{il}\boldsymbol{\Gamma}^l{}_{jk} \text{ и } \boldsymbol{\Gamma}^l{}_{jk} = g^{il}\boldsymbol{\Gamma}_{l,jk} \qquad (16.13)$$

(Здесь использовано правило поднятия и опускания индексов)

Определение 3.13 Величины $\boldsymbol{\Gamma}_{i,jk} = \mathbf{e}_i\,\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial x^k}$ (их всего 27 в трёхмерном пространстве) носят название **символов Кристоффеля 1 – го рода**.

Замечание 7.13 В силу того, что векторы **локального** базиса равны $\mathbf{e}_i = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q^i}$, легко получить

$$\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^k}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^k} = \frac{\partial\mathbf{e}_k}{\partial x^j} \qquad (17.13)$$

Из определений (11.13) и (15.13) следует, что **символы Кристоффеля ! –го рода симметричны по двум нижним индексам** (у $\Gamma_{i,jk}$ эти индексы отделены запятой), то есть

$$\boldsymbol{\Gamma}_{i,jk} = \boldsymbol{\Gamma}_{i,kj} : \quad \boldsymbol{\Gamma}^l{}_{jk} = \boldsymbol{\Gamma}^l{}_{kj} \qquad (18.13)$$

Тогда, учитывая симметрию $\boldsymbol{\Gamma}_{i,jk}$ по j и k и из свойства (17.13), получают

$$\mathbf{\Gamma}_{i,jk} = \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k} + \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^j} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) + \frac{\partial}{\partial x^j}(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k) - \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^k} - \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial x^j} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial x^i} - \mathbf{e}_k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^i} \right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial}{\partial x^i}(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_j) \right)$$

Таким образом, окончательно получается

$$\mathbf{\Gamma}_{i,jk} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} \right) = \mathbf{\Gamma}_{i,kj}, \tag{19.13}$$

$$\mathbf{\Gamma}^i_{jk} = g^{il}\mathbf{\Gamma}_{l,jk} = \mathbf{\Gamma}^i_{kj} \tag{20.13}$$

Замечание 8.13 Символы Кристоффеля 1 –го рода не являются тензорами.

Это следует из закона преобразования символов Кристоффеля при изменении пространственной системы координат (в системе обобщённых координат $\dfrac{\partial x^k}{\partial x'^l} = \alpha^k_{i'}$):

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Gamma}'_{i,jk} &= \mathbf{e}'_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{e}'_j}{\partial x'^k} = \alpha^l_{i'}\mathbf{e}_l \cdot \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\mathbf{e}_n \alpha^n_{j'}\right)\frac{\partial x^m}{\partial x'^k} = \\
&= \alpha^l_{i'}\alpha^m_{k'}\alpha^n_{j'}\mathbf{e}_l \frac{\partial \mathbf{e}_n}{\partial x^m} + \alpha^l_{i'}\alpha^m_{k'}\left(\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_n\right)\frac{\partial \alpha^n_{j'}}{\partial x^m} = \\
&= \alpha^l_{i'}\alpha^m_{k'}\alpha^n_{j'}\mathbf{\Gamma}_{l,nm} + \alpha^l_{i'}\alpha^m_{k'}\frac{\partial \alpha^n_{j'}}{\partial x^m} g_{ln}
\end{aligned} \tag{21.13}$$

Аналогично имеем

$$\mathbf{\Gamma}'^i_{jk} = \alpha^{i'}_l \alpha^m_{k'}\alpha^n_{j'}\mathbf{\Gamma}^l_{nm} + \alpha^{i'}_n \alpha^m_{k'}\frac{\partial \alpha^n_{j'}}{\partial x^m} \tag{22.13}$$

Отсюда следует, что **символы Кристоффеля 2 –го рода тоже не являются тензорами**.

Замечание 9.13 Ковариантные производные вектора являются компонентами тензора второго рода.

Действительно, учитывая (22.13)[1]

---

[1] Здесь было использовано соотношение $\alpha^{j'}_r \dfrac{\partial \alpha^n_{j'}}{\partial x^m} = -\alpha^n_{j'}\dfrac{\partial \alpha^{j'}_r}{\partial x^m}$, которое получается при дифференцировании выражения $\alpha^{j'}_r \alpha^n_{j'} = g^n_r$ (см. Метрический тензор).

$$b'_{i\,;k}=\frac{\partial b'_i}{\partial x'^k}-b'_j\boldsymbol{\Gamma}'^j_{i\,k}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\alpha^l_{i'}b_l\right)\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}-\alpha^r_{j'}b_r\left(\alpha^{j'}_n\alpha^m_{k'}\alpha^l_{i'}\boldsymbol{\Gamma}^n_{l\,m}+\alpha^{j'}_n\alpha^m_{k'}\frac{\partial\alpha^n_{i'}}{\partial x^m}\right)=$$

$$=\alpha^l_{i'}\alpha^m_{k'}\frac{\partial b_l}{\partial x^m}+b_l\alpha^m_{k'}\frac{\partial\alpha^l_{i'}}{\partial x^m}-\alpha^r_{j'}b_r\alpha^{j'}_n\alpha^m_{k'}\alpha^l_{i'}\boldsymbol{\Gamma}^n_{l\,m}-\alpha^r_{j'}b_r\alpha^{j'}_n\alpha^m_{k'}\frac{\partial\alpha^n_{i'}}{\partial x^m}= \qquad (23.13)$$

$$=\alpha^l_{i'}\alpha^m_{k'}\frac{\partial b_l}{\partial x^m}+b_l\alpha^m_{k'}\frac{\partial\alpha^l_{i'}}{\partial x^m}-\alpha^r_{j'}b_r\alpha^{j'}_n\alpha^m_{k'}\alpha^l_{i'}\boldsymbol{\Gamma}^n_{l\,m}-b_n\alpha^m_{k'}\frac{\partial\alpha^n_{i'}}{\partial x^m}=$$

$$=\alpha^l_{i'}\alpha^m_{k'}\frac{\partial b_l}{\partial x^m}-b_n\alpha^m_{k'}\alpha^l_{i'}\boldsymbol{\Gamma}^n_{l\,m}=\alpha^l_{i'}\alpha^m_{k'}\left\{\frac{\partial b_l}{\partial x^m}-b_n\boldsymbol{\Gamma}^n_{l\,m}\right\}=\alpha^l_{i'}\alpha^m_{k'}b_{l;m}\,.$$

Таким образом, величины $b'_{i\,;k}$ преобразуются как **ковариантные компоненты тензора** второго ранга, а величины $b'^{\,i}_{;k}$ - как **смешанные компоненты**, которые аналогично получаются (без подробностей предыдущего вывода)

$$b'^{\,i}_{;k}=\frac{\partial b'^i}{\partial x'^k}+b'^j\boldsymbol{\Gamma}'^i_{j\,k}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\alpha^{i'}_l b^l\right)\frac{\partial x^m}{\partial x'^k}+\alpha^{j'}_r b^r\left(\alpha^{i'}_l\alpha^m_{k'}\alpha^n_{j'}\boldsymbol{\Gamma}^l_{n\,m}+\alpha^{i'}_n\alpha^m_{k'}\frac{\partial\alpha^n_{j'}}{\partial x^m}\right)= \qquad (24.13)$$

$$=\alpha^{i'}_l\alpha^m_{k'}\left\{\frac{\partial b^l}{\partial x^m}+b^n\boldsymbol{\Gamma}^l_{n\,m}\right\}=\alpha^{i'}_l\alpha^m_{k'}b^l_{;m}\,.$$

Замечание 10.13 Из определений (22.13) и (13.13), учитывая, что $\mathbf{e}^i=g^{i\,l}\mathbf{e}_l$, следуют соотношения

$$b_{i;k}=g_{i\,l}b^l_{;k};\quad b^i_{;k}=g^{\,il}\,b_{l;k}; \qquad (25.13)$$

Определение 4.13 Величины $b_{i;k}$, и $b^l_{;k}$ являются компонентами (**ковариантными и смешанными**) **одного и того же тензора**, который и называется **абсолютной (ковариантной) производной вектора.**

Теорема 1.13 Если $T_{i_1i_2\ldots i_n}(\mathbf{r})$ - тензорное поле n-го ранга, то величина $\partial/\partial x_i\, T_{i_1i_2\ldots i_n}$ есть тензорное поле $n+1$-го ранга.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при переходе из системы координат x_i к x'_i справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}T_{i_1i_2\ldots i_n}\right)'=\frac{\partial}{\partial x'_i}T'_{i_1i_2\ldots i_n}\,. \qquad (27.13)$$

При повороте $x'_i=\sum_{j=1}^{n}u_{i\,j}x_i\quad (i=1,2,3)$. Отсюда в силу условия (знак $\forall$ - означает «**для любого**»)

$$\sum_{i=1}^{n} u_{ij}u_{ik} = \sum_{i=1}^{n} u_{ji}u_{ki} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \forall\ j = k \\ 0, & \forall\ j \neq k \end{cases} \tag{28.13}$$

следует, что

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} u_{ij}x'_i \text{ или } \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} = u_{ij}. \tag{29.13}$$

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x'_i}\frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}. \tag{30.13}$$

Замечание 11.13 В равенстве (26.13) предполагается, что все $x'_j\ (j \neq i)$ и $x_i\ (i \neq j)$ **фиксированы.**

Теперь видно, что величина $\partial/\partial x_i\, T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ преобразуется как тензор $n+1$-го ранга, а именно

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{j, j_1, j_2, \ldots, j_n} u_{ij}u_{i_1 j_1} \ldots u_{i_n j_n} \frac{\partial}{\partial x_i} T'_{j_1 j_2 \ldots j_n}, \tag{31.13}$$

а число компонент такого тензора равно 3^{n+1}. Тем самым данная **теорема доказана.**
Из этой теоремы вытекают **следующие следствия**:
1$^{\text{ое}}$ следствие. Если $\mathbf{\Phi(r)}$ - скаляр, то $\partial\Phi/\partial x_i$ - компоненты вектора $(i = 1,2,3)$. Этот вектор **называется градиентом скалярного поля $\mathbf{\Phi(r)}$**, и его **компоненты** градиента обозначаются как

$$(\nabla\Phi)_i \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \equiv (\text{grad}\Phi)_i. \tag{32.13}$$

∇ (**«набла»**) - **градиент** (**оператор Гамильтона**)

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{33.13}$$

2$^{\text{ое}}$ следствие. Если $\mathbf{A}$ - вектор, то $\sum_{i=1}^{n} \partial A_i/\partial x_i$ есть скаляр, который является **дивергенцией** вектора $\mathbf{A}$

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{div}\mathbf{A}. \tag{34.13}$$

3$^{\text{ье}}$ следствие. Величины

$$\sum_{i,k} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_i} \equiv (\nabla \times \mathbf{A})_i \equiv (\text{rot}\,\mathbf{A})_i \tag{35.13}$$

представляют собой **компоненты вектора** $(i = 1,2,3)$. Вектор $\nabla \times \mathbf{A}$ - **ротор** (вихрь) .
4$^{\text{ое}}$ следствие. Величина

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2} \equiv \Delta\Phi = \nabla^2\Phi \tag{36.13}$$

есть скаляр – **лапласиан скалярной функции** Ф.
5$^{\text{ое}}$ следствие. Величины

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} A_i \equiv (\Delta\mathbf{A})_i \equiv \left(\nabla^2\mathbf{A}\right)_i \tag{37.13}$$

суть **компоненты вектора**, который называется **лапласианом векторной функции A**.

Доказательство тождеств, связывающих приведенные величины.

Тождество 1.

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A})=0\quad\forall\,\mathbf{A}. \tag{38.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\sum_{i,j,k}\frac{\partial}{\partial x_i}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}A_k=\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i\partial x_j}=-\sum_{i,j,k}\varepsilon_{jik}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i\partial x_j}=-\sum_{i,j,k}\varepsilon_{jik}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j\partial x_i}=$$

$$=-\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_j\partial x_i}=-\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i\partial x_j}.$$

(здесь используется преобразование индексов суммирования). Отсюда видно, что

$$\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i\partial x_j}=-\sum_{i,j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i\partial x_j}=0$$

что и доказывает тождество (38.13)

Тождество 2.

$$\nabla\times(\nabla\Phi)=0\quad\forall\,\Phi. \tag{39.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично предыдущему

$$[\nabla\times(\nabla\Phi)]_i=\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial\Phi}{\partial x_k}=\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k}=-\sum_{j,k}\varepsilon_{ikj}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k}=$$

$$=-\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_k\partial x_j}=-\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_j\partial x_k}=0.$$

Тождество 3.

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2\mathbf{A}. \tag{40.13}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})]_i=\sum_{j,k}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\times\mathbf{A})_k=\sum_{j,k,l,m}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm}\frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j\partial x_l}.$$

Из задачи 5.7 известно, что $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq}=\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}$; Так как равенство $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq}=\delta_{ip}\delta_{jq}-\delta_{iq}\delta_{jp}$; справедливо при любых значениях индексов, то его можно применить векторно – векторному произведению.

Следовательно,

$$[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})]_i=\sum_{j,l,m}\left(\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}\right)\frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j\partial x_l}.=$$

$$\sum_{j,l,m}\delta_{il}\delta_{jm}\frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j\partial x_l}.-\sum_{j,l,m}\delta_{im}\delta_{jl}\frac{\partial^2 A_m}{\partial x_j\partial x_l}=$$

$$=\sum_{j,l,m}\delta_{il}\frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{jm}\frac{\partial}{\partial x_j}A_m.-\sum_{j,l,m}\delta_{im}\frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{jl}\frac{\partial}{\partial x_j}A_m$$

$$\sum_m\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m.-\sum_l\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}\delta_{im}A_m=\sum_m\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_l}A_m.-\sum_l\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_l}A_i$$

Очевидно, что

$$\left[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{A})\right]_i=\frac{\partial}{\partial x_i}(\nabla\cdot\mathbf{A})-\nabla^2 A_i\,,$$

что и доказывает тождество (40.13)

Ковариантная производная тензора

Естественным обобщением формул для **ковариантной производной вектора** является определение **ковариантного дифференцирования тензора 2 –го ранга**.

$$\left.\begin{aligned}T_{ik;l}&=\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^l}-T_{mk}\mathbf{\Gamma}^m_{il}-T_{im}\mathbf{\Gamma}^m_{kl},\\ T^{ik}_{\ \ ;l}&=\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^l}+T^{mk}\mathbf{\Gamma}^i_{ml}+T^{im}\mathbf{\Gamma}^k_{ml},\\ T^i_{\cdot k;l}&=\frac{\partial T^i_{\cdot k}}{\partial x^l}+T^m_{\cdot k}\mathbf{\Gamma}^i_{ml}-T^i_{\cdot m}\mathbf{\Gamma}^m_{kl},.\end{aligned}\right\}\qquad(45.13)$$

Можно показать, что эти величины преобразуются при изменении системы координат, как **соответствующие компоненты тензора 3 –го ранга** ($T_{ik;l}$ - как **ковариантные компоненты**, $T^{ik}_{;l}$ - как **смешанные - дважды контравариантные**, один раз ковариантные и т.д.)

Правила дифференцирования тензоров.

Правило 1. Ковариантные производные тензора любого ранга определяются так: **первое слагаемое** – это **частные производные компонент тензора** по координатам; **остальные слагаемые** (их **число равно рангу** тензора) являются суммами из **компонент тензора и символов Кристоффеля 1 – го рода**, причём индексом суммирования являются поочерёдно индексы компонент тензора и противоположный (верхний или нижний – в зависимости от «немого» индекса тензора) индекс символов Кристоффеля. Эти последние слагаемые входят **с минусом**, если «немой» индекс компонент тензора является **ковариантным** (нижним), и **с плюсом** – если «немой» индекс у тензора - **контравариантный** (верхний)

Пример 1.13

$$\lambda^{..l}_{ik;m}=\frac{\partial\lambda^{..l}_{ik}}{\partial x^l}-\lambda^{..l}_{nk}\mathbf{\Gamma}^n_{im}-\lambda^{..l}_{in}\mathbf{\Gamma}^n_{km}+\lambda^{..n}_{ik}\mathbf{\Gamma}^l_{nm}$$

Правило 2 Ковариантная производная от тензора n **-го ранга** является тензором $n+1$ -го ранга (см. теорему 1.13).

Замечание 13.13 Ковариантная производная тензора **нулевого** ранга (скаляра) совпадает с частными производными по координатам

$$f_{;i}=\frac{\partial f}{\partial x^i}\,.$$

Ковариантная производная от **скаляра** является **ковариантным вектором (ковариантные компоненты градиента** скаляра)

Правило 3. **Ковариантная производная суммы** равна сумме производных

$$(A_{ik}+B_{ik})_{;l}=A_{ik;l}+B_{ik;l}\qquad(46.13)$$

Правило 4. Ковариантная производная произведения равна

$$(A_{ik}B_{mn})_{;l}=A_{ik;l}B_{mn}+A_{ik}B_{mn;l}\qquad(47.13)$$

Теорема Риччи.

Ковариантная производная метрического тензора равна нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о**.** Согласно (19.13) и (20.13), имеем

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - g_{im}\mathbf{\Gamma}^m_{kl} - g_{mk}\mathbf{\Gamma}^m_{il} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \mathbf{\Gamma}_{i,kl} - \mathbf{\Gamma}_{k,il} =$$

$$= \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}\right) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. **из теоремы Риччи.**

Из теоремы Риччи выводится **часто используемое соотношение**

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \mathbf{\Gamma}_{i,kl} + \mathbf{\Gamma}_{k,il}\cdot, \qquad (48.13)$$

Замечание 14.13 Аналогично показывают, что

$$g^{ik}_{;l} = 0 \qquad (49.13)$$

Факт **равенства нулю ковариантной производной от метрического тензора** позволяет обращаться с его компонентами **как с постоянными при ковариантном дифференцировании**. Отсюда справедливы, например, соотношения

$$g_{il}A^l_{;k} = (g_{il}A^l)_{;k} = A_{i;k}$$

$$g_{il}T^{lm}_{;k} = (g_{il}T^{lm})_{;k} = T^{.m}_{i;k}$$

$$T_{ik;l}g^{im}g^{kn} = (T_{ik}g^{im}g^{kn})_{;l} = T^{mn}_{;l}$$

Физические свойства, имеющие тензорный характер, могут меняться с течением времени от точки к точке в некоторой части пространства. Для этого рассматривается тензор-функция скалярного аргумента и радиуса - вектора точки:

$$T_{ik} = T_{ik}(\boldsymbol{r},t) \qquad (50.13)$$

Замечание 15.13 Предметом тензорного анализа является дифференцирование и интегрирование тензор - функций.

Рассмотренные выше **символы** сведены в таблицу 9 ПРИЛОЖЕНИЯ 2.

ГЛАВА 3. ВЕКТОРНЫЙ И ТЕНЗОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 14 Скалярные, векторные и тензорные поля

Скалярное поле

Определение 1.14 Скалярным полем называется часть пространства, каждой точке M (рис. 1.14) которого соответствует одно значение скалярной функции

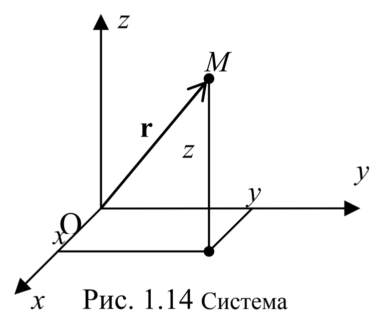


Рис. 1.14 Система координат

$$U = U(x, y, z)\,. \qquad (1.14)$$

Определение 2.14 Аналитически скалярное поле можно также описать с помощью радиуса – вектора точки M в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(x, y, z)$

$$U = U(\mathbf{r}) \qquad (2.14)$$

Определение 3.14 Геометрическими характеристиками скалярного поля являются **поверхности равного уровня** (рис. 2.14).

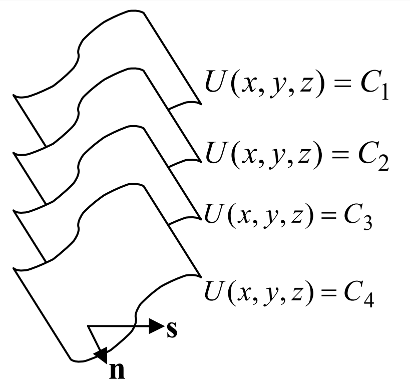


Рис. 2.14 Поверхности равного уровня

Уравнения поверхностей равного уровня являются функциями координат и константы

$$U(x, y, z) = C_i \qquad (3.14)$$

где C_i - константа i - той поверхности

Производная скалярной функции по направлению вектора s

Определение 4.14 Дифференциальной скалярной характеристикой скалярного поля является **производная скалярной функции по направлению вектора $\mathbf{s}$.**

Для того, чтобы получить производную по направлению, дадим приращение $\Delta\mathbf{s}$ вектору, выходящему из точки M_o (рис. 3.14). $\Delta\mathbf{s}$ можно представить в виде вектора $\Delta\mathbf{s} = \Delta x\,\mathbf{i} + \Delta y\,\mathbf{j} + \Delta z\,\mathbf{k}$. Приращение функции $U = U(x, y, z)$ обозначим ΔU и выразим через производные, учитывая связь приращения с производной функции ($\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\,\Delta x$). Тогда

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial U}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial U}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1\,\Delta x + \varepsilon_2\,\Delta y + \varepsilon_3\,\Delta z\,, \qquad (4.14)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ стремятся к нулю, когда $\Delta\mathbf{s} \to 0$. Разделим все члены равенства (4.14) на Δs

$$\frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\Delta z}{\Delta s} + \varepsilon_1\frac{\Delta x}{\Delta s} + \varepsilon_2\frac{\Delta y}{\Delta s} + \varepsilon_3\frac{\Delta z}{\Delta s} \qquad (5.14)$$

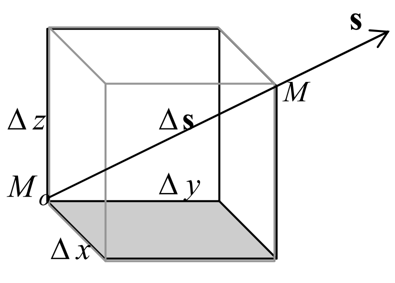


Рис. 3.14 Схема приращений координат

Из рис. 3.14 видно, что

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \cos\alpha, \quad \frac{\Delta y}{\Delta s} = \cos\beta, \quad \frac{\Delta z}{\Delta s} = \cos\gamma\,.$$

Тогда

$$\frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_3\cos\gamma \qquad (6.14)$$

Определение 5.14 Предел отношения $\dfrac{\Delta U}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$ называется **производной функции** $U = U(x, y, z)$ **в точке** $M(x, y, z)$ **по направлению вектора** $\mathbf{s}$ и обозначается $\dfrac{\partial U}{\partial s}$, то есть

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta s} = \frac{\partial U}{\partial s} \qquad (7.14)$$

Переходя к пределу в равенстве (6.14), получим

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma \qquad (8.14)$$

Замечание 1.14 Из формулы (8.14) видно, что, зная производные скалярной функции, можно найти производную по любому направлению $\mathbf{s}$.

Замечание 2.14 В данном случае берутся частные производные, потому что они имеют **разные** значения в зависимости от **направления.**

Градиент

Определение 6.14 Дифференциальной векторной характеристикой скалярного поля является **градиент**, который выражается формулой

$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (9.14)$$

Т е о р е м а 1.14 **Пусть дано скалярное поле** $U = U(x, y, z)$ **и в этом скалярном поле определено поле градиента** $\operatorname{grad} U$**. Производная** $\dfrac{\partial U}{\partial s}$ **по направлению некоторого вектора s равняется проекции вектора** $\operatorname{grad} U$ **на вектор s** (рис. 4.14) **.**

Рис. 4.14 Вектор градиента

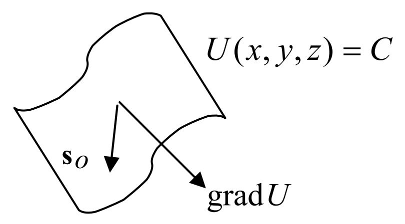


Рис. 4.14 К теореме 1.14

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим единичный вектор $\mathbf{s}_o$, соответствующий вектору $\mathbf{s}$

$$\mathbf{s}_o = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma \qquad (10.14)$$

Скалярное произведение $\operatorname{grad} U$ на $\mathbf{s}_o$:

$$\operatorname{gradU} \cdot \mathbf{s}_o = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma \qquad (11.14)$$

Выражение, стоящее в правой части (11.14), является производной функции U по вектору $\mathbf{s}$.

Отсюда

$$\operatorname{gradU} \cdot \mathbf{s}_o = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}} \qquad (12.14)$$

Если обозначить угол между $\operatorname{grad} U$ и $\mathbf{s}$ как φ, то можно записать скалярное произведение в виде

$$|\operatorname{gradU}| \cdot |\mathbf{s}_o| \cos\varphi = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}} \qquad (13.14)$$

Учитывая, что модуль единичного вектора равен единице, можно написать

$$|\operatorname{gradU}| \cdot \cos\varphi = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{s}}\ , \qquad (14.14)$$

а отсюда видно, что слева стоит **проекция градиента** функции U на вектор $\mathbf{s}$, что и требовалось доказать.

Замечание 3.14 Эта теорема устанавливает **связь** между **производной по направлению** и **градиентом** скалярной функции $U = U(x, y, z)$.

Замечание 4.14 Если учесть, что нормаль к поверхности $F(x, y, z) = 0$ (из курса аналитической геометрии) имеет вид

$$\mathbf{N} = \frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k},$$

то легко видеть, что градиент $\mathrm{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x} i + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}$ является вектором, направленным по нормали к поверхности равного уровня $U(x, y, z) = C$. (рис.4.14).

Векторное поле

Определение 7.14 Векторным полем называется часть пространства, каждой точке которого соответствует **одно значение** вектора $\mathbf{F}(x, y, z)$ (рис. 5.14).

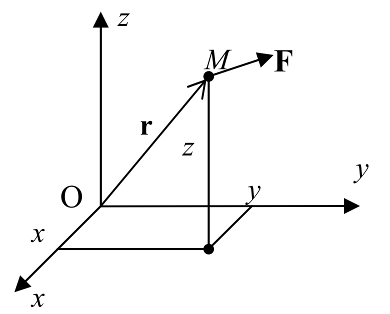


Рис. 5.14 К заданию векторного поля

Определение 8.14. Аналитически векторное поле можно описать в виде функции координат

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k} \qquad (15.14)$$

или радиуса вектора $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r})\,\mathbf{i} + Q(\mathbf{r})\,\mathbf{j} + R(\mathbf{r})\,\mathbf{k}$

Замечание 5.14 Если скалярное поле определяется одной функцией, то векторное поле определяют три функции координат: $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$.

Определение 9.14. Основными характеристиками векторного поля являются **поток, дивергенция, циркуляция, ротор**

Поток вектора

Рассмотрим поле вектора $\mathbf{F}(\mathbf{r})$, имеющего компоненты $P(\mathbf{r}), Q(\mathbf{r}), R(\mathbf{r})$.. Примерами векторных полей могут служить поле скоростей, поле ускорений, силовое поле (рис. 6.14).

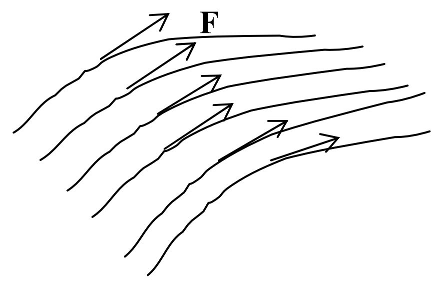


Рис. 6.14 Поток вектора **F**

Определение 10.14. Потоком векторного поля через поверхность называется поверхностный интеграл, взятый от скалярного произведения вектора поля $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ на вектор нормали:

$$\Pi = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \iint_S F_n\,d\sigma \qquad (16.14)$$

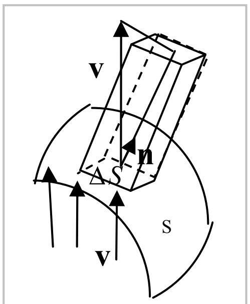


Рис. 7.14 Элемент потока

Для того, чтобы представить себе **физический смысл** этого выражения, рассмотрим рис. 7.14. Если векторное поле представляет собой поле скоростей жидкости $\mathbf{v}$, и если построить параллелепипед, высота которого равна проекции вектора скорости на нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S, а основание равно малому элементу площади поверхности ΔS, через которую. идёт поток вектора скорости, то объём этого параллелепипеда равен **объёму жидкости**, протекающей через элемент поверхности ΔS в одну секунду и равен

$\Delta V = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}\,\Delta S$. Если взять интеграл по поверхности, то получим количество жидкости, протекающей **в секунду** через эту поверхность.(расход)

Если обобщить этот интеграл на произвольное векторное поле $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$, то получится выражение (16.14)

Замечание 6.14 Если поверхность S **замкнута** и охватывает объём V, то количество жидкости, протекающей в секунду через поверхность S, равно **суммарной мощности источников и стоков**, находящихся в объёме V.

Определение 11.14 Пространственная область V, ограниченная двумя кусочно гладкими поверхностями Σ_1 и Σ_3, заданными в виде

$$z_1 = z_1(x, y) \text{ и } z_3 = z_3(x, y) \tag{17.14}$$

и боковой цилиндрической поверхностью Σ_2 с образующими, параллельными оси Oz, называются «z – **цилиндрической областью»** (рис. 8.14).

Поверхности $z_1 = z_1(x, y)$ и $z_3 = z_3(x, y)$ - это криволинейные основания (нижнее и верхнее) «z – цилиндрической области».

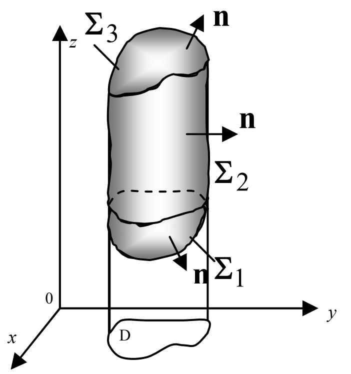


Рис. 8.14 К формуле Остроградского - Гаусса

Замечание 7.14 Аналогично можно построить «x - цилиндрическую» и « y – цилиндрическую» области.

Рассмотрим в интеграле $\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV$ третье слагаемое и преобразуем его к разности двойных интегралов, взятых по области D

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint\limits_{S_D} \left[\int\limits_{\Sigma_1}^{\Sigma_3} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right] dxdy = \iint\limits_{S_D} \left[R(x, y, z_3(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)) \right] dxdy =$$

$$= \iint\limits_{S_D} R(x, y, z_3(x, y))\, dxdy - \iint\limits_{S_D} R(x, y, z_1(x, y))\, dxdy$$

Первый из полученных интегралов можно свести к **поверхностному интегралу**, взятому по верхней поверхности Σ_3 с уравнением $z = z_3(x, y)$, а второй – по нижней поверхности Σ_3 с уравнением $z = z_1(x, y)$. Отсюда, с учётом направления внешней нормали к поверхностям $\boldsymbol{\Sigma}_1$ и Σ_3, можно записать

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint\limits_{\Sigma_3} R(x, y, z)\, dxdy + \iint\limits_{\Sigma_1} R(x, y, z)\, dxdy$$

где первый интеграл берётся по **верхней** стороне поверхности Σ_3, а второй по **нижней** стороне поверхности Σ_3. Прибавим такой же интеграл по поверхности Σ_2. Этот интеграл равен нулю, так как нормаль перпендикулярна оси z, в направлении которой берётся интеграл, то есть $\iint\limits_{\Sigma_2} R(x, y, z\, dxdy = 0$. Поэтому можно записать

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z} dV = \iint\limits_{\Sigma_3} R(x, y, z)\, dxdy + \iint\limits_{\Sigma_2} R(x, y, z)\, dxdy + \iint\limits_{\Sigma_1} R(x, y, z)\, dxdy =$$

$$= \oiint\limits_{\Sigma} R\, dxdy = \oiint\limits_{\Sigma} R \cos(\mathbf{n}, z)\, d\sigma$$

или

$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} R\cos(\mathbf{n},z)\,d\sigma$$

Аналогично получаются интегралы

$$\iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} R\cos(\mathbf{n},y)\,d\sigma,$$

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{\Sigma} R\cos(\mathbf{n},x)\,d\sigma$$

Отсюда можно записать

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV = \oint\!\!\!\oint\limits_S \left(P\cdot\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS \qquad (18.14)$$

где $\mathbf{F} = P\,\mathbf{i} + Q\,\mathbf{j} + R\,\mathbf{k}$, а $\mathbf{n} = \mathbf{i}\cos\alpha + \mathbf{j}\cos\beta + \mathbf{k}\cos\gamma$.

Это и есть формула Остроградского - Гаусса в координатной форме. Она **связывает тройной интеграл по замкнутой пространственной области с поверхностным интегралом**, взятом по внешней стороне поверхности, ограничивающей эту область.

Для вывода этого выражения в векторной форме введём понятие дивергенции векторного поля.

Замечание 8.14 Поток векторного поля является **скалярной** величиной.

Замечание 9.14 Если представить **векторное поле** как **поле скоростей** движущейся жидкости, то поток П выражает объём жидкости, протекающей через поверхность S в единицу времени. (**расход**).

Дивергенция

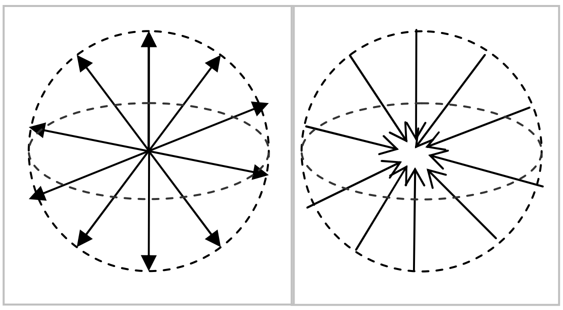


Рис. 9.14 Источник и сток

Определение 12.14 Дивергенцией векторного поля называется предел отношения потока П через замкнутую поверхность S к объёму V, ограниченного этой поверхностью, когда объём V стремится к нулю

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS}{V}$$

(за V принимаем бесконечно малый объём).

Т е о р е м а 2.14 **Если $\mathbf{F} = \mathrm{P}(x,y,z)\mathbf{i} + \mathrm{Q}(x,y,z)\mathbf{j} + \mathrm{R}(x,y,z)\mathbf{k}$ - векторное поле, определённое в области V и такое, что функции P,Q,R непрерывны в V вместе со всеми производными первого порядка, то $\operatorname{div}\mathbf{F}$ существует во всех точках этой области и в любой декартовой системе координат выражается формулой**

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \qquad (19.14)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой (18.14), которую представим в виде

$$\Pi = \iint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma = \oint\!\!\!\oint\limits_S \left(P\cdot\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma\right)dS = \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV$$

Тогда

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{V\to 0}\frac{\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV}{V}.$$

Производная в правой части существует и равна производной от интеграла $\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right) dV$ по объёму, которая по теореме о среднем для тройного интеграла равна $\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_A \cdot V$, где A – некоторая средняя точка в объёме V При стягивании объёма в точку получим, что $\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$, что и требовалось доказать.

Замечание 10.14 В **гамильтоновом** обозначении **дивергенция** представляет собой **скалярное произведение** оператора Гамильтона $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ на векторную функцию **F**

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k})\cdot(P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{k})=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\operatorname{div}\mathbf{F} \tag{20.14}$$

Подставляя (19.14) в формулу (18.14) и учитывая (16.14), можно поток выразить через дивергенцию следующим образом:

$$\Pi=\iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV=\iint\limits_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \tag{21.14}$$

Замечание 11.14 (21.14) - это **формула Остроградского – Гаусса в векторном виде.**

Замечание 12.14 Дивергенция векторного поля F является **дифференциальной скалярной характеристикой** векторного поля.

Расчётные формулы дивергенции имеют вид:

$$\operatorname{div}\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \quad \text{или} \quad \nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} \tag{22.14}$$

Замечание 13.14 Дивергенция выражает **интенсивность источника** (или **стока**) в точке $M(x,y,z)$ векторного поля (рис. 9.14).

Определение 13.14 Поток можно рассматривать как **суммарную мощность источников и стоков**, находящихся в данном объёме, ограниченном поверхностью S (формула 21.14)

Таким образом, формула Остроградского – Гаусса имеет вид

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV=\oiint\limits_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \tag{23.14}$$

Следствия из формулы Остроградского – Гаусса

В гамильтоновых обозначениях формула (23.14) имеет вид:

$$\iiint\limits_V \nabla\,\mathbf{a}\,d\tau=\oiint\limits_S \mathbf{n}\,\mathbf{a}\,dS \tag{24.14}$$

Эта формула справедлива для случая векторного произведения (для ротора)

$$\iiint\limits_V \nabla\times\mathbf{a}\,d\tau=\oiint\limits_S \mathbf{n}\times\mathbf{a}\,dS \tag{25.14}$$

В случае скалярной функции φ эта формула имеет такую же форму

$$\iiint\limits_V \nabla\varphi\,d\tau=\oiint\limits_S \mathbf{n}\varphi\,dS \tag{26.14}$$

Из (24.14) и (25.14) следует, что формула (24.14) сохраняет свой вид для диадного произведения двух векторных функций

$$\iiint_V \nabla(\mathbf{v};\mathbf{a})\,d\tau = \oiint_S \mathbf{n}(\mathbf{v};\mathbf{a})\,dS \qquad (27.14)$$

Формула (24.14) при применении к **скалярному произведению двух** векторных функций имеет вид:

$$\oiint_S \mathbf{n}(\mathbf{a}\,\mathbf{v})\,dS = \iiint_V [\mathbf{a}(\nabla\,\mathbf{v}) + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{a}]\,d\tau \qquad (28.14)$$

Для лапласиана это соотношение преобразуется следующим образом:

$$\iiint_V \nabla^2\varphi\,d\tau = \iiint_V \nabla\cdot(\nabla\varphi)\,d\tau = \oiint_S (\mathbf{n}\nabla)\varphi\,dS = \oiint_S \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\,dS \qquad (29.14)$$

Применительно к векторной функции получается формула

$$\oiint_S (\mathbf{n}\nabla)\mathbf{a}\,dS = \iiint_V \nabla^2\mathbf{a}\,d\tau \qquad (30.14)$$

Циркуляция вектора

В векторном поле **a** рассмотрим некоторую кривую M_1M_2 .(Рис.10.14) и разобьем её с помощью точек $\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2,...,\mathbf{r}_n$ на малые участки $\Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i-1}$. Составим сумму произведений

$$\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i\cdot\Delta\mathbf{r}_i\,, \qquad (31.14)$$

где $\mathbf{a}_\mathrm{i}$ – значение вектора поля в какой-нибудь точке участка $\Delta\mathbf{r}_i$.

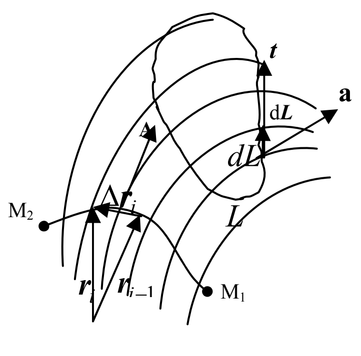


Рис. 10.14 К циркуляции вектора

Определение 14.14 Если существует предел суммы $\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i\cdot\Delta\mathbf{r}_i$ при неограниченном возрастании числа элементов $\Delta\boldsymbol{r}_i$ и убывании до нуля длины всех элементов, то он называется **криволинейным интегралом** вдоль M_1M_2 и обозначается

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{a}_i\cdot\Delta\boldsymbol{r}_i = \int_{M_1M_2}\mathbf{a}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{M_1M_2} a_1dx_1 + a_2dx_2 + a_3dx_3 \qquad (32.14)$$

Здесь вектор $d\boldsymbol{r}$ направлен в каждой точке кривой M_1M_2 по касательной, и его модуль равен дифференциалу дуги кривой:

$$|d\boldsymbol{r}| = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} = dL \qquad (33.14)$$

Определение 15.14 Криволинейный интеграл по замкнутому контуру называется **циркуляцией** вектора **a** по контуру L и обозначается в виде

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{a}\cdot d\boldsymbol{L} \qquad (34.14)$$

Здесь $d\boldsymbol{L}$ - направленный элемент контура, который равен $d\boldsymbol{L} = \boldsymbol{t}\,dL$ ($\boldsymbol{t}$ - орт касательной к контуру, dL - дифференциал длины дуги контура).

Замечание 14.14 Если **a** – **сила**, то циркуляция представляет собой **работу** этой силы при движении по контуру.

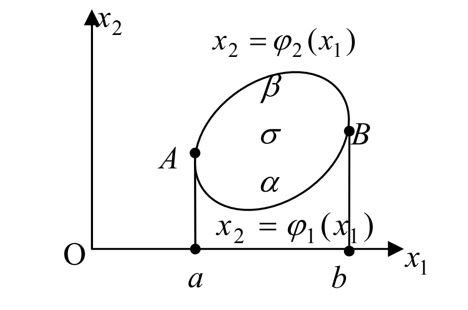


Рис. 11.14 К теореме Грина

Теорема Грина

Пусть задано векторное поле

$\boldsymbol{F}(x_1, x_2, x_3) = P(x_1, x_2, x_3) + Q(x_1, x_2, x_3) + R(x_1, x_2, x_3)$ (35.14)

и заданы $\dfrac{\partial P}{\partial x_2}; \dfrac{\partial P}{\partial x_3}; \dfrac{\partial Q}{\partial x_1}; \dfrac{\partial Q}{\partial x_3}; \dfrac{\partial R}{\partial x_1}; \dfrac{\partial R}{\partial x_2}$.

Т е о р е м а 3.14 **Пусть на плоскости заданы непрерывные функции** $P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2)$ **и их производные** $\dfrac{\partial P}{\partial x_3}$ **и** $\dfrac{\partial Q}{\partial x_1}$**. Тогда справедлива формула**

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) d\sigma = \oint_l P dx_1 + Q dx_2 \tag{36.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Двойной интеграл может быть представлен в виде двукратного интеграла. Для примера рассмотрим интеграл (рис. 11.14)

$$\iint_\sigma \frac{\partial P}{\partial x_2} d\sigma = \iint_\sigma \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_1 dx_2 = \int_a^b dx_1 \int_{\varphi_1(x_1)}^{\varphi_2(x_1)} \frac{\partial P}{\partial x_2} dx_2 =$$

$$= \int_a^b [P(x_1, \varphi_2(x_1)) - P(x_1, \varphi_1(x_1))] dx_1 = \int_{A\alpha B} P(x_1, x_2) dx_1 - \int_{A\beta B} P(x_1, x_2) dx_1$$

Меняя в первом интеграле направление интегрирования, получим

$$\iint_\sigma \frac{\partial P}{\partial x_2} d\sigma = -\int_{B\alpha A} P(x_1, x_2) dx_1 - \int_{A\beta B} P(x_1, x_2) dx_1 = -\oint_l P(x_1, x_2)\, dx_1 \tag{37.14}$$

Аналогично получается

$$\iint_\sigma \frac{\partial Q}{\partial x_1} d\sigma = \oint_l Q\, dl \tag{38.14}$$

Вычитая из (38.14) равенство (37.14), получим **формулу Грина**

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) d\sigma = \oint_l P dx_1 + Q dx_2 \tag{39.14}$$

Теорема Стокса

Т е о р е м а 4.14 **Если функции** $P(x_1, x_2, x_3), Q(x_1, x_2, x_3), R(x_1, x_2, x_3)$ и $\dfrac{\partial P}{\partial x_2}, \dfrac{\partial P}{\partial x_3}, \dfrac{\partial Q}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x_3}, \dfrac{\partial R}{\partial x_1}, \dfrac{\partial R}{\partial x_2}$ **непрерывны на поверхности** S и на замкнутом контуре L, который является границей S, то

$$\iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_1} \right) \cos(\boldsymbol{n}, x_1) + \left(\frac{\partial P}{\partial x_3} - \frac{\partial R}{\partial x_1} \right) \cos(\boldsymbol{n}, x_2) + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) \cos(\boldsymbol{n}, x_3) \right\} dS = \oint_L P dx_1 + Q dx_2 + R dx_3 \tag{40.14}$$

где n - орт нормали к поверхности S.

Поверхность S считается двусторонней, а положительное направление нормали **n** на ней связано с направлением обхода контура L.

Определение 16.14 Положительный обход контура L выбирается так, чтобы поверхность всегда оставалась **слева** для наблюдателя, обходящего контур так, что положительный орт $\mathbf{n}$ в точках у контура L направлен от ног к голове наблюдателя.

Д о к а з а т е л ь с т в о**.** Доказательство теоремы Стокса основано на теореме Грина (которая относится к плоскости).

За положительный обход контура L принимается направление против часовой стрелки. В этом случае орт $\mathbf{n}$ составляет с осью x_3 острый угол. Тогда

$$d\sigma_{12} = dS\cos(\mathbf{n}, x_3) \text{ при } \cos(\mathbf{n}, x_3) > 0$$

Преобразуем интеграл

$$\oint_L P(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 ,$$

используя тот факт, что контур L принадлежит поверхности S, уравнение которой может быть записано в виде $x_3 = f(x_1, x_2)$. Отсюда при переходе от пространственного контура интегрирования L к плоскому l подынтегральная функция может быть записана в виде $P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]$. Эта функция содержит только две координаты x_1, x_2, которые для переменной точки на контуре L имеют те же значения, что и в соответствующей точке на контуре l. Таким образом, получается равенство

$$\oint_L P(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 = \oint_l P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]\, dx_1 .$$

Применяя к этому интегралу формулу Грина, получим

$$\oint_L P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]\, dx_1 =$$

$$= -\iint_{\sigma_{12}} \left[\frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial x_2} + \frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] d\sigma_{12} = \qquad (41.14)$$

$$= -\iint_{\sigma_{12}} \left[\frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial x_2} + \frac{\partial P[x_1, x_2, f(x_1, x_2)]}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial x_2} \right] \cos(\boldsymbol{n}, x_3) dS$$

Косинусы углов, которые составляет внешняя нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности $x_3 = f(x_1, x_2)$ с координатными осями, имеют выражения

$$\cos(\mathbf{n}, x_1) = \frac{p}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\cos(\mathbf{n}, x_2) = \frac{q}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \qquad (42.14)$$

$$\cos(\mathbf{n}, x_3) = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

где $p = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $q = \dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x_3} = 1$.

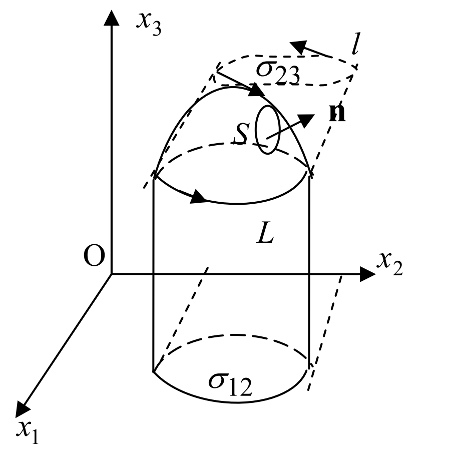


Рис. 12.14 К выводу формулы Стокса

Если умножить в этих формулах $\cos(\boldsymbol{n}, x_2)$ на $\cos(\mathbf{n}, x_3)$ и $\cos(\mathbf{n}, x_3)$ - на $\cos(\mathbf{n}, x_2)$ и приравнять правые части равенств

$$\cos(\mathbf{n},x_2)\cdot\cos(\mathbf{n},x_3)=\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x_2}\cdot\cos(\mathbf{n},x_3)}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}\quad \text{и}\quad \cos(\mathbf{n},x_3)\cdot\cos(\mathbf{n},x_2)=\frac{\cos(\mathbf{n},x_2)}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

то с учётом направления касательных к проекциям контура L на соответствующие координатные плоскости (рис. 12.14) получим равенство

$$\frac{\partial f}{\partial x_3}\cos(\mathbf{n},x_3)=-\cos(\mathbf{n},x_2) \tag{43.14}$$

Тогда формула (41.14) примет вид

$$\oint_L P\,dx_1=-\iint_S\left[\frac{\partial P}{\partial x_2}\cos(\mathbf{n},x_3)-\frac{\partial P}{\partial x_3}\cos(\mathbf{n},x_2)\right]dS\,. \tag{44.14}$$

Аналогично получаются интегралы

$$\oint_L Q\,dx_2=-\iint_S\left[\frac{\partial Q}{\partial x_3}\cos(\mathbf{n},x_1)-\frac{\partial Q}{\partial x_1}\cos(\mathbf{n},x_3)\right]dS\,, \tag{45.14}$$

$$\oint_L R\,dx_3=-\iint_S\left[\frac{\partial R}{\partial x_1}\cos(\mathbf{n},x_2)-\frac{\partial R}{\partial x_2}\cos(\mathbf{n},x_1)\right]dS\,. \tag{46.14}$$

Складывая эти формулы, получим **формулу Стокса** (40.14)

$$\oint_L Pdx_1+Qdx_2+Rdx_3=\iint_S\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}-\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)\cos(\mathbf{n},x_1)+\left(\frac{\partial P}{\partial x_3}-\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)\cos(\mathbf{n},x_2)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)\cos(\mathbf{n},x_3)\right\}dS$$

Ротор

Для представления формулы Стокса в векторном виде необходимо ввести понятие ротора. Ротор векторного поля $\mathbf{F}$ равен векторному произведению оператора Гамильтона ∇ на $\mathbf{F}$, то есть, $\operatorname{rot}\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{F}$.

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1}&\dfrac{\partial}{\partial x_2}&\dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ P&Q&R\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}-\frac{\partial Q}{\partial x_3}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial x_3}-\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)\mathbf{k} \tag{47.14}$$

Единичный вектор нормали имеет вид

$$\mathbf{n}=\mathbf{i}\cos(\mathbf{n},x_1)+\mathbf{j}\cos(\mathbf{n},x_2)+\mathbf{k}\cos(\mathbf{n},x_3) \tag{48.14}$$

Легко видеть, что произведение

$$\operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}-\frac{\partial Q}{\partial x_1}\right)\cos(\mathbf{n},x_1)+\left(\frac{\partial P}{\partial x_3}-\frac{\partial R}{\partial x_1}\right)\cdot\cos(\mathbf{n},x_2)+\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}-\frac{\partial P}{\partial x_2}\right)\cdot\cos(\mathbf{n},x_3) \tag{49.14}$$

Тогда получается формула Стокса в векторной форме

$$\oint_L \mathbf{F}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS\,, \tag{50.14}$$

т.е. циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектор через любую поверхность, на которой может лежать этот контур.

Следствия из теоремы Стокса

Формулу (44.14) можно применить не только к векторной, но и к скалярной функции. В этом случае она имеет вид:

$$\oint_L \varphi \cdot d\boldsymbol{l} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla)\varphi \, dS \qquad (51.14)$$

В случае векторного произведения вектора дифференциала длины дуги $d\boldsymbol{l}$ на вектор $\mathbf{a}$ формула Стокса имеет вид:

$$\oint_L d\boldsymbol{l} \times \mathbf{a} = \iint_S (\mathbf{n} \times \nabla) \cdot \mathbf{a} \; dS = -\iint_S \mathbf{n}(\nabla \mathbf{a})\, dS + \iint_S (\nabla; \mathbf{a})\, \mathbf{n} \, dS$$

или, если учесть, что диадное произведение $(\nabla; \mathbf{a})\, \mathbf{n} = (\mathbf{n}\nabla)\mathbf{a}$, получим равенство

$$\oint_L d\boldsymbol{l} \times \mathbf{a} = -\iint_S \mathbf{n}(\nabla \mathbf{a})\, dS + \iint_S (\mathbf{n}\nabla)\, \mathbf{a} \, dS \qquad (52.14)$$

Тензорное поле

Определение 17.14. Говорят, что задано **тензорное поле,** если каждой точке пространства $\mathbf{x}$ и каждому моменту времени t сопоставлен тензор $\mathbf{T}_{(\mathbf{r},\, t)}$, где радиус - вектор $\mathbf{r}$ меняется в заданной области пространства, а t - в заданном интервале времени.

Частными случаями тензорных полей являются скалярные или векторные поля $\varphi = \varphi(\mathbf{r})$ или $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{r})$.

Примеры **скалярных** полей: 1) поле давления $p = p(\mathbf{r})$, 2) поле температуры $T = T(\mathbf{r})$, 3) плотность $\rho = \rho(\mathbf{r})$.

Примеры **векторных** полей: 1) поле скорости $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$, 2) поле ускорений $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\mathbf{r})$

Пример **тензорного** поля – напряжённое состояние среды $p_{ik} = p_{ik}(\mathbf{r})$

Определение 18.14 Тензорное поле называется **непрерывным** (или **дифференцируемым**), если компоненты $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$ являются непрерывными (или дифференцируемыми) функциями $\mathbf{x}(x_1, x_2, x_3)$ и t.

Определение 19.14 Если компоненты тензора зависят только от $\mathbf{x}$, то тензорное поле называется **стационарным**.

Определение 20.14 Тензорным полем n**-го ранга** $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}(x_1, x_2, x_3)$ называется совокупность 3^n функций, которые в любой точке пространства (x_1, x_2, x_3) образуют тензор n-го ранга.

1) Случай $n = 0$ даёт **скалярное поле**, то есть **скалярную** функцию **координат** $\Phi(\boldsymbol{r})$

Примером скалярного поля служит поле точечного электрического заряда $\Phi(\boldsymbol{r}) = e/|\boldsymbol{r}|$

Величина

$$|\boldsymbol{r}| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2} \qquad (53.14)$$

- скаляр, поэтому функция $\Phi(\boldsymbol{r})$ инвариантна относительно вращения.

2) Случай $n = 1$: **векторное** поле $\mathbf{a}(\boldsymbol{r})$ - **векторная** функция **векторного** аргумента.

Примером может служить электрическое поле точечного заряда $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{r}\, e/|\boldsymbol{r}|^2$.

Теорема 5.14 Если $T_{i_1 i_2 \ldots i_n}(\boldsymbol{r})$ **- тензорное поле** n **-го ранга,** то величина **производной тензора** $\partial/\partial x_i \, T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ есть **тензорное поле** $n+1$**-го ранга.**

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при переходе из системы координат x_i к $x_i^{'}$ справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} T_{i_1 i_2 \ldots i_n}\right)^{'} = \frac{\partial}{\partial x'_i} T'_{i_1 i_2 \ldots i_n}. \qquad (54.14)$$

При повороте $x_i^{'} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i \quad (i = 1,2,3)$. Отсюда в силу условия ($\forall$ - «для любого»)

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \alpha_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji} \alpha_{ki} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & \forall \; j = k \\ 0, & \forall \; j \neq k \end{cases} \qquad (55.14)$$

следует, что

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x'_i \text{ или } \frac{\partial x_j}{\partial x_i^{'}} = \alpha_{ij}. \qquad (56.14)$$

Поэтому оператор производной по x'_i имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_i^{'}} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_j}{\partial x_i^{'}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}. \qquad (57.14)$$

Замечание 15.14 В равенстве (56.14) предполагается, что все $x_j^{'}$ $(j \neq i)$ и x_i $(i \neq j)$ **фиксированы**.

Теперь видно, что величина $\partial/\partial x_i \, T_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ преобразуется как тензор $n+1$-го ранга, а именно

$$\frac{\partial}{\partial x_i^{'}} T'_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \sum_{j, j_1, j_2, \ldots, j_n} \alpha_{ij} \alpha_{i_1 j_1} \ldots \alpha_{i_n j_n} \frac{\partial}{\partial x_i} T'_{j_1 j_2 \ldots j_n}, \qquad (58.14)$$

а число компонент такого тензора равно 3^{n+1}. Тем самым данная **теорема доказана.**

Определение 21.14 Тензорное поле, зависящее от времени $T_{ik} = T_{ik}(\boldsymbol{r}, t)$, называется **нестационарным.**

Примеры: Характеристиками **нестационарных** тензорных полей являются функции точки и времени

$$\varphi = \varphi(\boldsymbol{r}, t), \; \mathbf{a} = \mathbf{a}(\boldsymbol{r}, t), \; p_{ik} = p_{ik}(\boldsymbol{r}, t) \text{ и т.п.}$$

Замечание 16.14 Чаще всего рассматриваются **непрерывные** тензорные поля.

Замечание 17.14. Все формулы тензорной алгебры справедливы при изучении тензорных полей.

Определение 22.14 Если каждому допустимому численному значению **скалярной** величины t соответствует **одно вполне определённое значение тензорной** величины T_{ik}, то говорят, что задана **тензор – функция от скалярного** аргумента

$$T_{ik} = T_{ik}(t) \qquad (59.14)$$

Замечание 18.14 Если напряжённое состояние меняется с течением времени, то в каждой точке надо рассматривать **девять функций времени** $p_{ik} = p_{ik}(t)$, которые для каждого значения t образуют **тензор**.

Определение 23.14 Производной по t от тензора с компонентами $p_{ik} = p_{ik}(t)$ называется тензор, компоненты которого (в постоянной по времени системе координат) вычисляются как пределы

$$\frac{d\,p_{ik}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_{ik}(t+\Delta t) - p_{ik}(t)}{\Delta t} \tag{60.14}$$

Замечание 19.14 Производные тензоров более высокого порядка получаются по тем же правилам, что и для векторов.
Замечание 2014 Дифференцирование тензора по скалярному аргументу **не меняет его ранга**.

Дифференцирование тензорных полей

В ортогональной декартовой системе координат, где радиус – вектор любой точки имеет вид

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i, \tag{61.14}$$

поля тензоров различного ранга можно записать в индексных и символических обозначениях, например,

а) скалярное поле

$$\varphi = \varphi(x_i, t) \text{ или } \varphi = \varphi(\mathbf{x}, t) \tag{62.14}$$

б) векторное поле

$$\upsilon_i = \upsilon_i(x_i, t) \text{ или } \mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \tag{63.14}$$

в) поле тензора второго ранга

$$T_{ij} = T_{ij}(\mathbf{x}, t) \text{ или } \mathbf{T} = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \tag{64.14}$$

Обозначение 1.14 Дифференцирование компонент тензора по координате x_i обозначается дифференциальным оператором

$$\partial / \partial x_i \tag{65.14}$$

или сокращённо в индексной записи

$$\partial_i, \tag{66.14}$$

что указывает на то, что это дифференциальный оператор первого ранга.
Обозначение 2. В символических обозначениях для записи **векторной операции** употребляется общеизвестный символ ∇ (набла), который расшифровывается так:

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i \partial_i \tag{67.14}$$

Обозначение 3. Частное дифференцирование по переменной x_i иногда изображают нижним индексом после запятой, как показано в следующих примерах:

$$\text{а) } \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi_{,i}, \quad \text{б) } \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_i} = \upsilon_{i,i}, \quad \text{в) } \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} = \upsilon_{i,j}, \tag{68.14}$$

$$\text{г) } \frac{\partial^2 \upsilon_i}{\partial x_j \partial x_k} = \upsilon_{i,jk} \quad \text{д) } \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,k}, \quad \text{е) } \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} = T_{ij,km} \tag{69.14}$$

Замечание 21.14 Эти примеры показывают, что при дифференцировании оператор ∂_i приводит к тензору на **один порядок выше** исходного, если i остаётся свободным индексом (случаи «а» и «в»), и к тензору на **один порядок ниже** исходного, если индекс i становится индексом суммирования (случай «б»).
Замечание 22.14 Для справки ниже приведены важные дифференциальные операторы, часто употребляемые в механике сплошной среды,

$$\mathrm{grad}\varphi = \nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \quad \text{или} \quad \partial_i\varphi = \varphi_{,i}\,, \tag{70.14}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = \nabla\cdot\mathbf{v}, \quad \text{или} \quad \partial_i \upsilon_i = \upsilon_{i,i}\,, \tag{71.14}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v}, \quad \text{или} \quad \varepsilon_{ijk}\partial_j \upsilon_k = \varepsilon_{ijk}\upsilon_{k,j}\,, \tag{72.14}$$

$$\nabla^2\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi, \quad \text{или} \quad \partial_{ii}\varphi = \varphi_{,ii}\,. \tag{73.14}$$

Задача 1.14 Пользуясь индексными обозначениями, доказать векторные тождества:

а) $\nabla\times\nabla\varphi = 0$, б) $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{a} = 0$.

а) Согласно (67.14), $\nabla\varphi$ записывается в виде $\mathbf{e}_i\varphi_{,i}$ и тогда $\mathbf{v} = \nabla\times\nabla\varphi$ имеет компоненты

$$\upsilon_i = \varepsilon_{ijk}\partial_j\varphi_{,k} = \varepsilon_{ijk}\varphi_{,kj}.$$

Но ε_{ijk}.антисимметричен по индексам j и k, тогда как $\varphi_{,kj}$.симметричен по этим индексам. Следовательно, произведение $\varepsilon_{ijk}\varphi_{,kj}$. обращается в нуль. К тому же результату можно прийти, вычислив отдельно каждую компоненту $\mathbf{v}$, например

$$\upsilon_1 = \varepsilon_{123}\varphi_{,23} + \varepsilon_{132}\varphi_{,32} = (\varphi_{,23} - \varphi_{,32}) = 0.$$

б) $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{a} = \lambda = (\varepsilon_{ijk}a_{k,j})_{,i} = \varepsilon_{ijk}a_{k,ji} = 0$, так как $a_{k,ij} = a_{k,ji}$ и $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$.

Задача 2.14 Пользуясь индексными обозначениями, доказать векторное тождество

$$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$

Доказательство. $\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{v}$ можно написать в виде $\upsilon_p = \varepsilon_{pqi}\varepsilon_{ijk}\partial_q a_j b_k$ и тогда на основании формулы примера 8 главы 1 $\varepsilon_{pqs}\varepsilon_{sqr} = \delta_{qp}\delta_{rq} - \delta_{qq}\delta_{rp}$ получается

$$\upsilon_p = \varepsilon_{pqi}\varepsilon_{ijk}(a_j b_k)_{,q} = \varepsilon_{pqi}\varepsilon_{ijk}(a_{j,q}b_k + a_j b_{k,q}) =$$
$$= (\delta_{pj}\delta_{qk} - \delta_{pk}\delta_{qj})\cdot(a_{j,q}b_k + a_j b_{k,q}) = a_{p,q}b_q - a_{q,q}b_p + a_p b_{q,q} - a_q b_{p,q}.$$

А это значит, что

$$\mathbf{v} = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a} - \mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}$$

Поле тензора 2-го ранга. Поток тензорного поля

Рассмотрим поле тензора 2-го ранга $T(\boldsymbol{r})$, имеющего компоненты $T_{ik} = T_{ik}(\boldsymbol{r})$. **Примерами** полей тензора 2-го ранга могут служить поле **тензора напряжений** в упругой среде и поле **моментов инерций** в твёрдом теле.

Рассмотрим двустороннюю кусочно-гладкую поверхность S, помещённую в тензорное поле $T(\boldsymbol{r})$. Для каждого элемента dS этой поверхности определим положительный орт нормали $\mathbf{n}$.

Определение 24.14. Потоком тензорного поля через поверхность называется **поверхностный интеграл**, взятый от скалярного произведения тензора T на вектор нормали: $\mathbf{n}$

$$\mathbf{W} = \iint\limits_S T\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{74.14}$$

Замечание 23.14 Поток тензорного поля является **вектором**, в отличие от потока векторного поля

$$\Pi = \iiint\limits_V \mathrm{div}\,\mathbf{F}\,dV = \iint\limits_\Sigma \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma \tag{75.14}$$

Компоненты потока тензорного поля равны

$$W_i = \iint\limits_S T_{ik} \cdot n_k \, dS = \iint\limits_S \left(T_{i1} \cdot n_1 + T_{i2} \cdot n_2 + T_{i3} \cdot n_3\right) dS \qquad (76.14)$$

Если свёртывание происходит по вторым индексам, то

$$W_i = \iint\limits_S T_{ki} \cdot n_k \, dS \qquad (77.14)$$

Несколько приложений потока поля тензора 2-го ранга.

Приложение 1. Пусть $T_{ik} \equiv p_{ik}$ - тензор напряжений в упругом теле. Выделим в этом теле некоторую поверхность и определим равнодействующую $\boldsymbol{P}$ всех сил напряжения, приложенных к этой поверхности (замкнутой или незамкнутой) . Если $\boldsymbol{p}_n$ - напряжение у элемента dS с нормалью $\boldsymbol{n}$, то равнодействующая

$$\boldsymbol{P} = \iint\limits_{\boldsymbol{S}} \boldsymbol{p_n} dS \qquad (78.14)$$

и её компоненты

$$P_k = \iint\limits_{\boldsymbol{S}} p_{\boldsymbol{nk}} dS, \qquad (79.14)$$

где $p_{nk} = p_{ik} n_i$.

Следовательно,

$$P_k = \iint\limits_{\boldsymbol{S}} p_{\boldsymbol{ik}} n_i dS \qquad (80.14)$$

Итак, поток тензора напряжений через поверхность, взятую в упругой среде, равен равнодействующей всех сил напряжений, приложенных к этой поверхности.

Приложение 2. Вычисление потока единичного тензора δ_{ik} через замкнутую поверхность

$$\mathbf{W} = \iint\limits_S \delta_{\text{ik}} \mathbf{n} \, dS \qquad (81.14)$$

В тензорных обозначениях получается

$$W_i = \iint\limits_S \delta_{ki} \cdot n_k \, dS = \iint\limits_S n_i \, dS, \qquad (82.14)$$

Поскольку $\iint\limits_S \mathbf{n} \, dS = 0$ (это следует из того, что поток через замкнутую поверхность, внутри которой нет ни источников, ни стоков, то есть $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, равен нулю $\Pi = \iiint\limits_V 0 \, dV = \iint\limits_S \mathbf{c}onst \cdot \mathbf{n} \, dS = const \iint\limits_\Sigma \mathbf{n} \, dS = 0$), то **поток единичного тензора** через **замкнутую** поверхность **равен нулю.**

Дивергенция тензорного поля.

Дивергенция тензора 2-го ранга, как и поток этого поля, является **вектором** и определяется следующим пределом

$$\operatorname{div} T = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint\limits_S T \cdot \boldsymbol{n} \, dS \qquad (83.14)$$

Здесь поверхность S, ограничивающая объём V, стягивается к рассматриваемой точке так, что её площадь вместе с величиной объёма V стремится к нулю. Предел не зависит от формы замкнутой поверхности S.

Компоненты вектора $\operatorname{div} T$ получается путём дифференцирования компонент тензора T_{ik} по координатам и свёртывания по тем индексам, по которым производится свёртывание справа в (77.14). Таким образом,

$$\left.\begin{aligned} (\operatorname{div} T)_i &= \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_S T_{ik} n_k \, dS, \\ (\operatorname{div} T)_i &= \frac{\partial T_{ki}}{\partial x_k} = \lim_{V \to 0} \frac{1}{V} \iint_S T_{k\,i} n_k \, dS \end{aligned}\right\} \tag{84.14}$$

Если использовать оператор Гамильтона, то выражение дивергенции тензора запишется в виде

$$\operatorname{div} T = \nabla \cdot T \tag{85.14}$$

Производная тензорного поля по направлению..

Отыскивая производную тензорного поля по какому-нибудь направлению, определяемому вектором $\boldsymbol{l}$, а также применяя формулу (12.14) к вектору $\mathbf{A}$ ($\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial l} = \boldsymbol{l} \cdot \nabla \mathbf{A} = (\boldsymbol{l} \cdot \nabla)\mathbf{A}$), получают при определении производной тензора по направлению

$$\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{l}} = \boldsymbol{l} \cdot \nabla T .$$

Компоненты этого тензора в прямоугольной декартовой системе координат в символической записи с учётом формулы

$$\nabla T = \left(\mathbf{i}_m \frac{\partial}{\partial x_m} \right) T$$

имеют вид

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial l} = (\boldsymbol{l} \cdot \mathbf{i}_m) \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m} = l_m \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}$$

Бесконечная совокупность производных $\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{l}}$ тензора 2-го ранга по направлению определяется компонентами тензора 3 –го ранга $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}$.

Замечание 24.14 Операция образования ротора векторного поля неприменима к тензорным полям 2-го ранга.

Теорема Остроградского – Гаусса в тензорном поле

Эта теорема связывает поверхностный интеграл от некоторого гладкого[1] тензорного поля n-го ранга с объёмным интегралом от тензорного поля $(n+1)$- го ранга.

Т е о р е м а 1.14. **Пусть дано гладкое тензорное поле $T_{l_1 l_2 \ldots l_n}(x_1, x_2, x_3)$. Тогда имеет место равенство**

$$\sum_{i_1=1}^{3} \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_{l_1}} T_{i_1 i_2 \ldots i_n} \, dV = \iint_S \sum_{i_1=1}^{3} T_{i_1 i_2 \ldots i_n} \, dS_{i_1} \,, \tag{86.14}$$

[1] **Гладким** полем называется тензорное поле, каждая компонента которого обладает непрерывными частными производными по всем аргументам

где dV - элемент объёма, $d\boldsymbol{S}(dS_1, dS_2, dS_3)$ - вектор, направленный вдоль внешней нормали к поверхности, причём длина вектора $d\boldsymbol{S}$ численно равна площади элемента поверхности S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольный объём V, ограниченный поверхностью S. Разобьем этот объём на элементарные объёмы, которые с заданной степенью точности аппрксимируются кубами. Докажем формулу (86.14) для элементарного куба с рёбрами, параллельными координатным осям. Интеграл, стоящий в левой части равенства (86.14), для куба может быть преобразован следующим образом:

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial x_1}T_{1\,i_2 i_3\ldots i_n}\,dx_1dx_2dx_3+\iiint\limits_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial x_2}T_{2\,i_2 i_3\ldots i_n}\,dx_1dx_2dx_3+\\&+\iiint\limits_{\Delta V}\frac{\partial}{\partial x_3}T_{3\,i_2 i_3\ldots i_n}\,dx_1dx_2dx_3=\iint\limits_{\Delta S}T_{1\,i_2 i_3\ldots i_n}\Big|_{x_1}^{x_1+dx_1}dx_2dx_3+\\&+\iint\limits_{\Delta S}T_{2\,i_2 i_3\ldots i_n}\Big|_{x_2}^{x_2+dx_2}dx_1dx_3+\iint\limits_{\Delta S}T_{3\,i_2 i_3\ldots i_n}\Big|_{x_3}^{x_3+dx_3}dx_1dx_2.\end{aligned}\qquad(87.14)$$

Из рис.13.14 ясно, что

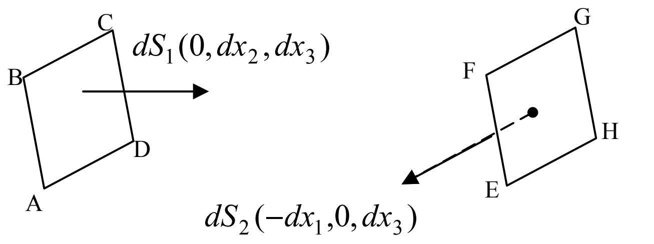


Рис. 13.14 К теореме Остроградского - Гаусса

$$\iint\limits_{\Delta S}T_{1 i_2 i_3\ldots i_n}\Big|_{x_1}^{x_1+dx_1}dx_2dx_3=\iint\limits_{ABCD}T_{1 i_2 i_3\ldots i_n}dx_2dx_3-\iint\limits_{EFGH}T_{1 i_2 i_3\ldots i_n}dx_2dx_3\qquad(88.14)$$

Так как $d\boldsymbol{S_1}=0$ для всех граней, за исключением ABCD и EFGH , то

$$\iint\limits_{\Delta S}T_{1 i_2\ldots i_n}\Big|_{x_1}^{x_1+dx_1}dx_2dx_3=\iint\limits_{\Delta S_1}T_{1 i_2\ldots i_n}d\boldsymbol{S}_1\,.\qquad(89.14)$$

Аналогично получаем

$$\iint\limits_{\Delta S_2}T_{2 i_2\ldots i_n}\Big|_{x_2}^{x_2+dx_2}dx_1dx_3=\iint\limits_{\Delta S_2}T_{2 i_2\ldots i_n}d\boldsymbol{S}_2\qquad(90.14)$$

$$\iint\limits_{\Delta S_3}T_{3 i_2\ldots i_n}\Big|_{x_3}^{x_3+dx_3}dx_1dx_2=\iint\limits_{\Delta S_3}T_{3 i_2\ldots i_n}d\boldsymbol{S}_3\qquad(91.14)$$

Подставляя (89.14), (90.14) и (91.14) в (87.14), получим (86.14). Итак, теорема справедлива для любого элементарного объёма V, так как сумма интегралов по поверхности всех кубов даёт интеграл по поверхности, ограничивающей объём V, ибо интегралы по внутренним сторонам кубов взаимно уничтожаются за счёт различного направления нормалей на смежных сторонах.

Для $n=1$ величины T_l - это компоненты **вектора**. Равенство (86.14) переписывается в виде

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\,dV = \iiint_V \mathrm{div}\mathbf{F}\,dV = \oiint_{S_V}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS = \oiint_{S_V} F_n\cdot dS \tag{92.14}$$

т.е. поток вектора через замкнутую поверхность равен объёмному интегралу от дивергенции вектора.

Можно сказать, как уже указывалось выше, что величина div**F** характеризует **плотность источников** (**и стоков**) данного векторного поля.

Для $n = 2.$ имеем

$$\sum_{i=1}^{3}\iiint_V \frac{\partial}{\partial x_{i_i}} T_{i\,j}\,d\tau = \iint_S \sum_{i_1=1}^{3} T_{i\,j}\,dS_i \tag{93.14}$$

Рассмотрим тензор

$$S_{i\,j\,i_1 i_2 \dots i_n} \equiv \delta_{i\,j} T_{i_1 i_2 \dots i_n} \tag{94.14}$$

Покажем, что в этом случае из теоремы Остроградского – Гаусса следует равенство

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial x_i} T_{j_1 j_2 \dots j_n}\,d\tau = \iint_S T_{j_1 j_2 \dots j_n}\,dS_i \tag{95.14}$$

Непосредственным следствием формулы (80.14) является соотношение

$$\sum_{i=1}^{3} S_{i\,j\,i_1 i_2 \dots i_n}\,dS_i \equiv T_{i_1 i_2 \dots i_n}\,dS_j \tag{96.14}$$

Продифференцировав и просуммировав (94.14), найдём, что

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} S_{i\,j\,i_1 i_2 \dots i_n} \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} T_{i_1 i_2 \dots i_n} \tag{97.14}$$

Применим теорему 1.14 к левой части (97.14), тогда получим

$$\iiint_V \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_{l_i}} S_{i\,j\,i_1 i_2 \dots i_n}\,dV = \sum_{i=1}^{3} \iint_S S_{i\,j\,i_1 i_2 \dots i_n}\,dS_i \tag{98.14}$$

а из (97.14) и (98.14) следует, что

$$\iint_S T_{i_2 i_3 \dots i_n}\,dS_i = \iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j} T_{i_2 i_3 .. i_n}\,dV \;. \tag{99.14}$$

Теперь формула (95.14) становится очевидной и даёт **тензорную запись теоремы Остроградского - Гаусса.**

§ 15 Основные определения и выводы коэффициентов Ламэ

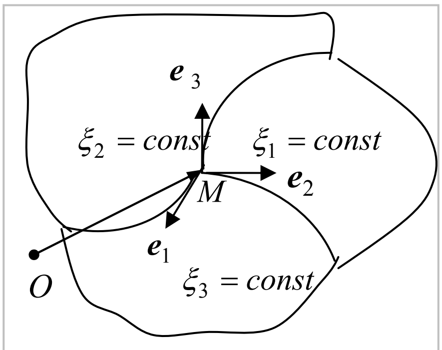


Рис. 1.15 Координатные поверхности

При решении задач механики сплошной среды для перехода из одной системы координат в другую удобно иметь **общий метод**, который бы давал простые формулы такого перехода. Такие формулы получаются с **помощью коэффициентов Ламэ**.

Для выводы коэффициентов Ламэ рассмотрим в пространстве произвольную точку M.

Положение точки M удобно задать радиусом – вектором

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3\,, \tag{1.15}$$

но во многих задачах выгоднее переходить к более удобным **криволинейным** координатам ξ_1, ξ_2, ξ_3, которые выражаются так (рис. 1.15):

$$\xi_1(\mathbf{r})=\xi_1(x_1,x_2,x_3),\quad \xi_2(\mathbf{r})=\xi_2(x_1,x_2,x_3),\quad \xi_3(\mathbf{r})=\xi_3(x_1,x_2,x_3). \qquad (2.15)$$

И обратно можно выразить **радиус – вектор** как $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$, а, следовательно, можно выразить x_1,x_2,x_3 через ξ_1,ξ_2,ξ_3

$$x_1=x_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\quad x_2=x_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\quad x_3=x_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3). \qquad (3.15)$$

Пусть заданы **поверхности равного уровня**

$$\xi_1(\mathbf{r})=const,\quad \xi_2(\mathbf{r})=const,\quad \xi_3(\mathbf{r})=const. \qquad (4.15)$$

Каждое равенство образует некоторое семейство поверхностей. Через произвольную точку М проходит по одной поверхности какого-нибудь одного семейства. Эти поверхности называются **координатными.** Линии пересечения называются **координатными линиями.**

Замечание 1.15 На координатной линии ξ_1 меняется только координата ξ_1, а остальные координаты ξ_2,ξ_3 остаются **постоянными**.

Введём в рассмотрение единичные векторы $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$, направленные **по касательным к координатным линиям** в точке M в сторону возрастания, соответственно, переменных ξ_1,ξ_2,ξ_3.

Рассмотрим радиус–вектор $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ и составим производную $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi_1}$. Поскольку при дифференцировании ξ_2 и ξ_3 считаются постоянными, годографом вектора $\mathbf{r}$ является **координатная линия** ξ_1, а потому вектор $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi_1}$ имеет направление касательной к координатной линии ξ_1, то есть

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi_1}=H_1\mathbf{e}_1, \qquad (5.15)$$

где H_1 - длина вектора $\dfrac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi_1}$. В силу того, что $\mathbf{e}_1$ единичный вектор, справедливо равенство

$$H_1^2=\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi_1}\right)^2 \qquad (6.15)$$

или, так как

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi_1}=\frac{\partial x_1}{\partial\xi_1}\mathbf{e}_1+\frac{\partial x_2}{\partial\xi_1}\mathbf{e}_1+\frac{\partial x_3}{\partial\xi_1}\mathbf{e}_1, \qquad (7.15)$$

то

$$H_1^2=(\partial x_1/\partial\xi_1)^2+(\partial x_2/\partial\xi_1)^2+(\partial x_3/\partial\xi_1)^2. \qquad (8.15)$$

Аналогичные рассуждения приводят к совокупность формул

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi_1}=H_1\mathbf{e}_1,\quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi_2}=H_2\mathbf{e}_2,\quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi_3}=H_3\mathbf{e}_3. \qquad (9.15)$$

где

$$H_i^2=(\partial x_1/\partial\xi_{\mathrm{i}})^2+(\partial x_2/\partial\xi_{\mathrm{i}})^2+(\partial x_3/\partial\xi_{\mathrm{i}})^2. \qquad (10.15)$$

Определение 1.15 Значения H_1,H_2,H_3 называются **коэффициентами Ламэ.**

Рассмотрим три вектора $\mathrm{grad}\xi_i$, то есть $\mathrm{grad}\xi_1$, $\mathrm{grad}\xi_2$, $\mathrm{grad}\xi_3$. Каждый из векторов $\mathrm{grad}\xi_i$ направлен по нормали к координатной поверхности $\xi_i=\mathrm{const}$. Если ввести обозначение вектора нормали к поверхности в виде $\mathbf{e}^*_i$ в направлении возрастающих значений ξ_i (от одной координатной поверхности к другой), то получим

$$\mathrm{grad}\xi_i = h_i\mathbf{e}^*{}_i, \quad (i = 1,2,3) \qquad (11.15)$$

где h_i длина вектора $\mathrm{grad}\,\xi_i$. Очевидно, что

$$h_i^2 = (\mathrm{grad}\,\xi_i)^2 = (\partial\xi_i/\partial x_1)^2 + (\partial\xi_i/\partial x_2)^2 + (\partial\xi_i/\partial x_3)^2 \qquad (i = 1,2,3) \qquad (12.15)$$

Величины h_1, h_2, h_3 являются **дифференциальными параметрами первого порядка.** **Коэффициенты Ламэ** определяются по **формулам**

$$H_i = \sqrt{(\partial x_1/\partial\xi_\mathrm{i})^2 + (\partial x_2/\partial\xi_\mathrm{i})^2 + (\partial x_3/\partial\xi_\mathrm{i})^2} \qquad (13.15)$$

Замечание 2.15 Обычно используются **ортогональные криволинейные** координаты.

Смысл коэффициентов Ламэ

Следует вспомнить из курса дифференциальной геометрии, что приращение радиуса – вектора связано с приращением **дифференциала длины дуги** пространственной кривой, а модуль дифференциала радиуса – вектора равен дифференциалу длины дуги

$$|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \mathrm{d}s, \qquad (14.15).$$

но с другой стороны

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi_1}\mathrm{d}\xi_1 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi_2}\mathrm{d}\xi_2 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\xi_3}\mathrm{d}\xi_3 = H_1\mathrm{d}\xi_1\mathbf{e}_1 + H_2\mathrm{d}\xi_2\mathbf{e}_2 + +H_3\mathrm{d}\xi_3\mathbf{e}_3, \qquad (15.15)$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial s_i}{\partial\xi_k}\mathrm{d}\xi_k\mathbf{e}_i = H_i\mathrm{d}\xi_i\mathbf{e}_i \qquad (16.15)$$

Возводя в квадрат обе части равенства (16.15) и замечая, что $(d\mathbf{r})^2 = (d\,s)^2$, $\mathbf{e}_i{}^2 = 1$, $\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_k = 0\ (i \ne k)$, получим для квадрата длины элемента $d\,\mathbf{r}$ формулу

$$(\mathrm{d}\mathbf{r})^2 = H_1^2(\mathrm{d}\xi_1)^2 + H_2^2(\mathrm{d}\xi_2)^2 + H_3^2(\mathrm{d}\xi_3)^2. \qquad (17.15)$$

и, следовательно, **квадрат длины дуги** тоже выражается через **коэффициенты Ламэ**

$$(\mathrm{d}s)^2 = H_1^2(\mathrm{d}\xi_1)^2 + H_2^2(\mathrm{d}\xi_2)^2 + H_3^2(\mathrm{d}\xi_3)^2. \qquad (18.15)$$

Отсюда для **ортогональных криволинейных координат** выражение для составляющих вектора $d\mathbf{r}$ имеет вид

$$\mathrm{d}s_i = H_i\mathrm{d}\xi_i. \qquad (i = 1,2,3) \qquad (19.15)$$

то есть,

$$\mathrm{d}s_1 = H_1\mathrm{d}\xi_1, \quad \mathrm{d}s_2 = H_2\mathrm{d}\xi_2, \quad \mathrm{d}s_3 = H_3\mathrm{d}\xi_3 \qquad (20.15)$$

Через коэффициенты Ламэ в **ортогональных криволинейных** координатах ξ_i выражаются элементы длины дуги s_1, s_2, s_3

$$\mathrm{d}s = \sqrt{H_1^2(\mathrm{d}\xi_1)^2 + H_2^2(\mathrm{d}\xi_2)^2 + H_3^2(\mathrm{d}\xi_3)^2.} \qquad (21.15)$$

Замечание 3.15 Таким образом, коэффициентов **Ламэ** дают связь **дифференциала длины дуги** на координатной поверхности **с координатными линиями** ξ_i

$$\frac{d\,s_k}{d\xi_k} = H_k, \quad \frac{d\,\xi_k}{ds_k} = \frac{1}{H_k} \qquad (22.15)$$

Установим связь между **коэффициентами Ламе** и **величинами** h_1, h_2, h_3, введенными в (11.15) и (12.15) координаты градиента $grad\xi_k$ в виде

$$\mathrm{grad}\xi_k = \frac{\partial\xi_k}{\partial s_i}\mathbf{e}_i = h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2 + h_3\mathbf{e}_3 \qquad (23.15)$$

Для криволинейных координат выражение дифференциала радиуса - вектора имеет вид (15.15), так что составляющими вектора $d\,\mathbf{r}$ являются

$$\frac{\mathrm{d}s_k}{d\xi_k} = H_k \text{ или } \mathrm{d}s_k = H_k \mathrm{d}\xi_k. \qquad (24.15)$$

С другой стороны,

$$\frac{\mathrm{d}\xi_k}{\mathrm{d}s_k} = h_k \qquad (25.15)$$

Отсюда получается

$$h_i = 1/H_i \qquad (26.15)$$

Вывод дифференциалов длины дуги, площади и объёма

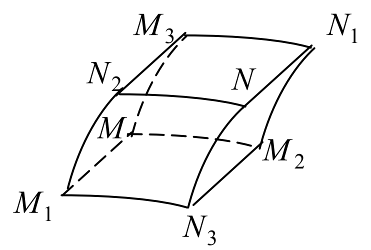


Рис. 2.15 Элемент объёма

Пусть $\mathrm{d}\mathbf{r} = \overline{MN}$, где N - бесконечно близкая к M точка. Проведем через N три координатных поверхности, которые вместе с тремя координатными поверхностями, проходящими через точку M, образуют криволинейный бесконечно малый параллелепипед. Рёбрами этого параллелепипеда будут **дифференциалы длины дуги** (20.15)

$$\mathrm{d}s_1 = H_1 \mathrm{d}\xi_1, \quad \mathrm{d}s_2 = H_2 \mathrm{d}\xi_2, \quad \mathrm{d}s_3 = H_3 \mathrm{d}\xi_3,$$

но тогда грани его будут иметь площади, равные **дифференциалу площади**

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 d\xi_2 d\xi_3, \quad d\sigma_2 = H_3 H_1 d\xi_3 d\xi_1, \quad d\sigma_3 = H_1 H_2 d\xi_1 d\xi_2 \qquad (27.15)$$

а **дифференциал объёма** (рис. 2.15) получается в виде

$$\mathrm{d}V = H_1 H_2 H_3 \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3. \qquad (28.15)$$

Замечание 4.15 Приведёнными формулами (13.15) удобно пользоваться, чтобы **находить коэффициенты Ламэ.**

Вывод градиента криволинейных координат

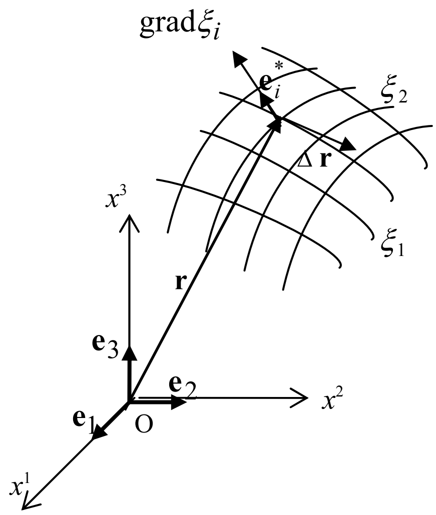


Рис. 3.15 К градиенту криволинейных координат

Докажем, что векторы $\mathrm{grad}\xi_1, \mathrm{grad}\xi_2, \mathrm{grad}\xi_3$ (рис. 3.15) образуют систему векторов, взаимных с

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3}. \qquad (29.15)$$

Для этого нужно показать, что скалярные произведения равны

$$\mathrm{grad}\xi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_i} = 1, \quad \mathrm{grad}\xi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_k} = 0, \quad (i \neq k) \qquad (30.15)$$

Умножая обе части равенства

$$d\,\mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3} d\xi_3 \qquad (31.15)$$

скалярно на $\mathrm{grad}\,\xi_i$, мы получим

$$d\xi_i = \mathrm{grad}\xi_i \cdot d\,\mathbf{r} = (\mathrm{grad}\xi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}) d\xi_1 + (\mathrm{grad}\xi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2}) d\xi_2 + (\mathrm{grad}\xi_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3}) d\xi_3 \qquad (32.15)$$

Отсюда в силу произвольности $d\,\xi_1, d\,\xi_2, d\,\xi_3$ следует, что произведение $(\mathrm{grad}\xi_i \cdot \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1})$ равно единице только, когда $i = 1$, то есть, когда остаётся только $(\mathrm{grad}\xi_1 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1})$. Когда $i = 2$ или 3, это произведение равно нулю. Аналогично доказывается, что равны единице только $(\mathrm{grad}\xi_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2})$ и $(\mathrm{grad}\xi_3 \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3})$.

Отсюда следуют формулы

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} = H_1\mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} = H_2\mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_3} = H_3\mathbf{e}_3. \tag{33.15}$$

Тогда

$$\mathrm{grad}\xi_i \cdot H_i\mathbf{e}_i = 1 \tag{34.15}$$

Умножим левую и правую части (34.15) на $\mathbf{e}_i$. Тогда

$$\mathrm{grad}\xi_i \cdot H_i = \mathbf{e}_i, \tag{35.15}$$

непосредственно вытекает: **градиент криволинейных координат в виде** (рис. 3.15)

$$\mathrm{grad}\xi_1 = \mathbf{e}_1/H_1, \quad \mathrm{grad}\xi_2 = \mathbf{e}_2/H_2, \quad \mathrm{grad}\xi_3 = \mathbf{e}_3/H_3 \tag{36.15}$$

Отсюда также следует, что

$$h_i = |\mathrm{grad}\xi_i| = \sqrt{(\partial\xi_i/\partial x_1)^2 + (\partial\xi_i/\partial x_2)^2 + (\partial\xi_i/\partial x_3)^2} \tag{37.15}$$

$$\mathrm{grad}\,\xi_i = h_i\mathbf{e}_i \qquad \mathrm{grad}\xi_i = \mathbf{e}_i/H_i \qquad h_i = 1/H_i \tag{38.15}$$

Отсюда

$$\mathrm{grad}\xi_k = \frac{\partial \xi_k}{\partial s_i}\mathbf{e}_i = \frac{\partial \xi_k}{\partial s_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial \xi_k}{\partial s_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial \xi_k}{\partial s_3}\mathbf{e}_3 \tag{39.15}$$

Вывод градиента скалярного поля $\varphi\,(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &= \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\mathrm{grad}\,\xi_k = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\xi_1}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\xi_1}{\partial x_3}\mathbf{e}_3) + \\ &+ \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}(\frac{\partial\xi_2}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\xi_2}{\partial x_3}\mathbf{e}_3) + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_3}(\frac{\partial\xi_3}{\partial x_1}\mathbf{e}_1 + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_2}\mathbf{e}_2 + \frac{\partial\xi_3}{\partial x_3}\mathbf{e}_3).\end{aligned} \tag{40.15}$$

Учитывая формулу

$\mathrm{grad}\xi_1 = \mathbf{e}_1/H_1, \quad \mathrm{grad}\xi_2 = \mathbf{e}_2/H_2, \quad \mathrm{grad}\xi_3 = \mathbf{e}_3/H_3,$

получим

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3) &== \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1}\cdot\mathrm{grad}\,\xi_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2}\cdot\mathrm{grad}\,\xi_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_3}\cdot\mathrm{grad}\,\xi_3 = \\ &= \frac{\mathbf{e}_1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_3}.\end{aligned} \tag{41.15}$$

Вывод формулы дивергенции векторного поля

Для вывода выражения дивергенции удобно использовать формулу её определения 12.14 взяв за V - объём бесконечно малого криволинейного параллелепипеда, одной из вершин которого является та точка М, в которой ищется значение дивергенции.

Грань $MM_2N_1M_3$ этого параллелепипеда имеет величину $\mathrm{d}\sigma_1 = H_2H_3\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3$ нормальная к этой грани составляющая вектора $\mathbf{a}$ равна - a_1 (мы считаем, что MM_1 направлено в сторону возрастания значений ξ_1, внешняя же нормаль к рассматриваемой грани направлена в противоположную сторону), поэтому поток через грань $MM_2N_1M_3$

будет равен - $a_1 H_2 H_3 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3$. Противоположная грань $M_1 N_3 N N_2$ отличается от грани $M M_2 N_1 M_3$ только тем, что ей отвечает значение $\xi_1 + d\xi_1$ координаты ξ_1, значения же других координат на этих двух гранях одни и те же. Поэтому поток через грань $M_1 N_3 N N_2$ будет равен

$$\left\{ a_1 H_2 H_3 + \frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial \xi_1} d\xi_1 \right\} \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3. \tag{42.15}$$

Складывая его с предыдущим выражением, получим для потока через две грани $M M_2 N_1 M_3$ и $M_1 N_3 N N_2$ выражение

$$\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial \xi_1} \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3 \tag{43.15}$$

и аналогично для потока через грани $M M_1 N_2 M_3$ и $M_2 N_3 N N_1$

$$\frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial \xi_2} \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3 \tag{44.15}$$

и через грани $M M_1 N_3 M_2$ и $M_3 N_2 N N_1$

$$\frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial \xi_3} \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3 \tag{45.15}$$

Складывая все выражения, получим полный поток

$$\oint_S a_n \, \mathrm{d}S \tag{46.15}$$

Деля его на объём параллелепипеда $\mathrm{d}V = H_1 H_2 H_3 \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3$, получим окончательно

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial \xi_3} \right] \tag{47.15}$$

В частности получим дивергенцию единичных векторов

Дивергенция единичных векторов

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_2 H_3)}{\partial \xi_1}, \\ \operatorname{div} \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_3 H_1)}{\partial \xi_2}, \\ \operatorname{div} \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial (H_1 H_2)}{\partial \xi_3}. \end{aligned} \tag{48.15}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = (H_1 H_2 H_3)^{-1} \left[\frac{\partial (a_1 H_2 H_3)}{\partial \xi_1} + \frac{\partial (a_2 H_3 H_1)}{\partial \xi_2} + \frac{\partial (a_3 H_1 H_2)}{\partial \xi_3} \right].$$

Вывод формулу ротора векторного поля a

Выражение для ротора в координатной форме имеет вид:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}x_i$$

Для вывода формулы ротора **используется выражение** (50.14). Чтобы получить проекцию $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ на координатную линию ξ_1, нужно взять за контур С контур $M\,M_2N_1M_3$; площадь бесконечно малого криволинейного прямоугольника, ограниченного этим контуром, равна

$$d\sigma_1 = H_2H_3\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3 \tag{49.15}$$

Нетрудно далее вычислить $\oint\limits_C \mathbf{a}\,d\,\mathbf{l}$**,** взятый по замкнутому контуру $M\,M_2N_1M_3$ (рис. 3.15).

Прежде всего

$$\oint\limits_{M\,M_2}\mathbf{a}\cdot d\,\mathbf{l} = a_2 d\,s_2 = a_2H_2\mathrm{d}\xi_2. \tag{50.15}$$

Далее,

$$\oint\limits_{M_2N_1}\mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{l} \tag{51.15}$$

отличается от предыдущего интеграла только тем, что в нём координата ξ_2 имеет другое значение $\xi_2+\mathrm{d}\,\xi_2$, значения же других координат те же, что и в интеграле (50.15).
Поэтому

$$\oint\limits_{M_3N_1}\mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{l} = \left\{a_2H_2 + \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial\xi_3}\mathrm{d}\xi_3\right\}\mathrm{d}\xi_2 \tag{52.15}$$

Точно так же можно вычислить

$$\oint\limits_{M\,M_3}\mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{l} = a_3H_3\,\mathrm{d}\xi_3;\qquad \oint\limits_{M_2N_1}\mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{l} = \left\{a_3H_3 + \frac{\partial(a_3H_3)}{\partial\xi_2}\mathrm{d}\xi_2\right\}\mathrm{d}\xi_3. \tag{53.15}$$

Поэтому

$$\oint\limits_{M\,M_2N_1M_3M}\mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{l} = \oint\limits_{M\,M_2}\mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{l} + \oint\limits_{M_2N_1}\mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{l} - \oint\limits_{M_3N_1}\mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{l} - \oint\limits_{M\,M_3}\mathbf{a}\,\mathrm{d}\,\mathbf{l} = \left\{\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial\xi_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial\xi_3}\right\}\mathrm{d}\xi_2\mathrm{d}\xi_3 \tag{54.15}$$

Деля это выражение на $d\,\sigma_1$, получим требуемое выражение

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot}\mathbf{a})_1 &= \frac{1}{H_2H_3}\left\{\frac{\partial(a_3H_3)}{\partial\xi_2} - \frac{\partial(a_2H_2)}{\partial\xi_3}\right\},\\
(\operatorname{rot}\mathbf{a})_2 &= \frac{1}{H_3H_1}\left\{\frac{\partial(a_1H_1)}{\partial\xi_3} - \frac{\partial(a_3H_3)}{\partial\xi_1}\right\},\\
(\operatorname{rot}\mathbf{a})_3 &= \frac{1}{H_1H_2}\left\{\frac{\partial(a_2H_2)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial(a_1H_1)}{\partial\xi_2}\right\}.
\end{aligned} \tag{55.15}$$

Ротор базовых векторов

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{e}_1 = \mathbf{e_2}\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial(H_1)}{\partial\xi_3} - \mathbf{e_3}\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial(H_1)}{\partial\xi_2} = \frac{1}{H_1}\operatorname{grad}H_1\times\mathbf{e}_1 \tag{56.15}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{e}_2 = \mathbf{e_3}\,\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial(H_2)}{\partial\xi_1} - \mathbf{e_1}\,\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial(H_2)}{\partial\xi_3} = \frac{1}{H_2}\,\mathrm{grad}\,H_2\times\mathbf{e}_2 \qquad (57.15)$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{e}_3 = \mathbf{e_1}\,\frac{1}{H_3H_2}\frac{\partial(H_3)}{\partial\xi_2} - \mathbf{e_2}\,\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial(H_3)}{\partial\xi_1} = \frac{1}{H_3}\,\mathrm{grad}\,H_3\times\mathbf{e}_3 \qquad (58.15)$$

Оператор Лапласа для скалярного поля ψ

$$\Delta\psi = (H_1H_2H_3)^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial\xi_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial\xi_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\psi}{\partial\xi_3}\right)\right]$$

Отсюда получаются дифференциальные характеристики в разных системах координат

Коэффициенты Ламэ и дифференциальные характеристики полей в цилиндрической системе координат

Связь цилиндрических координат с декартовыми координатами имеет вид

$\xi_1 = \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,

$\xi_2 = \varphi$ - угол между вектором $\boldsymbol{\rho} = \{x_1, x_2\}$ и осью x_1 ,

$\xi_3 = z = x_3$.

Из дифференциальной геометрии известно, что

$ds_1 = d\,\rho,$

$ds_2 = \rho\, d\varphi,$

$ds_3 = dz.$

Сравнивая с $ds_1 = H_1 d\,\xi_1$, $ds_2 = H_2 d\,\xi_2$, $ds_3 = H_3 d\,\xi_3$, получим

$$H_\rho = 1, \quad H_\varphi = \rho, \quad H_z = 1. \qquad (59.15)$$

Градиент скалярного поля ψ в цилиндрической системе координат (рис. 4.15)

$$\mathrm{grad}\,\psi = \mathbf{e}_\rho\,\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \mathbf{e}_\varphi\rho^{-1}\,\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_z\,\frac{\partial\psi}{\partial z},.$$

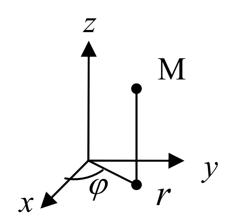


Рис. 4.15
Цилиндрическая система координат

Дивергенция векторного поля а в цилиндрической системе координат

$$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \rho^{-1}\left[\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho} + \frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi}\right] + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Ротор векторного поля а в цилиндрической системе координат

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_\rho = \rho^{-1}\,\frac{\partial a_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z},$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_\varphi = \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\rho},$$

$$(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_z = \rho^{-1}\left[\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right].$$

Лапласиан скалярного поля ψ в цилиндрической системе координат

$$\Delta\psi = \rho^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \rho^{-1}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right] + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

Коэффициенты Ламэ и дифференциальные характеристики полей в сферических координатах

$$ds_1 = d\,r, \quad ds_2 = r\,d\theta, \quad ds_3 = r\sin\theta\, d\varphi$$

Сравнивая с $ds_1 = H_1 d\,\xi_1$, $ds_2 = H_2 d\,\xi_2$, $ds_3 = H_3 d\,\xi_3$, получим коэффициенты Ламэ в виде

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta. \qquad (60.15)$$

Градиент скалярного поля ψ в сферических координатах (рис. 5.15)

$$\operatorname{grad}\psi = \mathbf{e}_r \frac{\partial\psi}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta r^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \mathbf{e}_\varphi (r\sin\theta)^{-1}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},.$$

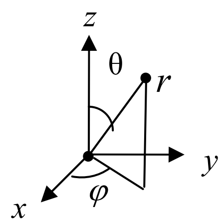


Рис. 5.15 Сферическая система координат

Дивергенция векторного поля a в сферических координатах

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = r^{-2}\frac{\partial\left(r^2 a_r\right)}{\partial r} + (r\sin\theta)^{-1}\left[\frac{\partial\left(a_\theta \sin\theta\right)}{\partial\theta} + \frac{\partial\left(a_\varphi\right)}{\partial\varphi}\right]$$

Ротор векторного поля a в сферических координатах

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{a}\right)_r = (r\sin\theta)^{-1}\left[\frac{\partial\left(a_\varphi \sin\theta\right)}{\partial\theta} - \frac{\partial\left(a_\theta\right)}{\partial\varphi}\right],$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{a}\right)_\theta = r^{-1}\left[\sin^{-1}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial\left(r\,a_\varphi\right)}{\partial r}\right],$$

$$\left(\operatorname{rot}\mathbf{a}\right)_\varphi = r^{-1}\left[\frac{\partial\left(r\,a_\theta\right)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial\theta}\right].$$

Лапласиан скалярного поля ψ в сферических координатах

$$\Delta\psi = r^{-2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \sin^{-1}\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \sin^{-2}\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right]$$

Замечание 5.15 Все приведенные выше характеристики сведены в таблицу 4 ПРИЛОЖЕНИЯ 2

§ 16 Основные уравнения гидромеханики жидкости

Уравнение неразрывности несжимаемой жидкости

Выделим в жидкости с плотностью ρ, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$, некоторый объём V. Величина $\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\, d\,V$ равна скорости изменения массы в объёме V, а величина $\int \rho\,\mathbf{v}\, d\mathbf{S}$ - массе жидкости, протекающей через границу S объёма V в единицу времени. Из закона сохранения массы следует соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho\, d\,V + \oiint\limits_{S_V} \rho\,\mathbf{v}\, d\mathbf{S} = 0$$

или

$$\iiint\limits_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \qquad (1.16)$$

Равенство (1.16) выполняется для произвольного объёма V , откуда следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 . \qquad (2.16)$$

Это и есть **уравнение неразрывности**

В тензорных обозначениях это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \upsilon_k)_{,k} = 0 \qquad (3.16)$$

или

$$\partial_o \rho + \partial_j (\rho \upsilon_j) = 0$$

Если плотность постоянна, то уравнение неразрывности можно записать в виде

$$\upsilon_{k,k} = 0 \qquad (4.16)$$

Трубка тока

Если $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ в некоторой области пространства R, то в ней силовые линии вектора $\mathbf{A}$ не обрываются. Проведём силовые линии вектора $\mathbf{A}$ и рассмотрим **трубку** этих **линий** (рис. 1.16), пересекающих плоскости S_1 и S_2, перпендикулярных вектору $\mathbf{A}$. Согласно теореме Остроградского – Гаусса, выполняется следующее тождество:

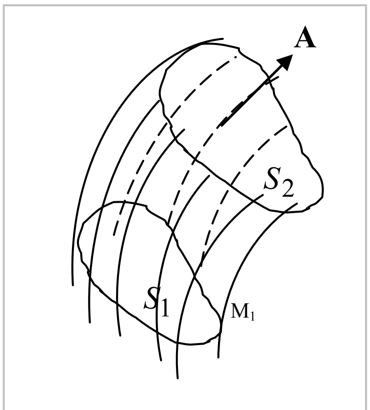


Рис. 1 .16 Трубка тока

$$\oiint\limits_{S_V} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oiint\limits_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} + \oiint\limits_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \iiint\limits_V \nabla \cdot \mathbf{A}\, dV = 0 ,$$

где S_V - полная поверхность, ограничивающая трубку, V её объём. При этом интеграл по боковой поверхности трубки равен нулю, так как там векторы $\mathbf{A}$ и $d\mathbf{S}$ ортогональны друг другу. По определению $\oiint\limits_{S_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ представляет собой число силовых линий, пересекающих S_1, а $\oiint\limits_{S_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}$ - число силовых линий, пересекающих S_2. Так как S_1 и S_2 можно взять сколь угодно малыми, силовые линии должны быть непрерывными, то есть должны либо замыкаться, либо простираться от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому силовые линии уничтожаются или возникают в точках, где $\nabla \cdot \mathbf{A} \neq 0$.

Рассмотрим частные случаи.

1) Если $\mathbf{H}$ - вектор магнитного поля, то $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$, так как известно, что не существует магнитных зарядов.
2) В электростатике имеется уравнение $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$, где $\mathbf{E}$ - вектор электрического поля и ρ - плотность электрических зарядов. Силовые линии электрического поля начинаются или кончаются на зарядах или в бесконечности.

Задача 1.16 Дано поле скоростей $\upsilon_1 = x_1/(1+t)$, $\upsilon_2 = 2x_2/(1+t)$, $\upsilon_3 = 3x_3/(1+t)$.и начальное условие в виде $x_i = X_i$ при $t = 0$. Найти **линии тока и траектории** и доказать, что они **совпадают.**

Решение. Касательная **к линии тока** в каждой точке **направлена по вектору скорости**. Следовательно, для бесконечно малого вектора $d\mathbf{x}$ касательной к линии тока можно написать $\mathbf{v}\times d\mathbf{x}=0$ и получить таким образом дифференциальные уравнения линий тока

$$\frac{dx_1}{\upsilon_1}=\frac{dx_2}{\upsilon_2}=\frac{dx_3}{\upsilon_3}.$$

Для указанного течения эти уравнения имеют вид

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{2x_2}=\frac{dx_3}{3x_3}$$

Интегрируя их с учётом начальных условий $x_i=X_i$ при $t=0$, находим **уравнения линий тока:**

$$\left(\frac{x_1}{X_1}\right)^2=\frac{x_2}{X_2},\quad \left(\frac{x_1}{X_1}\right)^3=\frac{x_3}{X_3},\quad \left(\frac{x_2}{X_2}\right)^3=\left(\frac{x_3}{X_3}\right)^2$$

Интегрирование выражений для скорости, например, $\dfrac{dx_i}{dt}=\upsilon_i=x_1/(1+t)$ приводит к дифференциальному уравнению $\dfrac{dx_i}{x_1}=\dfrac{dt}{1+t}$, интеграл которого имеет вид $\ln x_1=\ln(1+t)+\ln C$, где C – постоянная интегрирования. Из начального условия $x_i=X_i$ при $t=0$ получается $C=X_1$. Отсюда $x_1=X_1(1+t)$. Аналогично находятся $x_2=X_2(1+t)^2$ и $x_3=X_3(1+t)^3$. Исключая из этих уравнений время t, получим **траектории.** $(1+t)=\dfrac{x_1}{X_1}$, $\dfrac{x_2}{X_2}=(1+t)^2=\left(\dfrac{x_1}{X_1}\right)^2$, $\dfrac{x_3}{X_3}=(1+t)^3=\left(\dfrac{x_1}{X_1}\right)^3$, что и подтверждает **совпадение траекторий жидких частиц и линий тока**.

Тензор напряжений.

Рассмотрим тело, погруженное в среду (твёрдую, жидкую или газообразную). Вообще говоря, на него будут действовать как силы вида $\int \mathbf{F}\,dV$ (гравитационные или электрические, действующие на заряженное тело), так и поверхностные силы, ввиду того. что каждый элемент поверхности тела взаимодействует с окружающей средой.

Пусть f_i - сила, действующая на элемент поверхности $d\mathbf{S}$ и приложенная к внешней стороне поверхности, ограничивающей объём. Можно предположить (по крайней мере, для достаточно малых площадок), что f_i пропорциональна площади элемента поверхности:

$$f_i=\sum_j T_{ij}dS_j\,. \tag{5.16}$$

Так как $\mathbf{f}$ и $d\mathbf{S}$ - векторы, величина T_{ij} должна быть тензором 2-го ранга. Этот тензор называется **тензором напряжений**. Полная сила $\mathbf{F}$, действующая на тело, таким образом, равна (в силу теоремы Остроградского – Гаусса)

$$\mathbf{F}=\iiint\limits_V F_i dV+\sum_j\iint\limits_{S_V} T_{ij}dS_j=\iiint\limits_V\left(F_i+\sum_j\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\right)dV\,, \tag{6.16}$$

откуда видно, что поверхностные силы можно заменить эквивалентными объёмными силами (в смысле выполнения равенства (6.16)).

По второму закону Ньютона

$$(\mathbf{F})_i = \iiint\limits_V \rho\, a_i dV\,, \tag{7.16}$$

где $\mathbf{a}$ - ускорение, а ρ - плотность вещества. Так как равенство (7.16) справедливо для любого объёма V, получим уравнение движения

$$\rho\, a_i = F_i + \sum_j \frac{\partial T_{i\,j}}{\partial x_j} \tag{8.16}$$

Для того, чтобы выяснить физический смысл тензора напряжений, учтём, что вектор $d\mathbf{S}$ параллелен координатной оси x_1. Тогда из равенства

$$f_i = T_{i1}dS_1 + T_{i2}dS_2 + T_{i3}dS_3$$

следует

$$f_1 = T_{11}dS,\quad f_2 = T_{21}dS,\quad f_3 = T_{31}dS\,.$$

Аналогичные результаты получаются и в том случае, когда вектор $d\mathbf{S}$ параллелен координатным осям x_2 и x_3 соответственно:

$$f_1 = T_{12}dS,\quad f_2 = T_{22}dS,\quad f_3 = T_{32}dS\,,$$

$$f_1 = T_{13}dS,\quad f_2 = T_{23}dS,\quad f_3 = T_{33}dS\,.$$

Выберем систему координатных осей так, чтобы $T_{i\,j} = \lambda_i \delta_{i\,j}$. Для тела, у которого вектор $d\mathbf{S}$ параллелен, например, оси x, имеем:

$$f_1 = \lambda_1\, dS,\quad f_2 = f_3 = 0\,.$$

Сила, действующая на тело в данном случае, есть сила растяжения ($\lambda_1 > 0$) или сила сжатия ($\lambda_1 < 0$) вдоль оси x_1.

В случае произвольного направления вектора $d\mathbf{S}$ тело будет находиться под воздействием напряжений сдвига.

Идеальная жидкость.

Силы, действующие на любой элемент поверхности идеальной жидкости, нормальны к её поверхности, поэтому для идеальной жидкости тензор напряжений в любой системе координат имеет вид

$$T_{i\,j} = -P\delta_{i\,j}\,,$$

где P – **некоторая функция координат**. Следовательно, согласно формуле (8.16), уравнение движения любой частицы принимает вид

$$\rho\mathbf{a} = \mathbf{F} - \nabla P\,.$$

Вычислим ускорение $\mathbf{a}$. Пусть $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r},t)$; пусть далее $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o$ при $t = t_o$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{v}\delta t$ при $t = t_o + \delta t$. Воспользовавшись формулой Тейлора, найдём

$$\mathbf{a}\delta t = \mathbf{v}(\mathbf{r}_o + \mathbf{v}\delta t,\, t_o + \delta t) - \mathbf{v}(\mathbf{r}_o,\, t_o) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \delta \mathbf{r}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{v} = \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]\delta t\,,$$

то есть,

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right] = \mathbf{F} - \nabla P.$$

В индексной форме это уравнение имеет вид

$$\rho\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \rho\upsilon_k\,\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}$$

Дифференциальные уравнения движения жидкости

Для вывода дифференциальных уравнений сплошной среды выделяется её часть объёма V, ограниченная поверхностью S. При движении сплошной среды обычно V и S меняются, но масса остаётся постоянной так что

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho \, dV = 0 \tag{9.16}$$

К выделенной части среды применяется второй закон Ньютона (Производная по времени от импульса (количества движения) материальной точки равен действующей на неё силе $\frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{F}_i$). Это делается путём вычисления количества движения и всех приложенных сил.

а) Количество движения (импульс) выделенной части равен

$$\iiint\limits_V \rho \, \mathbf{v} \, dV \tag{10.16}$$

б) Если на каждую частицу массы действует сила $\boldsymbol{f}$, то **главный вектор** всех **массовых** сил, приложенных к выделенной части среды, равен

$$\iiint\limits_V \boldsymbol{f} \, \rho \, dV \tag{11.16}$$

Здесь $\boldsymbol{f}$ - **интенсивность** массовых сил (в поле тяжести $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g}$, где $\boldsymbol{g}$ - **ускорение** силы тяжести)

в) К поверхности рассмотренной части среды приложены ещё **поверхностные** силы, **напряжения** которых на элемент поверхности dS с **внешней** нормалью $\mathbf{n}$ равен $\mathbf{p}_n$. Тогда главный вектор поверхностных сил, приложенных к этой части среды, равен

$$\oint\!\!\!\oint\limits_S \mathbf{p}_n \, dS , \tag{12.16}$$

и уравнение движения её имеет вид

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_V \rho \, \mathbf{v} \, dV = \iiint\limits_V \rho \boldsymbol{f} \, dV + \oint\!\!\!\oint\limits_S \mathbf{p}_n \, dS .$$

Поскольку масса любого объёма ΔV в силу уравнения неразрывности остаётся постоянной, то $\frac{d}{dt}(\rho \Delta V) = 0$. Следовательно,

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_V \rho \, \mathbf{v} \, dV = \iiint\limits_V \frac{d}{dt}(\rho \, \mathbf{v}) dV \tag{13.16}$$

Таким образом,

$$\iiint\limits_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \, dV = \iiint\limits_V \rho \boldsymbol{f} \, dV + \oint\!\!\!\oint\limits_S \mathbf{p}_n \, dS \tag{14.16}$$

Учитывая выражение для $\mathbf{p}_n$ в тензорном виде $\oint\!\!\!\oint\limits_S \mathbf{p}_n \, dS = \oint\!\!\!\oint\limits_S \boldsymbol{p}_k n_k \, dS$, получим

$$\iiint\limits_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV = \iiint\limits_V \rho \boldsymbol{f} \, dV + \oint\!\!\!\oint\limits_S \boldsymbol{p}_k n_k \, dS \tag{15.16}$$

или в компонентах ($i = 1,2,3$)

$$\iiint_V \rho \frac{d\upsilon_i}{dt} dV = \iiint_V \rho f_i \, dV + \oint\!\!\!\oint_S p_{ik} n_k \, dS , \tag{16.16}$$

где p_{ik} - тензор напряжений.

Чтобы получить дифференциальное уравнение движения сплошной среды, преобразуем поверхностный интеграл в объёмный по формуле Остроградского – Гаусса. Получим

$$\oint\!\!\!\oint_S p_{ik} n_k \, dS = \iiint_V \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} dV \tag{17.16}$$

Тогда

$$\iiint_V \left\{ \rho \frac{d\upsilon_i}{dt} - \rho f_i - \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \right\} dV = 0 \tag{18.16}$$

Так как объём τ произволен, то при непрерывности подынтегральной функции получается

$$\rho \frac{d\upsilon_i}{dt} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \tag{19.16}$$

Здесь $\frac{d\upsilon_i}{dt}$ - полная производная , которая выражается в виде:

$$\frac{d\upsilon_i}{dt} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \upsilon_k \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} . \tag{20.16}$$

Таким образом, окончательно дифференциальные уравнения (их три при $i = 1,2,3$) движения сплошной среды имеют вид

$$\rho \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \rho \upsilon_k \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_k} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k} \tag{21.16}$$

Для жидкостей принимается линейная зависимость между тензором напряжений и тензором деформаций с выделением шарового тензора, отвечающего гидростатическому движению. Таким образом, в гидродинамике считают, что выполняется основное соотношение

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + a\,\upsilon_{ik} + b\,\delta_{ik}\upsilon_{ll} \tag{22.16}$$

Здесь p - гидростатическое давление (**скаляр**), a и b -коэффициенты пропорциональности; $\upsilon_{ll} = \frac{\partial \upsilon_l}{\partial x_l} = \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_3}$ - свёртка тензора скоростей деформаций, которая равна дивергенции скорости $\upsilon_{ll} = \mathrm{div}\mathbf{v}$.

Обычно в гидромеханике это соотношение (иногда его называют обобщённой гипотезой Ньютона) записывается в виде

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\mu\,\upsilon_{ik} - \frac{2}{3}\mu\,\delta_{ik}\upsilon_{ll} \tag{23.16}$$

так что

$$p_{11} + p_{22} + p_{33} = -3p ,$$

где μ - коэффициент вязкости жидкости (коэффициент, так называемой, второй вязкости принят равным нулю)[2].

В случае несжимаемой жидкости имеем $\mathrm{div}\mathbf{v} = 0$, и тогда

[2] Подробности о второй вязкости см. Лойцанский Механика жидкости и газа, ГИТТЛ, 1957, стр. 463 – 466.

$$p_{ik} = -p\delta_{ik} + 2\mu\,\upsilon_{ik} \tag{24.16}$$

, а в случае жидкости, находящейся в покое, и в случае идеальной жидкости имеем:

$$p_{ik} = -p\delta_{ik}\,.$$

Подставляя различные выражения для p_{ik} в уравнение (21.16), получим уравнения движения.

Уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера)

$$\rho\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t} + \rho\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_k},$$

в обобщённых координатах

$$\rho\frac{\partial\upsilon^i}{\partial t} + \rho\upsilon^k\upsilon^i_{;k} = \rho f^i + p^{ik}_{;k} \tag{25.16}$$

или в векторной записи

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \rho\boldsymbol{f} - \nabla\mathbf{p}\,; \tag{26.16}$$

Уравнение движения вязкой несжимаемой жидкости уравнение Навье – Стокса) при $\mu = const$

\-

$$\rho\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t} + \rho\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial^2\upsilon_i}{\partial x_k\partial x_k} \tag{27.16}$$

или в векторной записи

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \rho\boldsymbol{f} - \nabla\mathbf{p} + \mu\Delta\mathbf{v}\,, \tag{28.16}$$

Здесь учтено, что $\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_k} = 0$.

в) вязкой сжимаемой жидкости (при $\mu = const$) –

$$\rho\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t} + \rho\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_k} + \mu\frac{\partial^2\upsilon_i}{\partial x_k\partial x_k} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\upsilon_k}{\partial x_k} \tag{29.16}$$

или в векторной форме

$$\rho\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \rho\boldsymbol{f} - \nabla\mathbf{p} + \mu\Delta\mathbf{v} + \frac{1}{3}\mu\nabla\operatorname{div}\mathbf{v} \tag{30.16}$$

В случае обобщённых координат уравнение движения должно быть сформулировано относительно компонент векторов.

Пусть поле скоростей есть функция времени t и обобщённых координат x^1, x^2, x^3. И скорость $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x^1, x^2, x^3)$. Тогда приращение скорости частицы жидкости при перемещении из точки x^i в точку $x^i = x^i + d\,x^i$ равно

$$d\,\mathbf{v} = d\,\mathbf{v}_{\text{loc}} + d\,\mathbf{v}_{\text{conv}}\,,$$

где $d\,\mathbf{v}_{\text{loc}} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}dt$ - локальная часть изменения скорости, а $d\,\mathbf{v}_{\text{conv}} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_k}d\,x^k$ - **конвективная часть изменения** скорости, то есть, ускорение

$$\mathbf{a} = \frac{d\,\mathbf{v}}{d\,t} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x^k}\upsilon^{\text{k}}\,, \tag{31.16}$$

или в индексной записи

$$a^i = \frac{\partial \upsilon^i(\mathbf{x},t)}{\partial t} + \upsilon^k(\mathbf{x},t)\frac{\partial \upsilon^i(\mathbf{x},t)}{\partial x^k}$$

где $\upsilon^k = \frac{dx^k}{dt}$ - **контравариантные компоненты скорости**.

Отсюда, учитывая определение ковариантной производной $(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x^k}\cdot e^i = A^i_{;k})$, получим контравариантные компоненты ускорений

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\cdot\mathbf{e}^i = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)^k = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}\cdot\mathbf{e}^i + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k}\cdot\mathbf{e}^i\upsilon^k = \frac{\partial \upsilon^i}{\partial t} + \upsilon^k\upsilon^i_{;k}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x^k} \qquad (32.16)$$

Таким образом, в случае обобщённых координат вместо (21.16) получим

$$\rho\frac{\partial \upsilon^i}{\partial t} + \rho\upsilon^k\upsilon^i_{;k} = \rho f^i + p^{ik}_{;k} \qquad (33.16)$$

где $p^{ik}_{;k}$ - свёртка ковариантной производной тензора напряжений.

В случае вязкой жидкости имеем

$$p^{ik} = -pg^{ik} + 2\mu\upsilon^{ik} - \frac{2}{3}\mu g^{ik}\upsilon^l{}_{;l} \qquad (34.16)$$

где компоненты тензора скоростей деформаций имеют выражение

$$\upsilon^{ik} = g^{il}g^{km}\upsilon_{lm} = g^{il}g^{km}\frac{1}{2}(\upsilon_{l;m} + \upsilon_{m;l}) \qquad (35.16)$$

При этом $\upsilon^l_{;l}$ - **дивергенция вектора скорости.**

Выражение $p^{ik}_{;k}$ - **дивергенция вектора напряжений**.

Учитывая, что **ковариантная производная от метрического тензора** g^{ik} **равна нулю**, получим

$$p^{ik}_{;k} = -p_{ik}g^{ik} + 2\mu\upsilon^{ik}_{;k} - \frac{2}{3}\mu g^{ik}(\upsilon^l_{;l})_{;k} \qquad (36.16)$$

Но

$$\upsilon^{ik}_{;k} = g^{il}g^{km}\frac{1}{2}[(\upsilon_{l;m})_{;k} + (\upsilon_{m;l})_{;k}] = \frac{1}{2}g^{km}(\upsilon^l_{;m})_{;k} + \frac{1}{2}g^{il}(\upsilon^k_{;l})_{;k} \qquad (37.16).$$

Предполагая $\frac{\partial^2\upsilon^i}{\partial x^k\partial x^l} = \frac{\partial^2\upsilon^i}{\partial x^l\partial x^k}$, получим $(\upsilon^k_{;l})_{;k} = (\upsilon^k_{;k})_{;l}$. Теперь подставляя $p^{ik}_{;k}$ в (34.16), можно записать уравнение **Навье – Стокса** в обобщённых координатах в виде

$$\rho\frac{\partial \upsilon^i}{\partial t} + \rho\upsilon^k\upsilon^i_{;k} = \rho f^i_{,} - g^{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k} + \frac{1}{3}\mu g^{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}(\upsilon^l_{;l}) + \mu g^{km}(\upsilon^i_{;m})_{;k} \qquad (38.16)$$

Или, переходя к ковариантным компонентам:

$$\rho\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} + \rho\upsilon^k\upsilon_{i;k} = \rho f_{,i} - \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{1}{3}\mu\frac{\partial}{\partial x^i}(\upsilon^l_{;l}) + \mu g^{km}(\upsilon_{i;m})_{;k} \qquad (39.16)$$

Здесь выражение $g^{km}(\upsilon_{i;m})_{;k}$ представляет собой **ковариантные компоненты вектора** $\Delta\mathbf{v}$.

Замечание 1.16 Пользуясь формулами (38.16) и (39.16) и вводя «физические» компоненты векторов, всегда можно получить уравнение Навье-Стокса в любой конкретной системе криволинейных координат.

Закон Архимеда

Сила, действующая со стороны жидкости на погруженное в неё тело с поверхностью S, равна

$$\mathbf{R} = \oint\!\!\!\oint_S \mathbf{p}_n\, dS = \oint\!\!\!\oint_S p_k n_k\, dS\,. \qquad (40.16)$$

Отсюда

$$R_i = \oint\!\!\!\oint_S p_{ik} n_k\, dS \qquad (41.16)$$

Если жидкость покоится ($\mathbf{v} = 0$), то

$$p_{ik} = -p\,\delta_{ik} \qquad (42.16)$$

$$\nabla\rho = \rho\,\boldsymbol{f} = \rho\,\boldsymbol{g} \text{ (массовые силы равны силам тяжести)} \qquad (43.16)$$

Тогда

$$R_i = -\oint\!\!\!\oint_S p\, n_i\, dS, \qquad (44.16)$$

или

$$\mathbf{R} = -\oint\!\!\!\oint_S p\,\mathbf{n}\; dS\,.$$

Используя теорему Остроградского – Гаусса, получим

$$\mathbf{R} = -\oint\!\!\!\oint_S p\mathbf{n}\; dS = -\iiint_V \nabla\, p\, dV \qquad (45.16)$$

Подставляя ∇p из уравнения равновесия (43.16), получим

$$\mathbf{R} = -\iiint_V \rho\,\mathbf{g}\, dV = -\mathbf{g}\iiint_V \rho\, dV = -\mathbf{g}\, m = -\mathbf{G}\,. \qquad (46.16)$$

Таким образом, сила, действующая со стороны жидкости на погруженное в неё тело, по величине равна $\mathbf{G}$ - весу жидкости в объёме тела – и направлена в обратную сторону.

Теорема импульса в гидродинамике

Эта теорема занимает важное место в аэрогидромеханике, особенно в экспериментальной. Эта теорема позволяет определить силу, действующую на выделенный объём жидкости, зная только её скорость (и плотность в случае сжимаемой жидкости) на поверхности этого объёма, а также силу, действующую на помещённое в движущуюся жидкость тело, по напряжениям и скорости (и плотности) жидкости на определённой поверхности (так называемой «контрольной» поверхности).

Количество движения жидкости, находящейся в момент времени в некоторой фиксированной пространственной области V, равно

$$\iiint_V \rho\,\mathbf{v}\, dV \qquad (47.16)$$

С течением времени это количество движения меняется, так как через V проходят различные массы жидкости. Скорость изменения его равна

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{v}\,dV\,. \tag{48.16}$$

Поскольку область V является фиксированной, то

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{v}\,dV = \iiint\limits_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\mathbf{v})dV \tag{49.16}$$

Переходя к компонентам, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho\upsilon_i\,dV = \iiint\limits_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho\upsilon_i)dV = \iiint\limits_V \left(\upsilon_i\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t}\right)dV \tag{50.16}$$

Будем считать, что массовые силы отсутствуют ($\boldsymbol{f} = 0$). Тогда, определяя $\dfrac{\partial\rho}{\partial t}$ из уравнения неразрывности

$$\rho\frac{\partial\upsilon_i}{\partial t} + \rho\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k} = \rho f_i + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\,, \tag{51.16}$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho\upsilon_i\,dV &= \iiint\limits_V \left[-\upsilon_i\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho\upsilon_k) - \rho\upsilon_k\frac{\partial\upsilon_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p_{ik}}{\partial x_k}\right]dV = \\ &= -\iiint\limits_V \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho\upsilon_i\upsilon_k - p_{ik}\right)dV\end{aligned} \tag{52.16}$$

Преобразуя интеграл, стоящий в правой части, по формуле Остроградского – Гаусса

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V \rho\upsilon_i\,dV = -\oint\!\!\!\oint\limits_S \left(\rho\upsilon_i\upsilon_k - p_{ik}\right)n_k dS = -\oint\!\!\!\oint\limits_S \Pi_{ik}\,n_k dS \tag{53.16}$$

где

$$\Pi_{ik} = \rho\upsilon_i\upsilon_k - p_{ik} \tag{54.16}$$

Слева в уравнении (53.16) стоит скорость изменения i-той компоненты количества движения жидкости в рассматриваемой ограниченной области. Эта скорость определяется той же i-той компонентой потока тензора Π_{ik} через замкнутую поверхность S, ограничивающую область (V). Таким образом, величина $\Pi_{ik}\,n_k dS$ равна i-той компоненте того количества движения, которое в единицу времени уносится через элемент поверхности dS, протекающей через V жидкостью. Тогда, очевидно, что величина Π_{ik} есть i-тая компонента количества движения, уносимая в единицу времени через единичную площадь поверхности S, перпендикулярную k - той оси.

Определение 1.16. Тензор Π_{ik} называется **тензором плотности потока импульса**.

Весь поток количества движения через поверхность равен потоку тензора Π_{ik} через неё, то есть.

$$\oint\!\!\!\oint\limits_S \Pi_{ik}\,n_k dS \tag{55.16}$$

Следует отличать поток импульса от потока вектора $\rho\mathbf{v}$, который равен $\oint\!\!\!\oint\limits_S \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,dS$.

Поток вектора $\rho\mathbf{v}$ (количество движения единицы объёма жидкости) по величине равен массе жидкости, протекающей в единицу времени через единичную площадку поверхности S, расположенную перпендикулярно к скорости. Поэтому вектор $\rho\mathbf{v}$ **называют плотностью потока жидкости.**

Если движение жидкости стационарно $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}=0\right)$, то из (53.16) получим

$$\oiint_S \Pi_{ik}\, n_k\, dS = \oiint_S \left(\rho\upsilon_i\upsilon_k - p_{ik}\right) n_k\, dS = 0 \qquad (56.16)$$

Это уравнение выражает **теорему импульсов,** которую можно сформулировать так:
При стационарном движении жидкости и равенстве нулю массовых сил поток тензора $\Pi_{ik}=\rho\upsilon_i\upsilon_k - p_{ik}$ через любую взятую в жидкости замкнутую поверхность равен нулю.

Теорема импульсов позволяет непосредственно **выразить силу**, действующую на выделенный объём жидкости, **через скорость и плотность** жидкости на поверхности этого объёма (рис. 2.16)..

Действительно, поскольку массовые силы отсутствуют, то

$$\oiint_S p_{ik}\, n_k\, dS \qquad (57.16)$$

даёт i-тую компоненту главного вектора всех сил, действующих на выделенный объём жидкости. Обозначим её через F_i. Таким образом, из (55.16) имеем:

$$F_i = -\oiint_S \rho\upsilon_i\upsilon_k\, n_k\, dS \qquad (58.16)$$

или в векторной форме

$$\mathbf{F} = \oiint_S \rho\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS \qquad (59.16)$$

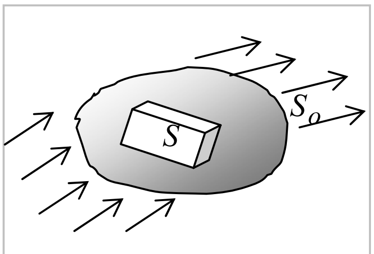


Рис. 2.16 К теореме импульсов

Пусть в стационарном потоке жидкости $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}=0\right)$ при отсутствии массовых сил ($\boldsymbol{f}=0$). Помещено твёрдое тело с поверхностью S_o, произвольную, фиксированную, но так, чтобы она полностью охватывала твёрдое тело. Применим к объёму жидкости между поверхностью твёрдого тела S и центральной поверхностью S_o теорему импульсов (50.16) . Получим

$$\oiint_S p_{ik}\, n_k\, dS + \oiint_{S_o} p_{ik}\, n_k\, dS_o - \oiint_S \rho\upsilon_i\upsilon_k\, n_k\, dS - \oiint_{S_o} \rho\upsilon_i\upsilon_k\, n_k\, dS_o = 0\,.$$

Первый интеграл даёт выражение для компоненты силы, действующей со стороны тела на рассматриваемы объём жидкости, взятый со знаком минус, он даёт компоненту R_i силы, действующей со стороны жидкости на тело, то есть

$$R_i = -\oiint_S p_{ik}\, n_k\, dS \qquad (60.16)$$

Третий интеграл равен нулю в силу отсутствия протекания жидкости через поверхность твёрдого тела ($\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=\upsilon_{\mathbf{k}} n_k = 0$ на поверхности тела S).

Следовательно,

$$R_i = \oiint\limits_{S_o} \left(p_{ik} - \rho \upsilon_i \upsilon_k \right) n_k dS_o \qquad (61.16)$$

Итак, чтобы определить силу, действующую на твёрдое тело в стационарном потоке жидкости, достаточно на некоторой поверхности S_o, которая может быть удобной для эксперимента, измерить направление поверхностных сил, скорость и плотность жидкости.

Особенно простую формулировку приобретает теорема импульсов, если можно пренебречь силами вязкости. В этом случае, как уже отмечалось,

$$R_i = - \oiint\limits_{S_o} \left(p n_i + \rho \upsilon_i \upsilon_k n_k \right) n_k dS_o \qquad (62.16)$$

или в векторной записи

$$\mathbf{R} = - \oiint\limits_{S_o} [p \mathbf{n} + \rho \mathbf{v} \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \right)] dS_o \qquad (63.16)$$

Таким образом, в этом случае достаточно на контрольной поверхности произвести замеры **давления и вектора скорости жидкости**, чтобы получить **силу**, действующую на твёрдое тело. Этот приём часто используют в аэродинамических экспериментах.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. Произведения векторов

Скалярное произведение двух векторов

Определение 1. Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними.

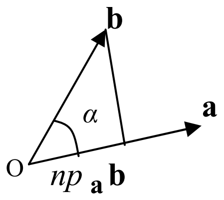


Рис. 1 К скалярному произведению векторов.

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cos\alpha \qquad (1)$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot np_{\mathbf{a}}\mathbf{b} \qquad (2)$$

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{b}|\cdot np_{\mathbf{b}}\mathbf{a} \qquad (3)$$

Определение 2. Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется произведение модуля одного вектора на проекцию на него другого вектора.

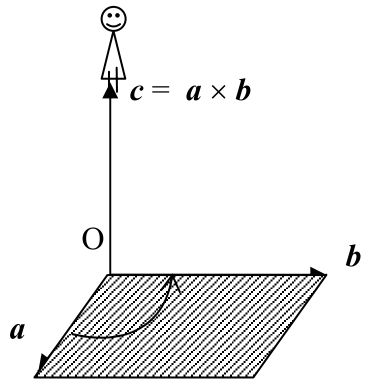


Рис. 2. К определению векторного произведение

Векторное произведение двух векторов

Определение 3. Векторным произведением двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$, отвечающий следующим трём условиям:

1) модуль вектора $\mathbf{c}$ численно равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$,
2) вектор $\mathbf{c}$ направлен перпендикулярно плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$,
3) вектор $\mathbf{c}$ направлен в такую сторону, что если смотреть с конца вектора $\mathbf{c}$, то кратчайший путь от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ происходит против часовой стрелки.

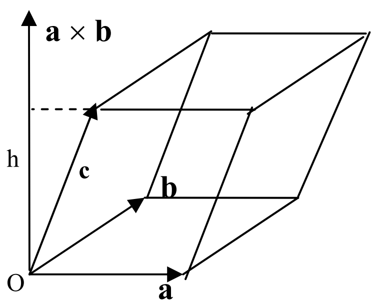


Рис. 3 К смешанному произведению

Векторно – скалярное (смешанное) произведение трёх векторов

Определение 4. Смешанным произведением называется векторно – скалярное произведение трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$

Теорема о смешанном произведении: Смешанное произведение трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ численно равно объёму параллелепипеда, построенного на векторах – сомножителях, взятому со знаком плюс, если тройка векторов правая, и со знаком минус, если– левая.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \pm V \qquad (4)$$

Замечание 1 Если векторы заданы своими координатами в декартовой системе,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_{\mathbf{x}}\mathbf{i} + a_{\mathbf{y}}\mathbf{j} + a_{\mathbf{z}}\mathbf{k}, \\ \mathbf{b} &= b_{\mathbf{x}}\mathbf{i} + b_{\mathbf{y}}\mathbf{j} + b_{\mathbf{z}}\mathbf{k}, \\ \mathbf{c} &= c_{\mathbf{x}}\mathbf{i} + c_{\mathbf{y}}\mathbf{j} + c_{\mathbf{z}}\mathbf{k}. \end{aligned} \qquad (5)$$

то смешанное произведение равно определителю, составленному из координат этих векторов.

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \pm\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (6)$$

Векторно – векторное произведение $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

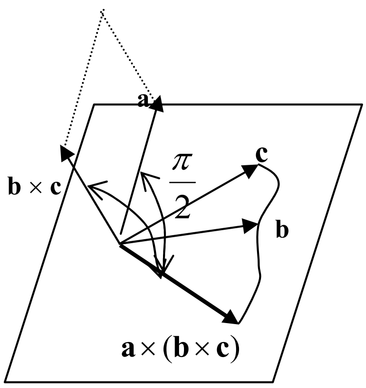


Рис. 4 К векторно – векторному произведению

Векторно-векторное произведение трёх векторов равно

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \qquad (7)$$

где три вектора $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ даны в декартовой системе координат в виде (5)

Из рис. 4 видно, что векторно- векторное произведение лежит в одной плоскости с векторами $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и, одновременно, перпендикулярно вектору $\mathbf{a}$.

Замечание 2. Так как геометрическое доказательство очень громоздко и сложно, просто сравним левую и правую часть равенства (7)

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица 1 Выражение элементов полей через коэффициенты Ламэ

№	Величина	Выражение в декартовой системе координат	Выражение в ортогональной криволинейной системе координат
1	Коэффициенты Ламэ	–	$H_i = \sqrt{(\partial x_1/\partial \xi_i)^2 + (\partial x_2/\partial \xi_i)^2 + (\partial x_3/\partial \xi_i)^2}$
1	Радиус – вектор точки M	$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$	$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$
2	Дифференциал радиуса - вектора	$\lvert \mathrm{d}\mathbf{r} \rvert = \mathrm{d}s$	$d\mathbf{r} = \dfrac{\partial s_i}{\partial \xi_k} d\xi_k \mathbf{e}_i = H_i d\xi_i \mathbf{e}_i$
3	Дифференциал длины дуги при $x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$.	$ds = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2}$, $dx_1 = \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \dfrac{\partial x_1}{\partial \xi_3} d\xi_3$ $dx_2 = \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \dfrac{\partial x_2}{\partial \xi_3} d\xi_3$ $dx_3 = \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \dfrac{\partial x_3}{\partial \xi_3} d\xi_3$	$ds_i = H_i d\xi_i$
4	Дифференциал площади	$d\sigma_1 = ds_2 \cdot ds_3$ $d\sigma_2 = ds_1 \cdot ds_3$ $d\sigma_3 = ds_1 \cdot ds_2$	$d\sigma_1 = H_2 H_3 d\xi_2 d\xi_3$, $d\sigma_2 = H_3 H_1 d\xi_3 d\xi_1$, $d\sigma_3 = H_1 H_2 d\xi_1 d\xi_2$
5	Дифференциал объёма	$dV = ds_1 \cdot ds_2 \cdot ds_3$	$\mathrm{d}V = H_1 H_2 H_3 \mathrm{d}\xi_1 \mathrm{d}\xi_2 \mathrm{d}\xi_3$.
6	Градиент скалярного поля $\mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi$	$\nabla\varphi = \mathbf{i}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}$	$\mathrm{grad}\,\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_k}\nabla\xi_k =$ $= \dfrac{\mathbf{e}_1}{H_1}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} + \dfrac{\mathbf{e}_2}{H_2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_2} + \dfrac{\mathbf{e}_3}{H_3}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi_3}$. .
7	Дивергенция векторного поля $\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \nabla\cdot\mathbf{a}$	$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \nabla\cdot\mathbf{a} = \dfrac{\partial a_x}{\partial x} + \dfrac{\partial a_y}{\partial y} + \dfrac{\partial a_z}{\partial z}$	$\mathrm{div}\,\mathbf{a} = \dfrac{1}{H_1 H_2 H_3} \cdot$ $\cdot \left[\dfrac{\partial(a_1 H_2 H_3)}{\partial\xi_1} + \dfrac{\partial(a_2 H_3 H_1)}{\partial\xi_2} + \dfrac{\partial(a_3 H_1 H_2)}{\partial\xi_3}\right]$
8	Ротор векторного поля $\mathrm{rot}\,\mathbf{a} = \nabla\times\mathbf{a}$	$\nabla\times\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$	$(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_1 =$ $= (H_2 H_3)^{-1}\left[\dfrac{\partial(a_3 H_3)}{\partial\xi_2} - \dfrac{\partial(a_2 H_2)}{\partial\xi_3}\right]$, $(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_2 =$ $= (H_3 H_1)^{-1}\left[\dfrac{\partial(a_1 H_1)}{\partial\xi_3} - \dfrac{\partial(a_3 H_3)}{\partial\xi_1}\right]$, $(\mathrm{rot}\,\mathbf{a})_3 =$ $= (H_1 H_2)^{-1}\left[\dfrac{\partial(a_2 H_2)}{\partial\xi_1} - \dfrac{\partial(a_1 H_1)}{\partial\xi_2}\right]$.

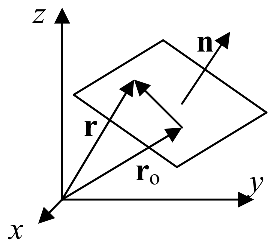
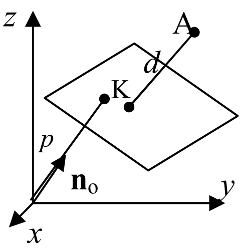
Таблица 2 Элементы векторной алгебры в тензорных выражениях

Скалярное произведение			
№ п/п	Название формулы	Векторное выражение	Тензорное выражение
1	Задание вектора	$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$	$\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$ $\mathbf{b} = b_i\mathbf{e}_i$
2	Определение скалярного произведения	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \lvert\mathbf{a}\rvert\cdot\lvert\mathbf{b}\rvert\cos\alpha$	$\sqrt{a_ia_i}\cdot\sqrt{b_ib_i}\,\dfrac{a_ib_i}{\sqrt{a_ia_i}\cdot\sqrt{b_ib_i}}$
3	Скалярное произведение, метрический тензор	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)\cdot$ $\cdot(b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3) =$ $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$	В прямоугольной системе $a_ib_i = a_jb_j + a_kb_k$ В косоугольной системе $g^{ij}a_ib_j = g_{ij}a^ib^j = a_ib^i = a^ib_i$
4	Свойство 1. (коммутативность)	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$	$a_ib_i = b_ia_i$
5	Свойство 2.. (ассоциативность)	$(\lambda\,\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})$	$(\lambda\,a_i)b_i = \lambda(a_ib_i)$
6	Свойство 3 .(дистрибутивность)	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$	$(a_i + b_i)c_i = a_ic_i + b_ic_i$
7	Свойство 4. Квадрат вектора, Символ Кронекера	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} > 0$ при $\boldsymbol{a} \neq 0$	$\mathbf{a}^2 = \delta_{ij}a_ia_j = a_ia_i$ $\mathbf{a}^2 = g^{ij}a_ia_j = g_{ij}a^ia^j = a_ia^i$
8	Модуль вектора, символ Кронекера и метрический тензор	$\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{\mathbf{a}^2}$	$\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{\delta_{ij}a_ia_j} = \sqrt{a_ia_i}$ $\lvert\mathbf{a}\rvert = \sqrt{g^{ij}a_ia_j} = \sqrt{g_{ij}a^ia^j} = \sqrt{a_ia^i}$
9	Косинус угла между двумя векторами	$\cos\alpha = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{\lvert\mathbf{a}\rvert\cdot\lvert\mathbf{b}\rvert}$	$\cos\alpha = \dfrac{a_i\cdot b_i}{\sqrt{a_ia_i}\cdot\sqrt{b_ib_i}}$ $\cos\alpha = \dfrac{g^{ij}a_i\cdot b_i}{\sqrt{g^{ij}a_ia_j}\cdot\sqrt{g^{ij}b_ib_j}} =$ $= \dfrac{g_{ij}a^i\cdot b^j}{\sqrt{g_{ij}a^ia^j}\cdot\sqrt{g_{ij}b^ib^j}} = \dfrac{a_i\cdot b^i}{\sqrt{a_ia^i}\cdot\sqrt{b_ib^i}}$
10	Скалярное произведение базисных векторов	$\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\cdot\mathbf{e}_3 = 1$ $\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = 0$	$\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$ $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j = g_{ij}; \boldsymbol{e}^i\boldsymbol{e}^j = g^{ij};$ $\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}^j = g_i^j = \delta_i^j$
11	Условие ортогональности	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$	$a_ib_i = 0$
12	Скалярное произведение вектора на базисный вектор	$\mathbf{a}\cdot\mathbf{e}_1 = a_1$ $a_1\mathbf{e}_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2\mathbf{e}_1 + a_3\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1 = a_1$	$\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{e}_i = a^k\boldsymbol{e}_k\cdot\boldsymbol{e}_i = a^k(\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_i) =$ $= a^kg_{ik} = a_i$
13	Координаты единичного вектора	$\mathbf{a}^o = \cos\alpha_1\,\mathbf{e}_1 +$ $+\cos\alpha_2\,\mathbf{e}_2 + \cos\alpha_3\,\mathbf{e}_3$	$\mathbf{a}^o = \cos\alpha_i\,\boldsymbol{e}_i$
14	Проекция одного вектора на другой	$np_{\mathbf{u}}\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}}{\lvert\mathbf{u}\rvert}$	$np_{\mathbf{u}}\mathbf{a} = \dfrac{a_iu_i}{\sqrt{u_iu_i}}$

Продолжение таблицы 2 Векторное произведение			
№ п/п	Название формулы	Векторное выражение	Тензорное выражение
1	Задание вектора	$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$	$\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$ $\mathbf{b} = b_i\mathbf{e}_i$
2	Векторное произведение в косоугольной системе координат	$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{c}$ $c_1 = \varepsilon(a_2b_3 - a_3b_2)$, $c_2 = \varepsilon(a_3b_1 - a_1b_3)$, $c_3 = \varepsilon(a_1b_2 - a_2b_1)$.	$\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} = c_k\mathbf{e}^k$ $c_k = V\left(a^ib^j - a^jb^i\right) =$ $= \sqrt{G}\left(a^ib^j - a^jb^i\right)$ $c^k = \frac{1}{V}\left(a_ib_j - a_jb_i\right) =$ $= \frac{1}{\sqrt{G}}\left(a_ib_j - a_jb_i\right)$
3	Векторное произведение в декартовых координатах и символ Леви-Чивита	$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \varepsilon\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$	$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \varepsilon[(a_2b_3 - a_3b_2)\boldsymbol{e}_1 +$ $+ (a_3b_1 - a_1b_3)\boldsymbol{e}_2 +$ $+ (a_1b_2 - a_2b_1)\boldsymbol{e}_3]$ $\mathbf{a}\times\mathbf{b} =$ $= a_ib_j(\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j) = \varepsilon_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e}_k$ $c_k = \varepsilon_{kij}a_ib_j$
4	Свойство 1. (не коммутативно)	$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = -\mathbf{b}\times\mathbf{a}$	$\varepsilon_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e}_k =$ $-\varepsilon_{ijk}b_ia_j\boldsymbol{e}_k$
5	Свойство 2.. (ассоциативность)	$(\lambda\,\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$	$\varepsilon_{ijk}\lambda\,a_ib_j\boldsymbol{e}_k = \lambda\,\varepsilon_{ijk}a_ib_j\boldsymbol{e}_k$
6	Свойство 3 .(дистрибутивность)	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c} + \mathbf{b}\times\mathbf{c}$	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} =$ $= \varepsilon_{ijk}a_ic_j\boldsymbol{e}_k + \varepsilon_{ijk}b_ic_j\boldsymbol{e}_k$
7	Свойство 4. Квадрат при векторном произведении	$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0$	$\varepsilon_{kij}a_ia_j = 0$
8	Векторное произведение базисных векторов	$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_3 = 0$ $\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_3\times\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2,$ $\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j = \varepsilon_{ijk}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_k$
11	Условие коллинеарности двух векторов	$\mathbf{a}\parallel\mathbf{b} \quad\Rightarrow\quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = 0$	$\frac{a_i}{b_i} = \lambda$ или $a_i = \lambda\,b_i$
12	Векторное произведение вектора на базисный вектор	$\mathbf{a}\times\mathbf{e}_i =$ $(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3)\times\mathbf{e}_i$ $\mathbf{a}\times\mathbf{e}_1 = a_3\mathbf{e}_2 - a_2\mathbf{e}_3$ $\mathbf{a}\times\mathbf{e}_2 = a_1\mathbf{e}_3 - a_3\mathbf{e}_1$ $\mathbf{a}\times\mathbf{e}_3 = a_2\mathbf{e}_1 - a_1\mathbf{e}_2$	$\boldsymbol{a}\times\mathbf{e}_i = \varepsilon_{ijk}a_k\mathbf{e}_k\times\mathbf{e}_i$
13	Модуль векторного произведения	$\lvert\mathbf{a}\times\mathbf{b}\rvert = \lvert\mathbf{a}\rvert\lvert\mathbf{b}\rvert\sin\alpha$	$\sqrt{a_ia_i}\sqrt{b_ib_i}\,\frac{\varepsilon_{kij}a_ib_j}{\sqrt{a_ia_i}\sqrt{b_ib_i}}$

Продолжение таблицы 2 Смешанное произведение			
№ п/п	Название формулы	Векторное выражение	Тензорное выражение
1	Задание векторов	$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$ $\mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$	$\mathbf{a} = a_i\mathbf{e}_i$ $\mathbf{b} = b_i\mathbf{e}_i$ $\mathbf{c} = c_i\mathbf{e}_i$
2	Смешанное произведение	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = a_i\mathbf{e}_i \times b_j\mathbf{e}_j \cdot c_k\mathbf{e}_k$
3	Смешанное произведение в координатах	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \varepsilon\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \varepsilon_{kij}a_i b_j c_k$
4	Свойство 1. (циклическая перестановка)	$\mathbf{a}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{c}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{a} =$ $= -\mathbf{b}\times\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = -\mathbf{c}\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = -\mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}$	$\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k = \varepsilon_{ijk}c_i a_j b_k =$ $= \varepsilon_{ijk}b_i c_j a_k = -\varepsilon_{ijk}b_i a_j c_k =$ $= -\varepsilon_{ijk}c_i b_j a_k = -\varepsilon_{ijk}a_i c_j b_k$
5	Свойство 2.. (ассоциативность)	$(\lambda\,\mathbf{a})\times\mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \lambda[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}]$	$\varepsilon_{ijk}\lambda\,a_i b_j c_k = \lambda\,\varepsilon_{ijk}a_i b_j c_k$
6	Свойство 3 .(дистрибутивность)	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{u} =$ $= \mathbf{a}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{b}\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{u}$	$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c}\cdot\mathbf{u} =$ $= \varepsilon_{ijk}a_i c_j u_k + \varepsilon_{ijk}b_i c_j u_k$
7	Свойство 4. Равенство нулю смешанного произведения	$\mathbf{b} = \lambda\,\mathbf{a}$ Условие компланарности векторов $\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} = 0$ когда $\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,.\gamma \neq 0$	$\varepsilon_{ijk}a_i\lambda\,a_j c_k = 0$ $\alpha\,a_i\mathbf{e}_i + \beta\,b_i\mathbf{e}_i + \gamma\,c_i\mathbf{e}_i = 0$
8	Смешанное произведение базисных векторов	$\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2\cdot\mathbf{e}_3 = \varepsilon_{ijk}$	$\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j\cdot\mathbf{e}_k = \varepsilon_{ijl}(e_l e_k) =$ $= \varepsilon_{ijk}$

Таблица 3 Элементы аналитической геометрии в тензорных выражениях

Плоскость			
№ п/п	Название формулы	Векторное выражение	Тензорное выражение
1	Нормаль плоскости	$\mathbf{n} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$	$\mathbf{n} = a_i\mathbf{e}_i$
2	Текущие точка M и N	M: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ N: $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$	$\boldsymbol{x} = x_i\mathbf{e}_i$ $\boldsymbol{y} = y_i\mathbf{e}_i$
3	Расстояние между двумя точками M и N	$\lvert MN\rvert = \lvert y - x\rvert =$ $\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2}$	$\lvert MN\rvert = \lvert y - x\rvert =$ $\sqrt{\delta_{ij}(y_i - x_i)(y_j - x_j)}$
4	Векторное уравнение плоскости 	Так как $\mathbf{n} \perp (\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)$, то их скалярное произведение равно нулю. Отсюда нормальное уравнение плоскости $\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)\cdot = 0$ или $\mathbf{n}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_o)\cdot = 0$	$n_i(x_i - x_i^o) = 0$
5	Общее уравнение плоскости Если плоскость проходит через начало координат, то $D = 0$	$Ax + By + Cz + D = 0$ $Ax + By + Cz = 0$	Обозначая $-n_i x_i^o = b$, получим $a_i x_i + b = 0$ $a_i x_i = 0$
6	Уравнение плоскости в «отрезках» (u_i наз. тангенциальными координатами)	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$	Разделим $a_i x_i + b = 0$ на $-b$ и обозначим $u_i = -\frac{a_i}{b}$. Тогда $u_i x_i = 1$
7	Нормальное уравнение плоскости 	$\mathbf{n}_o\mathbf{r}$ - $p = 0$	$\mathbf{n}_o = \frac{n_i\boldsymbol{e_i}}{\sqrt{n_i n_i}}$ $\frac{n_i(x_i - x_i^o)}{\sqrt{n_i n_i}} = 0$ $\frac{n_i x_i}{\sqrt{n_i n_i}} - p = 0$
8	Расстояние от точки до плоскости	$d = \lvert\mathbf{n}_o(\mathbf{r}_\mathrm{A} - p)\rvert$	$d = \left\lvert \frac{n_i x_i^A}{\sqrt{n_i n_i}} - p \right\rvert$

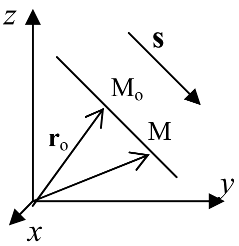
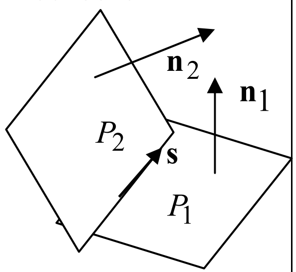
Продолжение таблицы 3 **Прямая в пространстве**			
№ п/п	Название формулы	Векторное выражение	Тензорное выражение
1	Направляющий вектор	$\mathbf{s} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$	$\mathbf{s} = a_i\mathbf{e}_i$
2	Текущая точка М и фиксированная точка M_o	M: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$ M_o: $\mathbf{x} = x_1^o\mathbf{e}_1 + x_2^o\mathbf{e}_2 + x_3^o\mathbf{e}_3$	$\boldsymbol{x} = x_i\mathbf{e}_i$ $\boldsymbol{x} = x_i^o\mathbf{e}_i$
3	Векторное уравнение прямой  	$\mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \mathbf{s}t$	$\mathbf{r} = x_i\mathbf{e}_i \quad \mathbf{r}_o = x_i^o\mathbf{e}_i$ $\mathbf{s} = s_i\mathbf{e}_i$ $x_i = x_i^o + s_i t$
4	Общие уравнения прямой (как линии пересечения двух плоскостей  	$\left.\begin{array}{l} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{l} \mathbf{n}_1\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{1o})\cdot = 0 \\ \mathbf{n}_2\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_{2o})\cdot = 0 \end{array}\right\}$ $\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$	$\left.\begin{array}{l} n_i^1(x_i - x_i^{1o}) = 0 \\ n_i^2(x_i - x_i^{2o}) = 0 \end{array}\right\}$ $\mathbf{s} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \varepsilon_{ijk} n_i^1 n_j^2 \boldsymbol{e}_k$ x_k^o - фиксированная точка прямой. Тогда уравнение прямой $x_k = x_k^o + \lambda\varepsilon_{ijk} n_i^1 n_j^2$

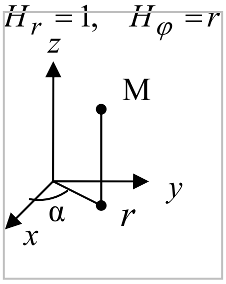
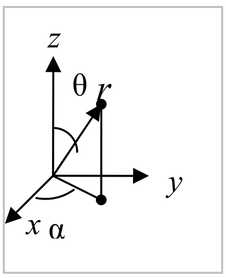
Таблица 4 Механика жидкости в тензорном выражении

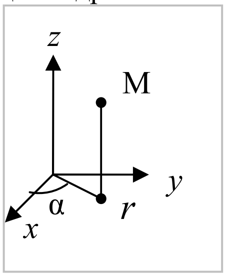
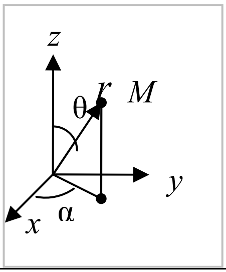
№ пп	Механические величины	Формула	Формула в тензорном выражении
1	Скорость $\mathbf{v}$ $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ - орты	$\mathbf{v} = \dfrac{d\,\mathbf{x}}{d\,t}$	$\upsilon^i = \dfrac{dx^i}{d\,t}$, $\mathbf{v} = \sum\limits_{k=1}^{3} \upsilon_k \mathbf{i}_k = \upsilon_k \mathbf{i}_k$
3	Ускорение частицы жидкости	$\mathbf{a} = \dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,t} + (\mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v}$	$a_k = \partial_o \upsilon_k + \upsilon_j \partial_j \upsilon_k$
2	Ускорение $\mathbf{a} = \dfrac{d\,\mathbf{v}}{d\,t} = \ddot{\mathbf{r}}$ $\mathbf{v} = \dfrac{d\,\mathbf{r}}{d\,t} = \dot{\mathbf{r}}$	$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}$ $\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_t$ $\mathbf{r}$ - радиус – вектор точки, $\mathbf{a}_r$ - радиальное ускорение, $\mathbf{a}_t$ - тангенциальное ускорение	$a^i = \dfrac{d^2 x^i}{d\,t^2} + \Gamma^i_{k\,l} \dfrac{d\,x^k}{d\,t} \dfrac{d\,x^l}{d\,t}$ В декартовых координатах $a_k = \partial_o \upsilon_k + \upsilon_j \partial_j \upsilon_k$
4	Закон Ньютона	$\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}} = m\mathbf{a}$	$F_k = m\,a_k = m(\partial_o \upsilon_k + \upsilon_j \partial_j \upsilon_k)$
5	Теорема импульсов $\mathbf{f}$ - интенсив - ность массовых сил, $\mathbf{p}$ - поверхностные силы $\mathbf{M}$ – количество движения	$\mathbf{M} = \iiint\limits_V \mathbf{v}\,\rho\,dV$ $\dfrac{\partial\mathbf{M}}{\partial\,t} = \dfrac{d}{d\,t}\iiint\limits_V \rho\,\mathbf{v}\,dV =$ $= \iiint\limits_V \rho\,\mathbf{f}\,dV + \oint\!\!\oint\limits_S \mathbf{p}_n\,dS$	$M_i = \iiint\limits_V \rho\,\upsilon_i\,dV$ $\dfrac{\partial\,\mathbf{M}}{\partial\,t} = \iiint\limits_V \rho \dfrac{d\upsilon_i}{d\,t}\,dV =$ $= \iiint\limits_V \rho\,f_i\,dV + \oint\!\!\oint\limits_S p_{ik}\,n_k\,dS$
6	Закон Архимеда	$\mathbf{R} = \oint\!\!\oint\limits_S \mathbf{p}_n\,dS$	$\mathbf{R} = \oint\!\!\oint\limits_S p_k n_k\,dS$
7	Сила, действующая на тело со стороны жидкости	$\mathbf{R} = -\oint\!\!\oint\limits_{S_o} [p\,\mathbf{n} + \rho\,\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})]\,dS_o$	$R_i = \oint\!\!\oint\limits_{S_o} (p_{ik} - \rho\,\upsilon_i \upsilon_k)\,n_k\,dS_o$
7	Уравнение неразрывности	$\dfrac{\partial\,\rho}{\partial\,t} + div\,\rho\,\mathbf{v} = 0$	$\partial_o \rho + \partial_j(\rho\,\upsilon_j) = 0$
8	Уравнение Эйлера движения жидкости	$\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial\,t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = \mathbf{F} - \dfrac{1}{\rho}\nabla\,p$	$\rho(\partial_o \upsilon_k + \upsilon_j \partial_j \upsilon_k) = \rho\,F_k + \partial_l T_{lk}$ $\rho\dfrac{\partial\upsilon_i}{\partial\,t} + \rho\upsilon_k \dfrac{\partial\upsilon_i}{\partial\,x_k} = \rho\,f_i - \dfrac{\partial\,p}{\partial x_k}$,
9	Уравнение движения в форме Громеки-Лэмба	$\mathbf{F} = \nabla U$ $\dfrac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v}\times(\nabla\times\mathbf{v}) = \mathbf{F} - \dfrac{1}{\rho}\nabla\,p - \dfrac{1}{2}\nabla\upsilon^2$	$\partial_o \upsilon_k + \partial_k\left(\dfrac{1}{2}\upsilon_j \upsilon_j\right) + 2\,\varepsilon_{kij}\,w_i \upsilon_j =$ $= F_k - \dfrac{1}{\rho}\partial_k\,\mathrm{p}$
10	Уравнение Навье - Стокса	$\rho\dfrac{\partial\mathbf{v}}{\partial\,t} + \rho\,(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} =$ $= \rho\,\mathbf{F} - \nabla\,p + \mu\,\Delta\,\mathbf{v}$	$\rho\dfrac{\partial\upsilon_i}{\partial\,t} + \rho\upsilon_k \dfrac{\partial\upsilon_i}{\partial\,x_k} =$ $= \rho\,f_i - \dfrac{\partial\,p}{\partial x_k} + \mu\dfrac{\partial^2\,\upsilon_i}{\partial\,x_k \partial\,x_k}$
11	Главный вектор массовых сил	$\mathbf{F} = \oint\!\!\oint\limits_S \rho\,\mathbf{v}\,(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,dS$	$F_i = \oint\!\!\oint\limits_S \rho\,\upsilon_i \upsilon_k\,n_k\,dS$

Таблица 5 Дифференциальные операции над скалярными, векторными и тензорными полями

№ п\п	Название операции	Общее выражение	Выражение через оператор Гамильтона
1	Градиент скалярной функции $\varphi(x,y,z)$	$\mathrm{grad}\,\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$	$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}$
2	Градиент произведения двух скалярных функций $\varphi(x,y,z)$ и $\psi(x,y,z)$	$\mathrm{grad}\,(\varphi\cdot\psi)=\psi\cdot\mathrm{grad}\,\varphi+\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi$	$\nabla(\varphi\cdot\psi)=\psi\cdot\nabla\varphi+\varphi\cdot\nabla\psi$
3	Градиент скалярного произведения двух векторных функций $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$	$\mathrm{grad}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}+(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}+$ $+\mathbf{b}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathrm{rot}\mathbf{b}$	$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})=(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}+(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}+$ $+\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a})+\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})$
4	Градиент тензора T	$\mathrm{grad}\,T=\left(\mathbf{i}_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)T$	$\mathrm{grad}\,T=\nabla T$
5	Дивергенция произведения скалярной функции $\varphi(x,y,z)$ на векторную функцию $\mathbf{a}$	$\mathrm{div}(\varphi\,\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi+\varphi\cdot\mathrm{div}\,\mathbf{a}$	$\nabla\cdot(\varphi\,\mathbf{a})=\mathbf{a}\cdot\nabla\varphi+\varphi\cdot\nabla\cdot\mathbf{a}$
6	Дивергенция векторного произведения двух векторных функций $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$	$\mathrm{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{a})-(\mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\mathbf{b})$	$\nabla(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{b}\cdot(\nabla\times\mathbf{a})-\mathbf{a}\cdot(\nabla\times\mathbf{b})$
7	Дивергенция тензорного поля T	$(div\,T)_i=\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}$	$div\,T=\nabla\cdot T$
8	Ротор произведения скалярной функции $\varphi(x,y,z)$ на вектор - функцию $\mathbf{a}$	$\mathrm{rot}(\varphi\,\mathbf{a})=\mathrm{grad}\varphi\times\mathbf{a}+\varphi\,\mathrm{rot}\,\mathbf{a}$	$\nabla\times(\varphi\,\mathbf{a})=\nabla\varphi\times\mathbf{a}+\varphi\cdot\nabla\times\mathbf{a}$
9	Ротор векторного произведения двух векторных функций $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$	$\mathrm{rot}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=$ $=(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}-(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{a}\mathrm{div}\,\mathbf{b}-\mathbf{b}\,\mathrm{div}\,\mathbf{a}$	$\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=$ $=(\mathbf{b}\nabla)\mathbf{a}-(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{a}(\nabla\,\mathbf{b})-\mathbf{b}(\nabla\,\mathbf{a})$
10	Ротор ротора вектора $\mathbf{a}$	$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})=\nabla(\nabla\mathbf{a})-\nabla^2\mathbf{a}$	$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{a})=\nabla(\nabla\mathbf{a})-\Delta\mathbf{a}$
11	Производная векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ по направлению вектора $\mathbf{a}$	$(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{b}=\lvert\mathbf{a}\rvert\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial\mathbf{a}_o}$ $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{a}=\frac{1}{2}\nabla\mathbf{a}^2-\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{a})$	$(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}=\frac{1}{2}[\nabla(\mathbf{a}\,\mathbf{b})-$ $-\nabla\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a})-$ $-\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})-\mathbf{b}(\nabla\cdot\mathbf{a})+\mathbf{a}(\nabla\cdot\mathbf{b})]$
12	Производная тензорного поля по направлению $\mathbf{s}$	$\frac{dT}{ds}=\mathbf{s}\cdot\mathrm{grad}\,T=$ $=(\mathbf{s}\cdot\mathbf{i}_m)\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}=s_{\mathrm{m}}\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}$	$\frac{dT}{ds}=\mathbf{s}\cdot\nabla T=$ $=(\mathbf{s}\cdot\mathbf{i}_m)\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}=s_{\mathrm{m}}\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_m}$
13	Лапласьян произведения двух скалярных функций φ и ψ	$\Delta(\varphi\cdot\psi)=$ $=\psi\,\Delta\varphi+\varphi\Delta\psi+2\mathrm{grad}\,\varphi\cdot\mathrm{grad}\,\psi$	$\Delta(\varphi\cdot\psi)=$ $=\psi\,\Delta\varphi+\varphi\Delta\psi+2\nabla\varphi\cdot\nabla\psi$

Таблица 6 Характеристики полей в разных системах координат

1	Производная вектора скорости в декартовых координатах (ускорение)	$\frac{d\,\mathbf{v}}{d\,t}=\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,t}+\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,x}\upsilon_x+\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,y}\upsilon_y+\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,z}\upsilon_z$
2	Производная вектора скорости в цилиндрических координатах (ускорение)	$\frac{d\,\mathbf{v}}{d\,t}=\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,t}+\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,r}\upsilon_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,\alpha}\upsilon_\alpha+\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,z}\upsilon_z$
3	Производная вектора скорости в сферических координатах (ускорение)	$\frac{d\,\mathbf{v}}{d\,t}=\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,t}+\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,r}\upsilon_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,\alpha}\upsilon_\alpha+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\,\mathbf{v}}{\partial\,\theta}\upsilon_\theta$
4	Градиент потенциала в декартовых координатах	$\nabla\varphi=\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial\,x}\mathbf{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial\,y}\mathbf{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial\,z}\mathbf{k}$
5	Градиент потенциала в цилиндрических координатах	$\nabla\varphi=\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial\,r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\,\alpha}\mathbf{e}_\alpha+\frac{\partial\varphi}{\partial\,z}\mathbf{e}_z$
6	Градиент потенциала в сферических координатах	$\nabla\varphi=\mathrm{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial\,r}\mathbf{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\,\alpha}\mathbf{e}_\alpha+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\,\theta}\mathbf{e}_\theta$
7	Градиент вектора в декартовых координатах	$\mathrm{grad}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{a}=\frac{\partial\,\mathbf{a}}{\partial\,x}\upsilon_x+\frac{\partial\,\mathbf{a}}{\partial\,y}\upsilon_y+\frac{\partial\,\mathbf{a}}{\partial\,z}\upsilon_z$
8	Градиент вектора в цилиндрических координатах $H_r=1,\quad H_\varphi=r,\quad H_z=1.$ 	$\mathrm{grad}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{a}=\frac{\partial\,\mathbf{a}}{\partial\,r}\upsilon_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\,\mathbf{a}}{\partial\,\alpha}\upsilon_\alpha+\frac{\partial\,\mathbf{a}}{\partial\,z}\upsilon_z$
9	Градиент вектора в сферических координатах $H_r=1,\quad H_\theta=r,\quad H_\varphi=r\sin\theta.$ 	$\mathrm{grad}_{\mathbf{v}}\,\mathbf{a}=\frac{\partial\,\mathbf{a}}{\partial\,r}\upsilon_r+\frac{1}{r}\frac{\partial\,\mathbf{a}}{\partial\,\alpha}\upsilon_\alpha+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\,\mathbf{a}}{\partial\,\theta}\upsilon_\theta$

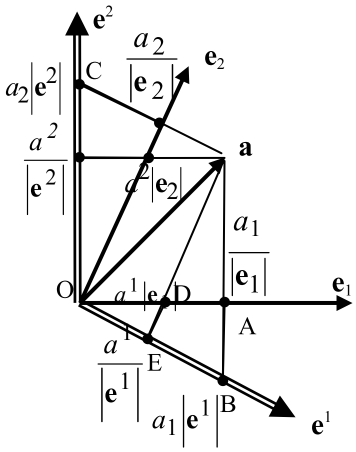
Продолжение таблицы 6 Дивергенция и ротор векторного поля		
№	Наименование	Обозначение или формула
10	Дивергенция вектора скорости в декартовых координатах	$\operatorname{div}\mathbf{v} = \dfrac{\partial \upsilon_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \upsilon_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial z}$
11	Дивергенция вектора скорости в цилиндрических координатах  $H_r = 1,\quad H_\varphi = r,\quad H_z = 1.$	$\operatorname{div}\mathbf{v} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (r\upsilon_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \upsilon_\alpha}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial \upsilon_z}{\partial z}$
12	Дивергенция вектора скорости в сферических координатах $H_r = 1,\quad H_\theta = r,\quad H_\varphi = r\sin\theta.$ 	$\operatorname{div}\mathbf{v} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial (r^2\upsilon_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial (\sin\theta\,\upsilon_\theta)}{\partial \theta} + \dfrac{1}{r\sin\theta}\dfrac{\partial \upsilon_\alpha}{\partial \alpha}$
13	Ротор вектора скорости в декартовых координатах $H_x = 1,\quad H_y = 1,\quad H_z = 1.$	$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \upsilon_x & \upsilon_y & \upsilon_z \end{vmatrix}$
14	Ротор вектора скорости в цилиндрических координатах $H_r = 1,\quad H_\varphi = r,\quad H_z = 1.$	$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{r}\mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\alpha & \dfrac{1}{r}\mathbf{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \upsilon_r & r\,\upsilon_\alpha & \upsilon_z \end{vmatrix}$
15	Ротор вектора скорости в сферических координатах $H_r = 1,\quad H_\theta = r,\quad H_\varphi = r\sin\theta.$	$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\mathbf{e}_r & \dfrac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\theta & \dfrac{1}{r}\mathbf{e}_\alpha \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \alpha} \\ \upsilon_r & r\,\upsilon_\theta & \upsilon_\alpha r\sin\theta \end{vmatrix}$

Продолжение таблицы 6	**Формулы Стокса, Остроградского – Гаусса и Грина**	
№	Наименование	Обозначение или формула
1	Формула Стокса в векторном виде (Циркуляция)	$\oint\limits_{\lambda} \mathbf{F}\cdot d\,\mathbf{l} = \iint\limits_{\Sigma} \operatorname{rot}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\,\sigma$
2	Формула Стокса в координатной форме	$\oint\limits_{\lambda} P(x,y,z)\,d\,x + Q(x,y,z)\,d\,y + R(x,y,z)\,d\,z =$ $\iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix} d\,\sigma$
3	Формула Остроградского – Гаусса в векторном виде (Поток)	$\iiint\limits_{V} \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma$
4	Формула Остроградского – Гаусса в координатной форме.	$\iiint\limits_{V} \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \iint\limits_{\Sigma} \{P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma$
5	Первая формула Грина	$\iiint\limits_{V} u\,\Delta\upsilon\,dV =$ $\iint\limits_{\Sigma} u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial n}d\,\sigma - \iiint\limits_{V}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{\partial\upsilon}{\partial z}\right) dV\,,$
6	Вторая формула Грина	$\iiint\limits_{V} (u\Delta\upsilon - \upsilon\nabla u)\,dV = \iint\limits_{\Sigma}\left(u\dfrac{\partial\upsilon}{\partial n} - \upsilon\dfrac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$
7	Основная формула Грина	$4\pi u(M_o) =$ $-\iint\limits_{\Sigma}\left[u(P)\dfrac{\partial}{\partial n}\left(\dfrac{1}{R_{M_oP}}\right) - \dfrac{1}{R_{M_oP}}\dfrac{\partial u}{\partial n}\right] d\,\sigma_P - \iiint\limits_{V}\dfrac{\Delta u(P)}{R_{M_oP}}dV$

Таблица 7 Определения тензорных величин, основанные на законе преобразования их компонент

№	Тип тензорной величины	Компоненты в системе координат $x^1, x^2, \dots x^n$	Компоненты в системе координат $x'^1, x'^2, \dots x'^n$
1	.Скаляр (тензор **нулевого** ранга)	$f(x^1, x^2, \dots x^n)$	$f'(x'^1, x'^2, \dots x'^n) = f(x^1, x^2, \dots x^n)$
2	Контравариантный вектор **а** (тензор **первого** ранга)	$a^i(x^1, x^2, \dots x^n)$	$a'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a^k$
3	Ковариантный вектор **а** (тензор **первого** ранга)	$a_i(x^1, x^2, \dots x^n)$	$a'_i = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} a_k$
4	Контравариантный тензор А **второго** ранга	$a^{ik}(x^1, x^2, \dots x^n)$	$a'^{ml} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^i} \frac{\partial x'^l}{\partial x^k} a^{ik}$
5	Ковариантный тензор А **второго** ранга	$a_{ik}(x^1, x^2, \dots x^n)$	$a'_{ml} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} a_{ik}$
6	Смешанный тензор А **второго** ранга	$a^i_k(x^1, x^2, \dots x^n)$	$a'^l_m = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} a^i_k$

Таблица 8 Компоненты тензоров в декартовых косоугольных координатах

Изображения и определения	Тензорное описание
 Векторы **репера** $\mathbf{e}_i$ иногда называют **ковариантным** базисом системы координат.	$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ - **реперы** $\mathbf{a} = a^1 \cdot \mathbf{e}_1 + a^2 \cdot \mathbf{e}_2 + a^3 \cdot \mathbf{e}_3$, где $a^i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^i$ $a^1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^1, \quad a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^2, \quad a^3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^3.$ Векторы **репера** преобразуются к другой системе координат $(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{3'})$ по законам $\boxed{\mathbf{e}_{i'} = \mathbf{e}_i B^i_{\cdot i'}}$ и $\boxed{\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{i'} A^{i'}_{\cdot i}}$ Вектор $\boldsymbol{a}$ в этих системах имеет вид $\mathbf{a} = a^i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{a} = a^{i'} \mathbf{e}_{i'}$ Отсюда контравариантные компоненты вектора $\boldsymbol{a}$ преобразуются по закону $\boxed{a^{i'} = a^i A^{i'}_{\cdot i}}$ $\boxed{a^i = a^{i'} B^i_{\cdot i'}}$ Якобиевы матрицы связаны между собой так: $A^{i'}_{\cdot k} \cdot B^k_{\cdot j'} = \delta^{i'}_{\cdot j'}$ и $B^i_{\cdot j'} \cdot A^{j'}_{\cdot k} = \delta^i_{\cdot k}$
При переходе из одной системы координат к другой **ковариантные** компоненты произвольного вектора $\mathbf{a}$ преобразуются совершенно по другому закону, нежели **контравариантные** компоненты. Матрица $B^i_{\cdot i'}$ является **обратной** и **транспонированной** по отношению к якобиевой матрице $A^{i'}_{\cdot i}$ преобразования $x' = x'(x^1, x^2, x^3)$	$(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$ - **кореперы** $\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}^1 + a_2\mathbf{e}^2 + a_3\mathbf{e}^3$ где $a_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_i$, то есть, $a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1, \quad a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2, \quad a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3$ **Ковариантные** компоненты вектора преобразуется по формулам $\boxed{a_{j'} = a_j B^j_{\cdot j'}}$
Векторы **репера** $\mathbf{e}^i$ иногда называют **ковариантным** базисом системы координат. Векторы **корепера** при переходе к другой системе координат преобразуются так же, как и **контравариантные** компоненты вектора $\mathbf{a}$.	$\boxed{\mathbf{e}^{i'} = \mathbf{e}^i A^{i'}_{\cdot i}}$ $\boxed{\mathbf{e}^i = \mathbf{e}^{i'} B^i_{\cdot i'}}$
Определение 1. Ковариантными компонентами вектора (или векторного поля) $\mathbf{a}$ называется система трёх чисел a_i, определённая в каждой точке пространства и в каждой системе координат, которая при переходе от одной системы координат к другой преобразуется по формулам $\boxed{a_{j'} = a_j B^j_{\cdot j'}}$ где $\boxed{B^i_{\cdot i'} = \dfrac{\partial x^i}{\partial x'^i} = b^i_{\cdot i'}}$	$a_{j'} = a_j B^j_{\cdot j'} = (a_1 \ a_2 \ a_3)\begin{pmatrix} b^1_{1'} & b^1_{2'} & b^1_{3'} \\ b^2_{1'} & b^2_{2'} & b^2_{3'} \\ b^3_{1'} & b^3_{2'} & b^3_{3'} \end{pmatrix}$
Определение 2. Контравариантными компонентами вектора (или векторного поля) $\boldsymbol{a}$ называется система трёх чисел a_i, определённая в каждой точке пространства и в каждой системе координат, которая при переходе от одной системы координат к другой преобразуется по формулам $a^{i'} = a^i A^{i'}_{\cdot i}$ где $A^{i'}_{\cdot i} = \dfrac{\partial x'^i}{\partial x^i} = \left(a^{i'}_{\cdot i}\right)$	$a^{i'} = a^i A^{i'}_{\cdot i} = (a^1 \ a^2 \ a^3)\begin{pmatrix} a^{1'}_{\cdot 1} & a^{1'}_{\cdot 2} & a^{1'}_{\cdot 3} \\ a^{2'}_{\cdot 1} & a^{2'}_{\cdot 2} & a^{2'}_{\cdot 3} \\ a^{3'}_{\cdot 1} & a^{3'}_{\cdot 2} & a^{3'}_{\cdot 3} \end{pmatrix}$

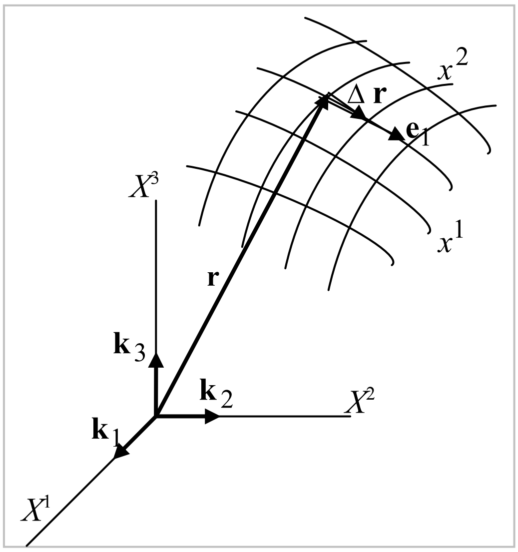
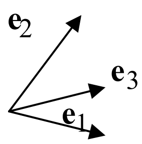
Продолжение таблицы 8	
 	$\mathbf{e}_1=\frac{d\mathbf{r}}{dx^1},\quad \mathbf{e}_2=\frac{d\mathbf{r}}{dx^2},\quad \mathbf{e}_3=\frac{d\mathbf{r}}{dx^3}$ $d\mathbf{r}=\sum_{i=1}^{3}dx^i\mathbf{e}_i=dx^i\mathbf{e}_i=dx'^k\,\mathbf{e}'_k$ $\boxed{\mathbf{e}'_k=\frac{\partial x^i}{\partial x'^k}\mathbf{e}_i}$ - переход от старого базиса к новому $J=\left\lvert\frac{\partial x'^k}{\partial x^i}\right\rvert$ - якобиан преобразования **Контравариантный** тензор первого ранга $\mathbf{b}=b^i\mathbf{e}_i=b'^i\,\frac{\partial x^i}{\partial x'^i}\mathbf{e}_i$ - вектор **Контравариантный** тензор второго ранга $\boldsymbol{T}=T^{ik}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k=T^{m'n'}\,\frac{\partial x^i}{\partial x'^m}\mathbf{e}_i\,\frac{\partial x^k}{\partial x'^n}\mathbf{e}_k$ $T^{m'n'}=\frac{\partial x'^m}{\partial x^l}\frac{\partial x'^n}{\partial x^j}T^{lj}$ - компоненты этого тензора **Ковариантные** компоненты тензора 2 –го ранга при переходе от нового базиса к старому $T_{im}=\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^m}T_{k'l'}$ **Смешанные** компоненты тензора более высокого порядка. $T'^{r}_{\cdot sp}=\frac{\partial x^r}{\partial x^m}\frac{\partial x^n}{\partial x'^s}\frac{\partial x^q}{\partial x'^p}T^{m}_{\cdot nq}$
$\boldsymbol{T}=T^{ik...m}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k...\mathbf{e}_m$	 Подобная система координат соответствует каждому из обозначений $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_k$ или $\mathbf{e}_m$
$\boldsymbol{T}=T^{i\,k}_{\cdot\cdot m}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k...\mathbf{e}^m$	Каждой паре базисных векторов соответствуют зависимости $\mathbf{e}_i\mathbf{e}_k=g_{ik},\quad \mathbf{e}^i\mathbf{e}^k=g^{ik},\quad \mathbf{e}_n\mathbf{e}^m=\delta_n^m$ Выражение компонент фундаментального тензора через производные радиуса-вектора $g_{ij}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^i}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x^j}=\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j$

Таблица 9. Символы умножения и дифференцирования в тензорном исчислении

Наименование	Обозначение	Использование
Символ Кронекера	$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ когда } i = j \\ 0 \text{ когда } i \neq j \end{cases}$	При скалярном произведении направляющих косинусов $\sum\limits_{m=1}^{3} \alpha_{i'}^{m} \alpha_{m}^{j'} = \begin{cases} 0, & i' \neq j', \\ 1, & i' = j'. \end{cases} = \delta_{i'}^{j'}$
Символ Леви – Чевита ε_{ijk}	$\varepsilon_{ijk} =$ = 1, если значения индексов i, j, k образуют чётную перестановку из чисел 1,2,3 = - 1, если значения индексов i, j, k образуют нечётную перестановку из чисел 1,2,3 = 0, если значения индексов i, j, k не образуют перестановки из чисел 1,2,3 (если есть равные индексы)	При векторном произведении векторов $\varepsilon_{ijk} a_j b_k = c_i$ $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kpq} = \delta_{ip}\delta_{jq} - \delta_{iq}\delta_{jp}$;
Символ Кристоффеля 1 – го рода	$\mathbf{\Gamma}_{i,jk} = \mathbf{e}_i \dfrac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k}$	При разложении **векторов** $\dfrac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k}$ по векторам **взаимного** базиса
Символ Кристоффеля 2-го рода	$\mathbf{\Gamma}^{i}_{jk} = \mathbf{e}^i \cdot \dfrac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k}$	При разложении **векторов** $\dfrac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x^k}$ по векторам **основного** базиса
Связь символа Кристоффеля 1-го рода с метрическим тензором		$\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} = \mathbf{\Gamma}_{i,kl} + \mathbf{\Gamma}_{k,il}$.,

Таблица 10 Примеры, используемые в механике сплошной среды

Внешнее произведение	Внутреннее произведений	
	Индексные обозначения	Символьные обозначения
$a_i b_i$	$a_i b_i$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$
$a_i E_{ik}$	$a_i E_{ik} = f_k$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{f}$
	$a_i E_{li} = h_l$	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{h}$
$E_{ij} F_{km}$	$E_{ij} F_{jm} = G_{lm}$	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{G}$
$E_{ij} E_{km}$	$E_{ij} E_{im} = B_{lm}$	$\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = (\mathbf{E})^2$
$E_{ij} F_{km}$	$E_{ij} F_{ij}$	$\mathbf{E} ; \mathbf{F}$
$E_{ij} E_{km} E_{pq}$	$E_{ij} E_{jm} E_{mq}$	$(\mathbf{E})^3$

Таблица 11 Основные обозначения

№	Символ	Значение
1	∂_o	Производная по времени
2	∂_j	Производная по j - той координате
3	$\upsilon_{k,k}$	Лапласиан скорости
4	$\upsilon^l_{;l}$	Дивергенция вектора скорости
5	$p^{ik}_{;k}$	Дивергенция вектора напряжений
6	$x^i x^k \quad (i,k=1,2,3)$	Квадратная форма трёхмерного пространства
7	$\mathbf{a;b}$ или $\mathbf{a}\otimes\mathbf{b}$	Диадное (неопределённое) произведение
8	$\mathbf{D}=\mathbf{a}_1;\mathbf{b}_1+\mathbf{a}_2;\mathbf{b}_2+...+\mathbf{a}_N;\mathbf{b}_N$	Диадик
9	$\mathbf{ab:cd}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})$	Формула дважды скалярного произведения
10	$\mathbf{a;b}\ \times\cdot\ \mathbf{c;d}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{d})=\mathbf{h}$	Дважды смешанное произведение (вектор)
11	$\mathbf{a;b}\ \cdot\times\ \mathbf{c;d}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{g}$	Дважды смешанное произведение (вектор)
12	$\mathbf{a;b}\ \times\times\ \mathbf{c;d}=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})=\mathbf{uw}$ -	Дважды векторное произведение (диада)
13	$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x^k}\mathbf{e}_i\equiv a_{i;k}$ $a_{i;k}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x^k}\mathbf{e}_i=\frac{\partial a_i}{\partial x^k}+a_j\frac{\partial\mathbf{e}^j}{\partial x^k}\cdot\mathbf{e}_i$	Ковариантная производная ковариантного вектора (в локальной системе координат)
14	$\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x^k}\mathbf{e}^i\equiv a^i{}_{;k}$ $a^i{}_{;k}=\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x^k}\mathbf{e}^i=\frac{\partial a^i}{\partial x^k}+a^j\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial x^k}\cdot\mathbf{e}^i$	Ковариантная производная контравариантного вектора (в локальной системе координат)
15	$\mathbf{\Gamma}^i_{jk}$, $(\mathbf{\Gamma}^i_{jk}=\mathbf{e}^i\cdot\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial x^k})$	Символы Кристоффеля 2-го рода
16	$\mathbf{\Gamma}_{i,jk}$, $(\mathbf{\Gamma}_{i,jk}=\mathbf{e}_i\frac{\partial\mathbf{e}_j}{\partial x^k})$	Символы Кристоффеля 1-го рода
17	$\left.\begin{aligned}T_{ik;l}&=\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^l}-T_{mk}\mathbf{\Gamma}^m_{il}-T_{im}\mathbf{\Gamma}^m_{kl},\\ T^{ik}_{;l}&=\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^l}+T^{mk}\mathbf{\Gamma}^i_{ml}+T^{im}\mathbf{\Gamma}^k_{ml},\\ T^i_{\cdot k;l}&=\frac{\partial T^i_{\cdot k}}{\partial x^l}+T^m_{\cdot k}\mathbf{\Gamma}^i_{ml}-T^i_{\cdot m}\mathbf{\Gamma}^m_{kl},.\end{aligned}\right\}$	Ковариантные производные тензора 2 – го ранга

ПРИЛОЖЕНИЕ 3 Строгие определения в тензорном исчислении

Определение 1 (**скаляра**) Если для каждой системы координат $x^1, x^2, \dots x^n$ определена функция $f(x^1, x^2, \dots x^n)$, так что для системы координат $x'^1, x'^2, \dots x'^n$ мы имеем свою функцию $f'(x'^1, x'^2, \dots x'^n)$, и если при преобразовании координат

$x'^i = x'^i(x^1, x^2, \dots x^n)$ значения этих функций в соответствующих точках совпадают

$$f'(x'^1, x'^2, \dots x'^n) = f(x^1, x^2, \dots x^n),$$

то говорят, что функция точек $f(x^1, x^2, \dots x^n)$ есть и н в а р и а н т или с к а л я р.

Определение 2 (**контравариантного вектора**) Если для каждой системы координат $x^1, x^2, \dots x^n$ определена совокупность функций $a^1, a^2, \dots a^n$, а для системы координат $x'^1, x'^2, \dots x'^n$ мы имеем свою совокупность функций $a'^1, a'^2, \dots a'^n$, и если при преобразовании координат $x'^i = x'^i(x^1, x^2, \dots x^n)$ эти функции преобразуются по следующим формулам

$$a'^i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a^k = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} a^k \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

то говорят, что совокупность величин $a^1, a^2, \dots a^n$ определяет **контравариантный** вектор, и величины a^i называют составляющими или компонентами контравариантного вектора **a.**

Определение 3 (**ковариантного вектора**) Если для каждой системы координат $x^1, x^2, \dots x^n$ определена совокупность функций $a_1, a_2, \dots a_n$, так что для системы координат $x'^1, x'^2, \dots x'^n$ мы имеем свою совокупность функций $a'_1, a'_2, \dots a'_n$, и если при преобразовании координат $x'^i = x'^i(x^1, x^2, \dots x^n)$ эти функции преобразуются по следующим формулам

$$a'_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} a_k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} a_k \quad (i = 1, 2, \dots n)$$

то мы будем говорить, что совокупность величин $a_1, a_2, \dots a_n$ определяет **ковариантный** вектор, составляющими или компонентами которого они являются.

Определение 4 (определение **контравариантного тензора второго ранга**) Если для каждой системы координат x^α определена совокупность n^2 функций $A^{\alpha\beta}$, которые при преобразовании координат $x^\alpha = x^\alpha(x^1, x^2, \dots x^n)$ $(\alpha = 1, 2, \dots n)$ испытывают преобразования

$$A'^{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^k}{\partial x^\beta} A^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^k}{\partial x^\beta} A^{\alpha\beta}$$

то эти функции определяют контравариантный тензор второго ранга, составляющими которого они являются.

Определение 5 (определение **ковариантного тензора второго ранга**) Если для каждой системы координат x^{α} определена совокупность n^2 функций $A_{\alpha\beta}$, которые при преобразовании координат $x^{\alpha} = x^{\alpha}(x^1, x^2, \dots x^n)$ $(\alpha = 1, 2, \dots n)$ испытывают преобразования

$$A'_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{i}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{k}} A_{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{i}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{k}} A_{\alpha\beta}$$

то эти функции определяют ковариантный тензор второго ранга, составляющими которого они являются.

Определение 6 (определение **смешанного тензора второго ранга**) Если для каждой системы координат x^{α} определена совокупность n^2 функций $A_{\alpha}{}^{\beta}$, которые при преобразовании координат $x^{\alpha} = x^{\alpha}(x^1, x^2, \dots x^n)$ $(\alpha = 1, 2, \dots n)$ испытывают преобразования

$$A'_{i}{}^{k} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{i}} \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{\beta}} A_{\alpha}{}^{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{i}} \frac{\partial x'^{k}}{\partial x^{\beta}} A_{\alpha}{}^{\beta}$$

то эти функции определяют **ковариантный тензор второго ранга**, составляющими которого они являются.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Борисенко, И.Е. Тарапов Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М. Высшая школа, 1966.
2. Н.Е. Кочин Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, М., Наука, 1965.
3. М.А. Акивис, В.В. Гольдберг Тензорное исчисление, М. Наука, 1972.
4. Б.Е. Победря Лекции по тензорному анализу. М. Московский университет. 1979.
5. Г. Корн, Т. Корн Справочник по математике (для научных работников и инженеров) М., Наука. 1974
6. В.И. Смирнов Курс высшей математики том 3, часть 1, М., 1958.
7. Ли Дзун-Дао Математические методы в физике М.. Мир, 1965.
8. .Дж. Мейз Теория и задачи механики сплошных сред, М., Мир, 1974.

Дополнительная литература

9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, М., Физматгиз, 1965.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости, М., Наука, 1965.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика, том 6, М., Наука, 1988.
12. Седов Л.И. Введение в механику сплошных среды, М., Физматгиз, 1962.
13. Прагер В. Введение в механику сплошных сред .М., ИЛ, 1963.
14. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, часть 2, М., 1963.

ОГЛАВЛЕНИЕ стр