

## Часть 3

### Тензорное представление алгоритмов вычислительной гидромеханики

*Теперь следовало бы кое-что добавить о некотором тончайшем эфире, коего силою и действиями частицы тел при весьма малых расстояниях взаимно притягиваются, а при соприкосновении сцепляются, наэлектризованные тела действуют на большие расстояния, как отталкивая, так и притягивая близкие малые тела, свет испускается, отражается, преломляется, уклоняется и нагревает тела, возбуждается всякое чувство, заставляющее члены животных двигаться по желанию, предавая именно колебаниями этого эфира от внешних органов чувств к мозгу и от мозга мускулам. Но это не может быть изложено вкратце, к тому же нет достаточного запаса опытов, коими законы действия этого эфира были бы точно определены и показаны.*

*Исаак Ньютон<sup>1</sup>*

Цифровые ЭВМ позволяют аппроксимировать непрерывные поля и моделировать процессы гидроаэромеханики только с помощью дискретных шагов во времени, оперирующими малыми элементарными объемами в пространстве – крупными частицами жидкости. Конечноразностные дифференциалы, активно использовавшиеся еще во времена Исаака Ньютона, в настоящей работе формализуются с помощью тензорного исчисления, как математического инструмента

---

<sup>1</sup> Завершающие фразы «Математических начал натуральной философии» Исаака Ньютона в переводе с латинского Алексея Николаевича Крылова [1936], с. 662.

для линейной интерполяции физических параметров между смежными пространственными ячейками и их расчетными узлами.

Полноценное описание кинематики крупных частиц жидкости стало возможным в результате специальной физической интерпретации дополнительной пары смешанных тензоров второго ранга, выходящей за синтаксические рамки матричной алгебры, что и послужило обоснованием для введения понятия: «тензорная математика».

В тензорной модели гидромеханики всегда учитываются конвективные составляющие течений; имеется возможность контроля физической корректности моделируемых процессов непосредственно в ходе вычислений; уточняются новые явления и парадоксы механики жидкостей, от которых зависит принципиальная возможность и качество постановки вычислительных экспериментов. Такой вычислительный инструмент не только упрощает форму представления традиционных расчетных схем, но и способен претендовать на своеобразный теоретический анализ особенностей ближнего взаимодействия смежных частиц жидкости.

В завершенном виде вычислительные эксперименты в гидромеханике нуждаются в комплексном представлении информации о больших пространственных полях, к которым строго однозначно применяются как законы механики жидкости, так и различные алгоритмы для адаптации численных решений к реальным условиям. В такой постановке проектирование вычислительных экспериментов опирается на методы «функционального программирования», в котором исходные данные управляют как применимостью математических функций, так и структурой вычислительных алгоритмов в целом.

Обобщенная тензорная форма математической модели гидромеханики, одновременно представила в виде простейших линейных зависимостей конвективные составляющие течений и реологические свойства жидкостей [Астарита, Маруччи, 1978], такие как сжимаемость жидкости, или вязкость и упругость по Ньютону и Гуку. И более того, критерии обусловленности тензорных величин одновременен-

но оказались критериями существования и устойчивости вычислительных моделей гидромеханики в целом.

Все математические записи тензорной модели гидромеханики доведены до уровня простых арифметических выражений с тензорами II-ранга, без труда реализуемых на современных быстродействующих компьютерах. Во многих случаях, *простые арифметические операции с тензорами, как с элементарными частицами жидкости, в полной мере реализуют сложные зависимости дифференциального исчисления для трехмерных полей теоретической гидромеханики.*

И все же, важнейшим элементом рассматриваемой работы является поиск универсального математического инструмента для построения вычислительных экспериментов в гидромеханике, обладающего всеобъемлющими аналитическими возможностями, и позволяющего автоматически применять различные физические законы в зависимости от критериев развития процессов в сплошных средах, в том числе в режиме сквозного распараллеливания всех вычислений, вплоть до каждой элементарной частицы жидкости.

### **Вводные определения**

Вычислительные эксперименты в механике сплошных сред опираются на собственный математический аппарат конечных разностей, в основе которого лежат аппроксимации непрерывных функций с ограниченным количеством опорных величин, распределенных в дискретных ячейках памяти цифровой ЭВМ [Белоцерковский, 1984]. Традиционное дифференциальное исчисление, основанное на анализе бесконечно малых величин и справедливое для аналоговых моделирующих устройств, не в полной мере применимо для цифровых моделей дискретно аппроксимированных физических полей и для разорванных расчетными интервалами времени кинематических процессов.

Для построения элементарных вычислительных объектов гидромеханики необходимо условиться о свойствах единой абсолютной системы координат, в которой будут определяться все математиче-

ские модели и формальные представления скалярных, векторных и тензорных величин. С этой целью представляется полезным упростить численную задачу, ограничившись линейными интерполирующими функциями в узловых точках пространства и линейной экстраполяцией физических процессов на расчетных этапах во времени.

Тензорная математика, оперирующая всеми вычислительными объектами и операциями с ними в размерном виде, в полной мере определяет необходимые правила линейных преобразований в пределах элементарных частиц жидкости, замкнутых между смежными узлами сеточной расчетной области. Такие тензорные формализации существенно расширяют возможности вычислительной гидромеханики, так как точечные или скалярные величины разрозненных дифференциальных уравнений заменяются их объемными аналогами, содержащими в себе полное определение как внешних сил, так и описание внутренней кинематики для всех элементарных частиц жидкости.

Возможность численного решения прикладных задач гидромеханики практически всегда усложнена аппроксимационными критериями, учет которых возможен только при использовании специальных адаптивных решений или гибридных численных схем, основанных на асимптотических, эмпирических зависимостях или экспериментально поверенных эвристиках. Для сохранения принципиальной возможности использования гибридных алгоритмов, а также с целью сквозного контроля качества выполняемых расчетов, очень важно при проектировании вычислительных экспериментов поддерживать логическую непротиворечивость и явное определение физических свойств для всех числовых объектов и расчетных операций с ними, на всех этапах гидродинамического вычислительного эксперимента.

Это приводит к необходимости прямого описания моделируемых процессов в форме, обеспечивающей сквозной и повсеместный контроль режимов течения жидкости на всех этапах вычислительного эксперимента. С этой целью изначально вводились следующие правила:

1) элементарные вычислительные объекты гидромеханики задаются только в размерной форме, в строгой привязке к абсолютной и локальной системам координат, в которых определяются как реологические параметры жидкости, так и динамика потоков внутри и в ближайшей окрестности крупной частицы жидкости;

2) все вычислительные операции соответствуют конкретным законам гидроаэромеханики, а использование промежуточных аналитических преобразований для упрощения исходных математических моделей - недопустимо;

3) расчетные алгоритмы автоматически отслеживают принадлежность численных компонент к единой абсолютной и к связанным локальным системам координат, обеспечивая необходимые переходы между ними, с безусловным контролем соответствия и автоматическим согласованием всех физических размерностей.

Соблюдение столь жесткого комплекса математических условий и вычислительных правил заметно ограничивает использование новых тензорных алгоритмов для воспроизведения многих традиционных задач вычислительной гидромеханики, и особенно – основанных на дифференциальных уравнениях высокого порядка.

В то же время, такие тензорные алгоритмы не содержат принципиальных ограничений для прямого численного моделирования задач механики сплошных сред любой сложности. А некоторые из реализованных на сегодня вычислительных экспериментов лучше сопоставляются именно с натурными и опытовыми наблюдениями, так как аналитические решения и традиционные численные методы, ввиду многих физических допущений при постановке их численной задачи, не всегда позволяют получать аналогичные качественные результаты.

### **Форма представления элементарных объектов вычислительной гидромеханики**

Пространственное описание крупных частиц жидкости выполняется в расширенной тензорной нотации в двух взаимосвязанных

системах координат. Первая – *абсолютная*, или неподвижная (*Эйлерова*) сетка узловых величин, которая является единой и глобальной системой отсчета для всего вычислительного эксперимента. Вторая – локальная, которая выступает естественным базисом конкретной крупной частицы жидкости, участвующей в свободном (*Лагранжевом*) движении по собственной траектории, в динамике которой участвуют внутренние свойства элементарной частицы жидкости. Отсчеты времени едины для всех пространственных систем отсчета, всегда абсолютны и скалярны.

*Прописными* буквами всегда будут обозначаться величины, измеренные относительно нуля глобальной системы отсчета ( $R_k$  – *вектор абсолютных координат для точки в едином глобальном пространстве*,  $T$  – *отсчет времени от начала вычислительного эксперимента*).

*Строчными* – измеренные относительно центров тяжести локальных (*подвижных*) базисов ( $r^k$  – *вектор локальных координат точки, определенной в проекциях связанной системы отсчета внутри конкретной частицы жидкости*).

В пространственных обозначениях *прописными* буквами показываются большие по величине отсчеты, соизмеримые с масштабом расчетной области, *строчными* – конечные разности, которые всегда используются в качестве линейных дифференциалов.

*Левыми верхними индексами* будем отмечать текущие отсчеты во времени, к которым относятся вычислительные объекты или процессы. Индекс  $+$  – это следующий отсчет времени. Если время в вычислительном эксперименте связано с расчетными тактами  $k$ , то:  ${}^+F = {}^{k+1}F$ , что соответствует отсчету времени:  ${}^+T = {}^{k+1}T = {}^0T + (k+1) \cdot t$ , где:  $t$  – расчетный интервал времени;

*Левыми нижними индексами* отмечаются номера или индексы пространственных ячеек сеточной области, которые можно трактовать как эйлерову дискретную и неподвижную, или абсолютную систему координат. Исходное местоположение одной конкретной крупной частицы жидкости будем размечать левыми нижними индексами

прописными буквами  $_{j,k}\Omega$ , а такие же пространственные метки для подвижных частиц жидкости в целом – строчными индексами  $\{_{jk}\Omega\}$ . Фигурные скобки также свидетельствуют о рассмотрении множества ячеек, образующих неразрывное пространственное поле. Индексом  $+\Omega$  обозначим некоторую смежную пространственную ячейку жидкости или смежный узел сеточной области.

$_{\Omega}^T\vec{R}$  – координаты узловой точки. Нижний индекс  $\Omega$  – определяет местоположение узла в расчетной области (рис. 3.1); Верхний индекс  $T$  – момент времени от начала проведения вычислительного эксперимента; стрелка вправо  $\rightarrow$  указывает на принадлежность к абсолютной системе отсчета; прописная буква  $R$  – на отсчет от общего нуля абсолютной системы координат.

$^t_+\vec{R}$  – ссылка на смежную точку, относительно  $_{\Omega}^T\vec{R}$  в сторону + от исходного центра масс крупной частицы жидкости  $\Omega$  за время  $t$ .

Все *правые индексы* являются тензорными идентификаторами и всегда обозначают принадлежность к какой-либо системе отсчета. Нижние индексы привязывают объект к абсолютной системе координат, верхние, соответственно, к локальному базису. Векторные стрелки могут заменять индексы, при этом стрелка вправо  $\rightarrow$  отмечает принадлежность к абсолютной системе отсчета (*нижний индекс*), стрелка влево  $\leftarrow$  к локальной (*верхний индекс*). Тензорные величины отмечаются двойными индексами или уголками:  $\wedge$  - абсолютная;  $\vee$  - локальная;  $\succ, \prec$  и  $\times$  – смешанные системы отсчета.

По аналогии, в местной системе отсчета единственным образом могут быть представлены проекции единичных ортов абсолютной системы координат внутри локального базиса, что образует дуальный базис типа:  $\vee\vec{r} = \vee\vec{r}^{\prec j} = \vee\vec{r}^{\wedge ij} = \vee\vec{r}^{\wedge ij}{}^{-1}$ , где компоненты тензора могут быть сформированы простыми геометрическими построениями свободных единичных отрезков абсолютного базиса в отсечках по сторонам косоугольных параллелограммов внутри локального базиса.

Чаще всего тензорные объекты используются для связи векторных величин в разных базисах. Так  $\vec{a} = \vec{a}^{\prec} \cdot \vee\vec{r}$  – переводит вектор из

абсолютной в локальную систему координат. При переходе локального вектора из одной системы координат в другую он не меняет своего дифференциального – конечноразностного смысла, однако физические размерности приобретают существенно другой смысл практически всегда. Для перестройки *не свободного* вектора из локальной системы отсчета в абсолютную (рис. 3.1), необходимо добавить координаты опорной точки локального базиса:  $\vec{A} = \vec{R} + \vec{a} \cdot \hat{r}$ .

Смешанные тензоры образуются аналогично и обычно они проявляются в операциях определения законов механики сплошной среды. К сожалению, при построении тензорных величин для гидродинамических объектов невозможно воспользоваться привычным аппаратом матричной алгебры, описательных возможностей которой не хватает для определения смешанных тензоров.

Приведенные выше правила манипулирования тензорными индексами и геометрические истолкования операций с пространственными объектами формализуются в классическом тензорном анализе [Астарита, 1978] следующими предложениями:

**Правило суммирования.** *Если один и тот же индекс встречается в явно одночленном выражении дважды – один раз как верхний, а другой как нижний, то предполагается суммирование соответствующих выражений при пробегании этим индексом значений 1,2,3. Такой индекс называют НЕМЫМ.*

**Проверка на согласованность.** *Любой индекс, не являющийся немым, должен встречаться во всех членах уравнения либо как верхний, либо как нижний индекс. Любое уравнение, содержащее индексы отличные от немых, должно быть интерпретировано как система уравнений, когда каждый индекс принимает значения 1,2,3.*

**Примечание:** *верхние индексы, встречающиеся в знаменателе одночленного выражения, эквивалентны нижним индексам этого выражения.*

**Дополнение:** *В операциях произведения базисные или трансформирующие тензоры будут ставиться справа, а изменяемые векторы и тензоры – слева.*

Все правила тензорной алгебры [Мак-Коннел, 1963; Астарита, 1978] в используемой далее трехмерной математике справедливы в полной мере. В то же время использование дифференциальных операций в функциях бесконечно малых из традиционного тензорного исчисления ограничено, и в настоящем исследовании практически повсеместно заменено аналогичными законами гидромеханики для «крупных частиц жидкости» и их смежных расчетных узлов, находящихся на конечном расстоянии друг от друга.

### Определение координатных систем

Все векторные и тензорные числовые объекты в механике сплошных сред строго и однозначно соотносятся с абсолютной и неподвижной системой координат и с некоторым малым локальным базисом, условно замороженным в подвижную и деформируемую сплошную среду.

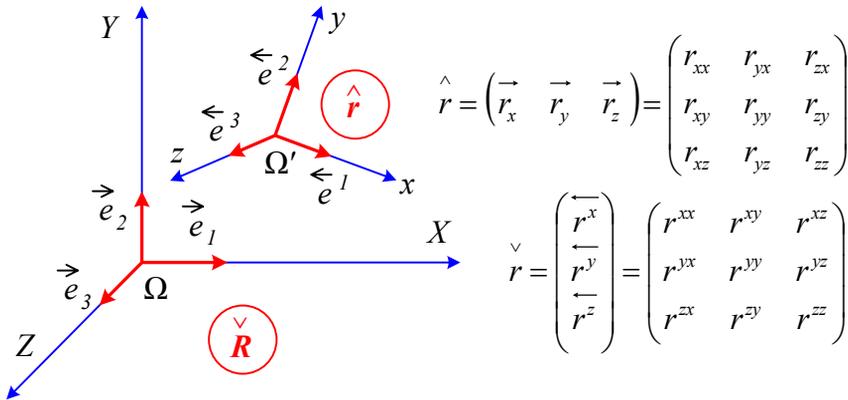


Рис. 3.1. Условная разметка локального пространственного базиса, образующего тензор формы  $\hat{r}$  для малого континуума сплошной среды - крупной частицы жидкости. Символом  $\Omega$  отмечено начало абсолютной системы координат, символом  $\Omega'$  – местоположение локального базиса.

На рисунке 3.1 координатные оси локального базиса отмечены строчными буквами  $e_j$  с числовыми индексами, как:

$$\vec{\Omega}' \equiv \Omega \{ \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \}.$$

Каждый из базисных векторов измерен в абсолютной координатной системе, что отмечено стрелкой вправо.

Главную или абсолютную и неподвижную систему координат всегда будем определять только как декартовую. Локальные (*местные*) системы отсчета могут опираться на произвольные тройки некомпланарных (*не лежащих в одной плоскости*) векторов, имеющих различные (*анизотропные*<sup>2</sup>) масштабные нормировки (*метрики*). Этого достаточно для чисто линейных преобразований векторных объектов при переходе между абсолютной и местными координатными системами. Такие преобразования координат обеспечиваются простыми произведениями между искомыми векторами и тензорами II ранга, как обычными матричными операторами.

Локальный тензор  $\hat{r} = \hat{f}(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  может быть определен в качестве произвольного координатного трехгранника<sup>3</sup>, образующего прямолинейные оси  $\{x, y, z\}$  косоугольного базиса, условно "вмороженного" в малый континуум сплошной среды, или жестко связанного с каким-либо подвижным твердым телом и формально свободного от прямых связей с абсолютной системой отсчета.

В случае определения компонент локального тензора  $\hat{r}$  в проекциях абсолютной системы координат, он может не представляться ни ортогональным, ни ортонормированным базисом, что на рис. 3.1 иллюстрируется произвольностью ориентации единичных ортов  $\vec{e}_k$ . В то же время, для локальных векторных или тензорных компонент, измеряемых внутри этого базиса  $\hat{r}$ , такой координатный тензор всегда будет считаться строго ортогональным и ортонормированным.

---

<sup>2</sup> Анизотропность – означает, что базисные векторы локальной системы отсчета имеют различную длину, что формально приводит к масштабам длин, зависящим от направления.

<sup>3</sup> Тензоры – как операторы для преобразования координат, могут строиться на косоугольных и анизотропных локальных пространствах, однако для всех внутренних векторов они обладают свойствами декартовых (*ортогональных и ортонормированных*) систем координатных отсчетов.

Наличие тензорных преобразований означает, что все векторные величины в собственном базисе могут считаться заданными в пространстве трех взаимно ортогональных векторов-ортов:  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  декартовой системы координат.

Так же как и в одномерном случае будем обозначать векторные компоненты, измеренные относительно «далеко» удаленного абсолютного базиса прописными буквами, а малые отсчеты в локальном - строчными.

Локальный базис  $\hat{r}$  смещен в пространстве определенным вектором  $\vec{R}$ , отмеряном относительно единого центра и приведенном в проекциях глобальной системы координат  $\{ X, Y, Z \}$ . В обозначении  $\overleftarrow{R}$ , стрелка влево  $\leftarrow$  здесь указывает, что «длинный» вектор  $R$  для абсолютных координат местоположения крупной частицы жидкости, был приведен к проекциям локальной системы отсчета, и стал показывать отображение единого глобального центра координат внутри связанного с крупной частицей жидкости локального или естественного базиса.

Малые свободные векторы обычно ассоциируются с дифференциальными разностями, связанными с естественными подвижными базисами крупных частиц жидкости. Такие векторы считаются свободными лишь на этапах прямого применения законов гидромеханики. Реальные точки приложения «коротких» разностных векторов, определяющие так называемые центровки расчетных шаблонов (*узлов и центров масс крупных частиц жидкости*), строго учитываются на третьем – обобщающем этапе расчетов<sup>4</sup>.

Те же дифференциальные или конечные разности, определенные в проекциях глобальной системы координат, обозначаются строчной буквой со стрелкой вправо:

$$\vec{a} \equiv \vec{a}(x, y, z).$$

<sup>4</sup> В соответствии со схемой разделения решений по физическим процессам Лагранже-Эйлера подхода, на третьем обобщающем этапе расчетов производится согласование условий неразрывности, сохранения массы и энергии.

Тогда абсолютные координаты точки на конце условно свободного вектора  $\vec{a}$  будут определяться с помощью суммы:

$$\vec{A} = \vec{R} + \vec{a},$$

в которой соблюдается условие о принадлежности суммируемых величин к одному и тому же базису, в данном случае – абсолютной системе координат.

Вектор  $\overleftarrow{a}$ , проекции которого определены в локальном базисе, отмечается стрелкой, направленной влево:

$$\overleftarrow{a} = \overleftarrow{a} (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3).$$

Соответственно, отстояние центра абсолютной системы координат (рис. 3.1) будет определено в том же локальном базисе с помощью «длинного» вектора:

$$\overleftarrow{R} = \overleftarrow{R} (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3),$$

что образует взаимно однозначные правила преобразований координат.

Учитывая, что в определении тензора формы крупной частицы жидкости заложено требование его обратимости:

$$\overset{\wedge}{r} \cdot \overset{\vee}{r} = I,$$

допустимо использование операции деления на тензор<sup>5</sup> локального базиса, соответствующей умножению на обратный (дуальный) к нему тензорный числовой объект:

$$r^{ij} \cdot a_j = \overset{\rightarrow}{a} \cdot \overset{\vee}{r} = \overset{\rightarrow}{a} / \overset{\wedge}{r} = a_i / r_{ij}.$$

Для векторных объектов аналогичные замены умножения делением недопустимы, так как изменение позиции индекса для вектора означает перевод его из исходной системы координат в дуальную, а

---

<sup>5</sup> Обращение тензора, справедливое для тензора формы крупной частицы  $\overset{\wedge}{r}$ , не может без особых оговорок применяться к тензорам конвективных скоростей, напряжений или инерционной плотности и др., используемым в этой работе далее.

само по себе понятие обратного вектора не определено, и никак не может быть обосновано.

При выполнении умножения векторных и тензорных объектов, для исключения потери информации и недопущения переопределенных, но вырожденных геометрических объектов, в операциях произведения запрещено изменение ранга числовых объектов. Такое ограничение реализуется при условии, что *все операции умножения являются внутренними*, в которых задействуются только *связанные компоненты из взаимно дуальных координатных базисов*<sup>6</sup>. При умножении вектора на тензор может быть получен только вектор, а произведение двух тензоров второго ранга снова приводит только к тензору второго ранга.

Жесткие ограничения на применимость операций сложения и умножения для рассмотренных в этой работе векторных и тензорных объектов необходимы для построения специальных вычислительных алгоритмов, которые по формальному признаку принадлежности вычислительных объектов к конкретным системам отсчета позволят автоматизировать все координатные преобразования как при непосредственном решении задач механики, так и при представлении их результатов на экране ЭВМ.

Запреты на изменение ранга при выполнении любых операций произведения иногда позволяют избежать логических ошибок при свободной расстановке тензорных и векторных сомножителей в одночленных выражениях.

В дополнение к особенностям практической реализации математических моделей вычислительной гидромеханики можно отметить часто используемый алгоритм чисто геометрических построений, в котором при численном определении векторных объектов, будь то в ковариантных, либо в контравариантных компонентах, производятся

---

<sup>6</sup> Запрет изменения ранга векторных и тензорных объектов заметно ограничивает варианты перестановки числовых объектов в одночленных произведениях. В то же время, при задействовании аппарата физического контроля корректности вычислительных моделей, создается возможность для автоматического выбора алгоритмов численной реализации операций преобразования координатных систем.

прямые измерения векторных проекций на осях соответствующих базисов. Скалярные компоненты, заполняющие искомые матрицы векторов и тензоров, в этом случае конструируются делением измеренных величин координатных проекций на соответствующие отсчеты для собственных единичных ортов на тех же базисных осях.

В реализации вычислительных моделей очень важно отслеживать и предотвращать недопустимые результаты численных операций, в которых базисные векторы локальной системы координат не должны оказаться в одной плоскости, а их длины не обращались бы в ноль. К таким результатам может привести нарушение устойчивости расчетов или аппроксимационных критериев, отчего определитель тензора  $\hat{\mathbf{r}}$  становится вырожденным, и в нем невозможно однозначно преобразования числовых объектов в дуально связанных системах координат.

В процессе вычислений такой гарантии не существует, и поэтому обработка вырождающихся тензоров должна выполняться непосредственно в ходе вычислительного эксперимента, с привлечением особых физических условий и дополнительных ограничений. В компьютерных алгоритмах такие действия могут быть вынесены на уровень обработки исключительных ситуаций, фактически же – возвращая операции вычислительной гидромеханики на исходный логический уровень для уточненного конструирования или эмпирической адаптации базовых числовых объектов.

Во многих случаях вырождение тензоров связано с качественным изменением режимов течения жидкости, как образование свободных или кавитирующих границ разрыва, или зарождение свободных вихрей, пограничных слоев или ударных фронтов. В этом случае в вычислительном эксперименте должны отрабатывать автоматические схемы для применения адаптивных схем или гибридных численных решений, позволяющих продолжить моделирование с учетом произошедших изменений свободных границ или режимов вихревых течений.

### Пространственно-временные привязки вычислительных объектов

Левые индексы, как упоминалось ранее, используются для привязки элементарных вычислительных объектов (*крупных частиц жидкости*) в пространстве – *левый нижний индекс*, и во времени – *левый верхний индекс*. Отсутствие левых индексов подразумевает, что определение относится к текущему моменту времени и ко всем элементарным ячейкам расчетной области, соответственно.

Несложно ввести определение для полного или абсолютного вектора скорости в качестве величины смещения координат крупной частицы жидкости относительно абсолютной системы координат:

$$\vec{V} \cdot t = {}^{\Delta}\vec{R} = {}^t\vec{R} - {}^0\vec{R} = {}^{T+t}\vec{R} - {}^T\vec{R}.$$

В векторе полной скорости содержится предыстория нестационарного движения элементарной частицы жидкости, а также условное или виртуальное перемещение центра глобальной системы отсчета.

Пространственные дифференциальные разности получаются при аналогичном вектором сопоставлении смежных ячеек жидкости или их узловых точек:

$$\vec{r} = {}_{\Delta}\vec{R} = {}_{+}\vec{R} - {}_{\Omega}\vec{R}.$$

Тензор формы крупной частицы жидкости получается простой фиксацией сразу трех смежных разностей, разнесенных по ортогональным направлениям:

$$\hat{r} = \overset{\wedge}{r}_i = {}_{\Delta}\vec{R}_i = {}_{+}\vec{R}_i - {}_{\Omega}\vec{R}_i.$$

В инерциальной системе отсчета центр глобальной системы отсчета условно неподвижен или движется со строго постоянной скоростью. Тогда в виде конечных разностей формально вводится кинематическое понятие приращения скорости, которое будет характеризовать динамические свойства крупной частицы жидкости, и потому обозначается строчной буквой:

$$\vec{w} \cdot t = {}^{\Delta}\vec{V} = {}^{+}\vec{V} - {}^{\Omega}\vec{V}. \quad [m/c]$$

Можно полагать, что вектор  $\vec{w}$  задает привычное ускорение, которое можно отнести к крупной частице жидкости в целом.

По аналогии с определением тензора формы крупной частицы, можно прямыми построениями получить тензор внутренних скоростей течения жидкости, условно связанный со скоростью взаимной деформации базисных ортов для смежных точек в потоке жидкости:

$$\hat{\omega} = \vec{\omega}^i = {}_A\vec{V}_i = {}_+V_i - \Omega\vec{V}_i. \quad [M^3/c]$$

Полученный тензор  $\hat{\omega}$  характеризует наличие внутренней кинетической энергии, замкнутой внутри движущихся элементарных частиц жидкости. Даже в случае стационарных в целом течений, каждая из подвижных частиц непрерывно изменяет интенсивность своих внутренних течений, обеспечивая условно независимое движение по криволинейным линиям тока (*совпадающим с траекториями этих же элементарных частиц*). Это означает, что в соответствии с теоремой о «живых силах», для изменения внутренней кинетической энергии элементарной частицы жидкости, она должна постоянно потреблять (*излучать*) работу внешних сил. Формально это может интерпретироваться в качестве кинематического закона инерции, связывающего действие внешних сил с изменением интенсивности течений, замкнутых внутри крупной частицы жидкости.

Чтобы определить динамику элементарной частицы жидкости необходимо построить разностный тензор скорости для смещаемых во времени базисных векторов тензора ее формы:

$$\hat{v} \cdot t = v_i \cdot t = {}_A\vec{r}_i = {}_+r_i - \Omega\vec{r}_i.$$

Допуская, что в начальный момент времени тензор внутренних течений  $\hat{\omega}$  равен нулю, что обычно и предполагается на эйлеровом этапе вычислительного эксперимента, тензор  $\hat{v}$  определит текущие скорости для ортов локального базиса. Переходя в локальную систему отсчета:

$$\vec{v} = \hat{v} \cdot \vec{r}, \quad [1/c]$$

получается хорошо известный тензор конвективных скоростей, задающий вращение и деформацию крупной частицы жидкости.

Реологические свойства жидкости в вычислительном эксперименте всегда проявляются в виде тензорных описателей внутренних свойств элементарных расчетных объектов, для которых в процессе расчетов должно обеспечиваться сохранение реологических параметров течения жидкости, параллельно с проведением контроля критериев существования самого численного решения.

### Основные действия и операции с пространственными объектами

Формальные операции, связанные с построением и анализом векторов и базисных тензоров, назовем математическими действиями логического или аналитического уровня. В вычислительной математике такие операции выбираются в рамках законов гидромеханики, транслируемых на алгоритмические правила (*операции с данными – «существительными»*)<sup>7</sup> и функциональные зависимости (*взаимодействие процедур – «глаголов»*), в полной мере учитывающие особенности используемых языков программирования.

На проектном уровне, при построении конкретных вычислительных экспериментов, в том числе по моделированию реальных физических процессов в механике жидкости, искусственно конструируются все операции математического и тензорного анализа, используемые прямо, либо косвенно.

На этот же уровень относятся векторные и тензорные операции аналитической геометрии, задающие скалярное и векторное умножение свободных векторов при построении векторных полей, ориентации пространственных площадок, вычислении проекций тензорных компонент, собственных векторов, физических инвариант и других описателей свойств жидкости.

---

<sup>7</sup> По аналогии с ключевыми конструкциями естественных языков.

В любом случае, применяя операции векторного исчисления к упомянутым здесь векторным и тензорным величинам, надо исходить из конкретных условий решаемой задачи гидромеханики и четко представлять физический смысл результата, полученного посредством этих операций.

Таким образом, для конструирования числовых объектов и операций, на исходном уровне не задается сколь-нибудь строгих или формализованных правил. Однако это же означает, что все искусственные объекты и операции должны всегда особо обосновываться с логических позиций, с позиций соблюдения здравого смысла при проектировании новых физических моделей и прямых числительных экспериментов.

Действиями арифметического или первого уровня можно называть операции сложения, которые могут применяться только к числовым объектам, имеющим строго одинаковые физические размерности, при условии их определения строго в одном и том же координатном базисе и *наличии общей точки схождения складываемых векторов*. Аналогичные условия выполнения операции сложения должны применяться при суммировании тензорных величин, а по сути, эти же требования предъявляются и к сложению скаляров.

Математическими действиями второго уровня будем называть операции произведения векторных и тензорных вычислительных объектов.

Операции произведения векторов и тензоров связываются геометрическим смыслом переходов векторных величин или базисных векторов тензора из одной системы координат в другую. В таких операциях прямо или косвенно участвуют координатные тензоры  $\hat{r}$ , которые обеспечивают пересчет векторных компонент между дуальными координатными базисами. Это довольно жесткие ограничения, которые на логическом уровне запрещают повышение ранга тензорных и векторных величин за счет простого применения операции умножения.

Кинематические операции и неотделимые от них законы гидромеханики можно отнести к наиболее сложному третьему или логическому уровню математических действий.

Определим полный пересчет координат произвольной точке в абсолютной и локальной системе координат. Локальные координаты точки  $\overleftarrow{a}$  переходят в абсолютную систему координат в виде суммы вектора местоположения базиса и произведения локального вектора с тензором его базиса в той же абсолютной системе отсчета:

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{R} + \overleftarrow{a} \cdot \hat{r}, \quad [м]$$

где вектор  $\overleftarrow{a}$ , изменяющий свою систему координат, стоит в произведении слева.

Физические размерности всех числовых объектов определены в абсолютной системе координат. Размерность базисного тензора локальной системы отсчета  $\hat{r} : [м^3]$ . Это означает, что все величины, заданные внутри локального базиса, должны представляться как распределенные по объему (трехмерному пространству). Геометрический вектор  $\overleftarrow{a}$  будет иметь размерность  $[м/м^3]$  или  $[м^{-2}]$ , что предполагает такой вектор не традиционным геометрическим объектом, а скорее особой точкой некоторого поляризованного поля, определяемого интенсивностью и направлением вектора  $\overleftarrow{a}$ .

Малые перемещения во времени и пространстве исторически определялись с помощью исчисления флюксий<sup>8</sup>, лежащих в основах механики Ньютона в качестве изначально разностного описания движения в пространстве и во времени. Для кинематической задачи в качестве флюксий выступает скорость, которая образует разностный дифференциал (по Ньютону – момент) в произведении с расчетным шагом во времени  $\Delta t$  или просто –  $t$ . Для точки, вмороженной в жидкость, кинематическое уравнение может быть представлено в качест-

<sup>8</sup> Флюенты (*fluens, fluentis – текущий*) – функции  $x, y, z$  по аргументу времени  $t$ ; Флюксии (*fluxio – истечение*) –  $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$  производные  $x, y, z$  по времени.

ве дифференциала (момента) скоростей движения и времени в абсолютной и внутри локальной систем координат<sup>9</sup>.

$${}^+ \vec{A} = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + \hat{a} \cdot (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) = {}^0 \vec{A} + (\vec{V} + \hat{a} \cdot \hat{v}) \cdot t,$$

где:  $t$  – расчетный интервал времени;  $\hat{a}$  – координаты контрольной точки в локальной системе отсчета;  ${}^+ \vec{A}$  и  ${}^0 \vec{A}$  – новое и исходное положение контрольной точки в абсолютной системе координат;  $\vec{R}$  – местоположение локального базиса в абсолютной системе координат;  $\vec{V}$  – скорость поступательного смещения локального базиса – крупной частицы жидкости;  $\hat{r}$  – тензор формы крупной частицы жидкости;  $\hat{v}$  – тензор скоростей локальных движений базисных осей тензора, определяющий деформацию крупной частицы жидкости.

Если аналогичное приращение координат будет свойственно внутреннему вектору  $\hat{a}$  как дифференциал скорости перемещения среды внутри крупной частицы жидкости  $\hat{\omega} \cdot t$  в точке  $\hat{a}$ , то кинематическое выражение приобретет второй порядок по времени, свойственный динамическим уравнениям с дополнительным слагаемым для приращения скоростей внутренних движений и деформаций базиса:

$${}^+ \vec{A} = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + \hat{a} \cdot (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) + \hat{\omega} \cdot (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) \cdot t.$$

### Формальное приведение уравнений движения к Эйлеровым

Придерживаясь метода флюксий Ньютона, из полученного кинематического выражения необходимо убрать постоянную часть  ${}^0 \vec{A}$ . Последний член, помноженный на малую величину  $t$ , в рамках исчисления флюксий также опускается. Можно пояснить, что вместе с малым членом исключается из рассмотрения движение жидкости внутри крупной частицы, тем самым формально обеспечивается ус-

<sup>9</sup> В скалярной форме:

$$\begin{aligned} {}^+ A_x &= {}^0 A_x + (V_x + a^x v_{xx} + a^y v_{yx} + a^z v_{zx}); \\ {}^+ A_y &= {}^0 A_y + (V_y + a^x v_{xy} + a^y v_{yy} + a^z v_{zy}); \\ {}^+ A_z &= {}^0 A_z + (V_z + a^x v_{xz} + a^y v_{yz} + a^z v_{zz}). \end{aligned}$$

ловие сохранения ее массы (при этом исключается возможность перетока энергии внешнего движения во внутреннее).

$$\overset{\rightarrow}{a}V = \overset{\rightarrow}{o}V + \overset{\leftarrow}{a} \cdot \overset{\rightarrow}{v} = \overset{\rightarrow}{o}V + \overset{\rightarrow}{a} \cdot \overset{\rightarrow}{r} \cdot \overset{\rightarrow}{v},$$

где:  $\overset{\rightarrow}{a}V$  - скорость, измеренная в координатах точки  $\overset{\leftarrow}{a}$ ;  $\overset{\rightarrow}{o}V$  - скорость движения базиса.

Можно отказаться от представления вектора  $\overset{\leftarrow}{a} = \overset{\rightarrow}{a} \cdot \overset{\vee}{r}$  в локальной системе координат, и привести тензор локальных скоростей к смешанному тензору конвективных скоростей, нормированному относительно ортов абсолютного базиса<sup>10</sup>:

$$\overset{\rightarrow}{a}V = \overset{\rightarrow}{o}V + (\overset{\wedge}{v} \cdot \overset{\vee}{r}) \cdot \overset{\rightarrow}{a} = \overset{\rightarrow}{o}V + \overset{\rightarrow}{v} \cdot \overset{\rightarrow}{a},$$

компоненты которого образуют композиции пространственных производных для скорости деформации крупной частицы жидкости:

$$\overset{\wedge}{v} \cdot \overset{\vee}{r} = \overset{\wedge}{v} \cdot \overset{\wedge}{r} = \overset{\rightarrow}{v} = \begin{pmatrix} v_x^x & v_x^y & v_x^z \\ v_y^x & v_y^y & v_y^z \\ v_z^x & v_z^y & v_z^z \end{pmatrix}. \quad [1/c]$$

В принятых здесь математических обозначениях производная по времени соответствует простому делению на расчетный интервал времени  $t$  так, что  $\overset{\rightarrow}{a}/t$  в точности соответствует производной  $\overset{\rightarrow}{\delta a}/\delta t$ . Можно показать, что в таком случае тензорное выражение формально соответствует традиционной записи системы дифференциальных уравнений движения в частных производных в форме Эйлера, однако тензорная запись имеет значительно более сложное содержание.

Обратим внимание, что полнота уравнений Эйлера заключается лишь в том, что в них учитывается скорость поступательного движения общего потока  $\overset{\rightarrow}{o}V$  в бесконечно малой окрестности пространственной точки  $\overset{\rightarrow}{a}$ . Такое движение определяет перемещение жидкости

<sup>10</sup>  $v_{ij} \cdot r^{jk} = \begin{pmatrix} v_{xx}r^{xx} + v_{xy}r^{yx} + v_{xz}r^{zx} & v_{xx}r^{xy} + v_{xy}r^{yy} + v_{xz}r^{zy} & v_{xx}r^{xz} + v_{xy}r^{yz} + v_{xz}r^{zz} \\ v_{yx}r^{xx} + v_{yy}r^{yx} + v_{yz}r^{zx} & v_{yx}r^{xy} + v_{yy}r^{yy} + v_{yz}r^{zy} & v_{yx}r^{xz} + v_{yy}r^{yz} + v_{yz}r^{zz} \\ v_{zx}r^{xx} + v_{zy}r^{yx} + v_{zz}r^{zx} & v_{zx}r^{xy} + v_{zy}r^{yy} + v_{zz}r^{zy} & v_{zx}r^{xz} + v_{zy}r^{yz} + v_{zz}r^{zz} \end{pmatrix}.$

внутри как бы условно неподвижного базиса  $\hat{r}$ , образованного стационарной эйлеровой сеткой. Довольно неопределенная трактовка кинематической сути уравнений движения в форме Эйлера на самом деле служит цели упрощения физического смысла выражения, необходимого для сохранения возможности формального представления закона движения в виде системы дифференциальных уравнений второго порядка, достигаемого после дополнительных допущений в дифференциальной записи для условно бестелесной пространственной точки<sup>11</sup>.

Оставаясь в определениях исчисления флюксий, можно опустить независящие от скорости слагаемые полных координатных преобразований:  $\vec{A} = \vec{R} + \vec{a}$ , и затем привести уравнения только к производным по времени (*к чистым флюксиям*):

$$\dot{\vec{v}} + \frac{\hat{\nabla}}{\hat{r}} \cdot \vec{a} \cong \frac{\vec{\delta} V}{\delta t} + \frac{\delta \hat{v}}{\delta \hat{r}} \frac{\delta \vec{a}}{\delta t} = \vec{F},$$

где в правой части указан вектор распределенной внешней силы:  $\vec{F}$ , принятой в предположении условно единичной плотности жидкости. Знак " $\cong$ " здесь означает, что выражение записано не в полной тензорной нотации, а с допущениями, необходимыми для сведения системы уравнений движения к дифференциальному представлению для бестелесной пространственной точки.

Важно отметить, что при полном раскрытии тензорной записи кинематических уравнений движения  $\vec{v} = \hat{v} \cdot \hat{r}$ , получаются много более сложные комплексы из скалярных компонент тензорно-векторных преобразований, нежели в искусственно выхолощенной системе дифференциальных уравнений Эйлера. Исходные тензорные операции  $\hat{v} \cdot \hat{r}$  вполне определяют кинематику жидкости, а в компью-

---

<sup>11</sup> Линейные градиенты (*производные*) в кинематике течений оцениваются парами пространственных точек; одномоментное искривление линий тока в динамике ускоренного движения – смежными интерполирующими тройками, в которых однозначность прямых и обратных геометрических преобразований не обусловлена.

терном представлении точно описывают элементарные числовые объекты с линейными аппроксимирующими свойствами. В то же время, система уравнений для пространственной точки в форме Эйлера является безмерно сложным для численного представления математическим объектом, так как в ней теряются строгие пространственные связи между смежными частицами жидкости.

Традиционная система дифференциальных уравнений движения в частных производных в форме Эйлера имеет вид:

$$\frac{\delta V_i}{\delta t} + \frac{\delta v_{ij}}{\delta r_{jk}} \frac{\delta a_k}{\delta t} \cong \left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta V_x}{\delta t} + \frac{\delta v_x}{\delta x} V_x + \frac{\delta v_x}{\delta y} V_y + \frac{\delta v_x}{\delta z} V_z = F_x \\ \frac{\delta V_y}{\delta t} + \frac{\delta v_y}{\delta x} V_x + \frac{\delta v_y}{\delta y} V_y + \frac{\delta v_y}{\delta z} V_z = F_y \\ \frac{\delta V_z}{\delta t} + \frac{\delta v_z}{\delta x} V_x + \frac{\delta v_z}{\delta y} V_y + \frac{\delta v_z}{\delta z} V_z = F_z \end{array} \right\} = F_i,$$

и уже не обладает той же физической полнотой и однозначностью используемых операций, характерных для прямых определений вычислительных объектов в разностно-тензорных описаниях.

При попытке доопределения или идеализации физических свойств сплошной среды, многие тензорные компоненты полного кинематического выражения  $\hat{v} \cdot \hat{r}$  могут быть обнулены или признаны несущественными, однако это не приведет к упрощению математических операций или к более полному раскрытию сути описываемых процессов механики, и вряд ли даст большую наглядность компьютерным алгоритмам или ускорит численные расчеты больших полей в механике жидкости.

Можно полагать, что в тензорной постановке прямого вычислительного эксперимента в гидромеханике, нет смысла в искусственном упрощении физических свойств моделируемых течений жидкости еще и потому, что в этом случае в математическом описании появляются неформальные операции, обоснованность которых на всех этапах моделирования нуждается в особом эвристическом домысливании. Такие неформализованные, так же как и выхолощенные модели

механики жидкости практически невозможно обеспечить универсальными подходами при проектировании и построении вычислительных экспериментов в целом, и еще сложнее найти методы обоснованного учета особых режимов течения, которые должны непрерывно выявляться прямо в процессе вычислений, и разрешаться автоматическим выбором специальных компьютерных процедур, или применением иных адаптивных алгоритмов, уточняющих численные решения в сложных областях течения жидкости.

### **Связь между уравнениями кинематики и законами гидромеханики**

Вернемся к исходной тензорной записи уравнения движения, допускающей локальные течения внутри крупной частицы жидкости.

Согласно исчислению флюксий, опустим не изменяющуюся часть кинематического уравнения и разделим результат на малый параметр  $t$  для приведения уравнения к величине скорости движения:

$${}^+ \vec{V} = {}^0 \vec{V} + v \cdot \hat{a} + r \cdot \hat{\omega} + v \cdot \hat{\omega} t.$$

После приведения локальных векторов к абсолютной системе отсчета выпал сомножитель с базисным тензором, так как:  $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$ :

$${}^+ \vec{V} = {}^0 \vec{V} + \hat{\omega} + v \cdot \hat{a} + v \cdot \hat{\omega} t. \quad [м/с]$$

Получается разложение вектора движения в абсолютной системе координат на составляющие: скорости полного потока  $\vec{V}$ ; скорости внутреннего смещения  $\hat{\omega}$ ; конвективной скорости  $v \cdot \hat{a}$ ; и некоторого приращения локальной скорости  $v \cdot \hat{\omega} t$ , зависящего от скорости течений внутри крупной частицы жидкости. Заметим, что в исчислении флюксий Ньютона последнее слагаемое, содержащее малый множитель  $t$  можно опускать, но не будем спешить с потерей локальных течений внутри крупной частицы жидкости.

Приведенных кинематических выражений вполне достаточно для фиксации смещений частиц жидкости и для согласования их новых скоростей движения. Однако, если особым образом не ограничить течения внутри крупной частицы жидкости, то задача

окажется переопределенной, а в каждом локальном базисе образуются столь же полные модели гидромеханики, энергия течений в которых может проявиться сколь угодно большой, а полное решение гидромеханической задачи, соответственно, - чрезмерно усложненным.

Естественным и обобщающим решением проблемы учета внутренних течений, проявляющихся в виде реакции (*инерции*) внутренней кинетической энергии, является использование своеобразного логического тензора плотности  $\overset{\vee}{\rho}$ , определенного внутри локального базиса  $\overset{\wedge}{r}$  с физическими размерностями распределенной массы [кг/м<sup>3</sup>]. Первое проектирование (*пространственное интегрирование*) для приведения компонент тензора плотности к абсолютной системе координат, превращает его в тензор:  $\overset{<}{M}$  ассоциируемый с инерционной массой [кг] элементарной частицы жидкости, безусловно определяющей особую внутреннюю энергию движения в обобщенной тензорной модели крупнй частицы жидкости<sup>12</sup>:

$$\overset{<}{M} = \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{r} = m_j^i, \quad [кг]$$

где тензор формы  $\overset{\wedge}{r}$  трансформировался для нормализации (*исключения пространственного масштаба*) внутренней кинетической энергии частицы жидкости, связав ее с текущей инерционной (*активной или тензорной*) массой для конкретной элементарной частицы жидкости  $\overset{<}{M}$ .

Кажущаяся искусственность в определении обратного и смешанного тензоров массы, необходима для придания этому тензору ведущего значения в расчетных операциях математической модели,

<sup>12</sup> Отметим здесь, что в определении тензора формы использованы базисные векторы в проекциях на абсолютную систему координат, соответственно первое дифференцирование приводит к тензору конвективных скоростей  $\overset{>}{v} = v_1^j$  – первый индекс нижний, второй – верхний. Тензор плотности  $\overset{<}{M} = M_j^i$  в качестве анизотропного распределения инерционной массы жидкости изначально определяется в локальном базисе, и потому его первое интегрирование приводит к смешанному тензору, формально обратному к чисто кинематическому тензору конвективных скоростей, с первым индексом вверху, и вторым – внизу.

чтобы такой тензор внутренних свойств воздействовал на смежные расчетные ячейки сеточной области, привнося в них энергию своих внутренних трансформаций.

При таком определении тензора  $\overset{<}{m}$  он представляется особым поляризованным механическим объектом, совмещенным с текущим тензором формы крупной частицы жидкости, и задающим своеобразный замкнутый поток внутри крупной частицы жидкости. Свойства внутреннего течения зависят от предыстории движения независимой частицы жидкости в несвободном пространстве. Тогда, в рамках теоремы о *живых силах*: изменение энергии внутреннего потока должно проявляться вне частицы в виде *работы внешних сил или сил инерции*. Анализ движения в рамках исчисления флюксий подтверждает, что в данном случае внешним силам противопоставляется инерционная реакция, обусловленная необходимостью изменения внутренней кинетической энергии элементарных частиц жидкости.

Такая кинематическая реакция имеет векторный характер, и может быть направлена как на отклонение от линии действия вектора внешних сил, так и на его торможение или даже ускорение, если в окружающей среде будут созданы условия для высвобождения замкнутой энергии движения жидкости внутри элементарной крупной частицы.

При конструировании вычислительного эксперимента, на первых этапах моделирования (*в идеальной жидкости - на каждом шаге интегрирования во времени*) тензор  $\overset{\vee}{\rho}$  может определяться как диагональный, с масштабом главных компонент в соответствии со скалярной плотностью жидкости.

Полагая геометрические свойства тензора плотности аналогичными тензору формы крупной частицы жидкости, можно допустить, что и он тоже представляется в качестве дуального к абсолютной системе координат. По крайней мере, это может быть справедливо в какие-то особо оговариваемые моменты времени, например, когда на повторяющихся этапах вычислительного эксперимента искусственно совмещаются оси тензоров для вычисления скоростей деформации  $\overset{\vee}{\rho}$

в проекциях абсолютной системы отсчета. В этот момент времени к тензору плотности также можно применять операцию обращения:  $\check{\rho} \cdot \hat{\rho} = 1$ .

Обратный тензор  $\hat{\rho}$ , определенный теперь в проекциях абсолютной системы координат получит физическую размерность  $[м^3/кг]$ . Расположим трансформируемый тензор формы частицы в произведении справа от тензора плотности:

$$m = \hat{\rho} \cdot r = m_i^j. \quad [кг^{-1}]$$

По аналогии введем тензор внешних напряжений, действующий на границах элементарной частицы жидкости:  $\hat{f}$   $[Н \cdot м^2]$ , и способный погасить (скомпенсировать) проявление внутренних живых сил инерционного тензора массы  $\check{m}$ .

Векторная сила  $\vec{F}$  будет определяться не иначе как в качестве массовой силы, равномерно распределенной и действующей на весь объем элементарной частицы жидкости, силой - способной скомпенсировать дипольные проявления саморазгона элементарной частицы жидкости и погасить силовые воздействия присоединенных вихревых потоков и реакций Жуковского.

Дифференциал закона движения Ньютона в виде приращения скорости течения:

$${}^+ \vec{V} = {}^0 \vec{V} + m \cdot \vec{F} \cdot t.$$

Запишем теперь уравнение движения для произвольной точки в окрестности крупной частицы жидкости в привычной форме динамики как бы «твердого тела», с учетом деформации и энергии внутренних сил:  $\check{m}$   $[кг^{-1}]$ , находящихся под действием внешних распределенных:  $\hat{f}$   $[Н \cdot м^2, кг \cdot м^3/с^2]$  и массовых:  $\vec{F}$   $[Н, кг \cdot м/с^2]$  сил:

$${}^+ \vec{A} = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + m \cdot \vec{F} \cdot t^2/2 + (\hat{r} + \hat{v} \cdot t + m \cdot \hat{f} \cdot t^2/2) \cdot \hat{a}.$$

Полученное выражение содержит в себе традиционную систему дифференциальных уравнений Эйлера, а также дополнительный член, описывающий деформацию крупной частицы жидкости под действи-

ем напряжений на ее границах. Сопоставим это уравнение движения с ранее полученным чисто кинематическим выражением:

$${}^+A \overset{\rightarrow}{=} \overset{\rightarrow}{R} + \overset{\rightarrow}{V} \cdot t + (\overset{\wedge}{r} + \overset{\wedge}{v} \cdot t) \cdot \overset{\leftarrow}{a} + (\overset{\wedge}{r} + \overset{\wedge}{v} \cdot t) \cdot \overset{\leftarrow}{\omega} t,$$

что, после их взаимного вычитания, позволит выделить соответствие сил и кинематических параметров уравнения движения в обобщенной форме Эйлера<sup>13</sup>:

$$(\overset{\rightarrow}{F} + \overset{\wedge}{f} \cdot \overset{\leftarrow}{a}) \cdot m \cdot t / 2 = (\overset{\wedge}{r} + \overset{\wedge}{v} \cdot t) \cdot \overset{\leftarrow}{\omega} \quad [m/c]$$

или, после приведения векторов к абсолютному базису:

$$(\overset{\rightarrow}{F} + \overset{\rightarrow}{a} \cdot \overset{\leftarrow}{f}) \cdot m \cdot t / 2 = \overset{\rightarrow}{\omega} + \overset{\rightarrow}{v} \cdot \overset{\rightarrow}{\omega} t. \quad [m/c]$$

Формально это означает, что внешние силы и поверхностные напряжения могут быть скомпенсированы приращением скоростей замкнутых внутри крупной частицы жидкости течений.

При построении вычислительного эксперимента в гидромеханике с использованием методов разделения решений по физическим процессам, можно исключить из второго этапа расчетов элементы уравнения движения, отвечающие за поступательное движение крупной частицы жидкости, тогда на последующих этапах будут рассматриваться только деформационные составляющие течения в ближайшей окрестности элементарной частицы. Вместо контрольного вектора можно взять всю тройку базисных векторов, представив их как бы внутри локальной системы отсчета.

По ранее сделанному определению:

$$\overset{\wedge}{\rho} = m \cdot \overset{\wedge}{r} \quad [m^3/kg]; \quad \overset{\wedge}{f} = \overset{\vee}{f} \cdot \overset{\wedge}{r} \quad [kg/c^2, H/m]$$

Подставляя тензор  $\overset{\wedge}{r}$  вместо вектора  $\overset{\rightarrow}{a}$ , и заменив вектор скорости внутреннего течения  $\overset{\rightarrow}{\omega}$  соответствующим тензором  $\overset{\wedge}{\omega}$ :

---

<sup>13</sup> В тензорных операциях перестановка сомножителей недопустима, однако, принятое ранее ограничение на жонглирование индексами с целью изменения ранга результата произведения, позволяет автоматизировать расстановку сомножителей непосредственно в момент выполнения операции умножения.

$$\hat{\rho} \cdot \overset{\triangleright}{f} \cdot t / 2 = (\overset{\triangleright}{I} + \overset{\triangleright}{v} \cdot t) \cdot \hat{\omega}. \quad [m^3/c]$$

Использованная в выражении условная единица  $\overset{\times}{I}$  задает тензор с единичной диагональной матрицей и физической размерностью как у другого слагаемого.

Полученная зависимость устанавливает линейный закон между внешними напряжениями и приращениями локальных скоростей внутри элементарной частицы жидкости, что соответствует определению теоремы о «живых силах», о работе внешних сил для изменения кинетической энергии внутри частицы жидкости.

Отметим, что для определения кинематических свойств поля течения внутри элементарного вычислительного объекта, в тензорной форме задано изменение скорости  $\overset{\triangleright}{\omega}$ , замеряемой на базисных векторах  $\overset{\triangleright}{r}_i$  в проекциях абсолютной системы координат при условии, что все внешние силы полностью скомпенсированы кинематическими реакциями в окрестности этой элементарной частицы жидкости.

Придавая тензору локальных скоростей физический смысл изменения поля скорости в окрестности крупной частицы жидкости во времени, будет получен тензор обобщенных напряжений:

$$\overset{\triangleright}{f} = \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{v} / t \quad [кг/с^2, Н/м, ]$$

По аналогии, с соблюдением физических размерностей можно доопределить тензор напряжений, вызываемых вязкостью и упругостью сплошной среды в окрестности элементарной крупной частицы:

$$\begin{aligned} \overset{\triangleright}{f}_H &= \overset{\vee}{\eta} \cdot \overset{\wedge}{v}_H / A; & \overset{\vee}{\eta} &: [кг/м/с, Н \cdot с/м^2, ] \\ \overset{\triangleright}{f}_T &= \overset{\vee}{c} \cdot \overset{\wedge}{v}_T \cdot t / A, & \overset{\vee}{c} &: [кг/м/с^2, Н \cdot м^2, ] \end{aligned}$$

где:  $\eta$  – динамическая вязкость (коэффициент внутреннего трения);  
 $c$  – модуль сдвига;  $A$  - отстояние (рычаг) для момента сил.

Для сохранения традиционных физических размерностей в определении тензоров напряжений добавлен делитель на характерный линейный размер:  $A$ , переводящий коэффициенты к величине силы, а в законе Гука скорость приведена к смещению за интервал времени  $t$ .

## Построение вычислительной модели в тензорной форме

Традиционная физическая интерпретация, так же как и численное решение задач гидромеханики, опирается на два взаимосвязанных и существенно различающихся по форме геометрических представления о течении жидкости: это известные дифференциальные формализации течений по Эйлеру – на фиксированной сетке с изменяющимися в ее узлах значениями гидродинамических полей, и движение свободных крупных частиц жидкости по Лагранжу – с фиксацией законов сохранения внутри каждой из движущихся частиц жидкости, которые образуют подвижную и деформируемую сетку из смежных центров условных частиц жидкости.

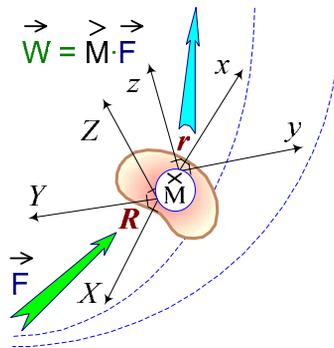


Рис. 3.2. Элементарный объект вычислительной гидромеханики – крупная частица жидкости, будучи всегда окруженной неразрывной сплошной средой с подобными же реологическими свойствами, в динамике свободного движения реагирует на суммарное внешнее воздействие с учетом предыстории ее несвободных движений и внутренних деформаций.

Наиболее эффективные вычислительные эксперименты в гидромеханике основаны на методах разделения решений по физическим процессам, в которых этап моделирования с использованием лагранжевых свободных частиц жидкости сменяется процессом согласования физических полей на неподвижных эйлеровых узлах расчетной

сетки. Формально это два этапа интегрирования первого порядка, которые совместно воссоздают решение традиционного дифференциального уравнения механики второго порядка.

Лагранжевы свободные частицы в пределах собственных геометрических размеров должны вести себя подобно энергоемким объектам, которые во взаимодействии с окружающей средой частично растрачивают энергию собственного движения, частично аккумулируют ее внутри себя (рис. 3.2).

Обобщенный *векторный Закон Ньютона* может быть формально сконструирован с помощью тензорной операции произведения с особым тензором массы, способным восполнять недостающие внутренние или внешние силы, недоопределенные на этапах гидродинамического моделирования по схемам разделения по физическим процессам Лагранже-Эйлера подхода:

$$\vec{F} = \vec{W} \cdot \overset{<}{M}. \quad [H]$$

В такой модели тензорная масса жидкой частицы  $\overset{<}{M}$  будет не только аккумулировать энергию поступательного движения, но также учтет инерционные свойства деформационного и вращательного движений в пределах элементарной крупной частицы жидкости.

### Построение базовых операций вычислительной гидромеханики

Основные законы гидромеханики в тензорном виде позволяют определить не только кинематику элементарных частиц жидкости, но и их внутреннюю деформацию в строгом соответствии с напряжениями от внешних силовых воздействий. Пусть в качестве исходных данных для построения вычислительного эксперимента в гидромеханике будут определены следующие размерные поля в абсолютной (глобальной) системе координат:  $\{ \vec{R} \} [m]$  – поле координат узловых точек;  $\{ \vec{V} \} [m/c]$  – поле скорости;  $\{ \overset{<}{M} \} [kg]$  – тензорное поле внутренних свойств для каждой из частиц жидкости.

В определенной таким образом сеточной области вводятся локальные вычислительные объекты, определяющие элементарные час-



1. Векторный закон Ньютона для деформируемой частицы:

$$\vec{F} = \vec{W} \cdot M = \vec{W} \cdot \rho \cdot \vec{r}; \quad [H] \quad (1)$$

2. Тензор вязких напряжений для Ньютоновой жидкости<sup>14</sup>:

$$\vec{f}_H = \nu_H \cdot \eta / \Lambda = \nu_H \cdot \eta / \Lambda; \quad [H/M] \quad (2)$$

3. Тензор упругих напряжений для твердого тела Гука:

$$\vec{f}_G = (\vec{r} + \nu_G \cdot \vec{t}) \cdot \vec{c} / \Lambda = (\vec{I} + \nu_G \cdot \vec{t}) \cdot \vec{c} / \Lambda, \quad [H/M] \quad (3)$$

где тензор локальных скоростей построен алгоритмически как:  $\vec{v} = \vec{V}_i - \vec{V}_o$  (рис. 3.3); а главные реологические константы формально сконструированы в виде тензоров, для которых справедливы выражения типа:  $M = M^i_k = \rho \cdot \vec{r} = \rho^{ij} \cdot r_{jk}$  – тензор инерции в проекции на абсолютную систему отсчета, и определения:  $\vec{r}$  – геометрический тензор формы  $[m^3]$  и  $\rho$  – плотности жидкости  $[кг/м^3]$  и аккумуляции энергии внутри этой частицы;  $\eta, c$  – тензоры динамической вязкости  $[кг/с]$  и жесткости  $[кг]$  реальной жидкости,  $\Lambda$  – условное расстояние<sup>15</sup>, определяющее дистанцию ближнего направленного взаимодействия смежных частиц.

В выражениях (2) и (3) тензор локальных скоростей, определенный в абсолютной системе координат, был «спроектирован» на локальный базис:

<sup>14</sup> Здесь и далее при величинах с графической тензорно-векторной нотацией будут использоваться особо оговариваемые буквенные смысловые метки, которые означают особые физические свойства математических объектов.

<sup>15</sup> При определении реологических параметров жидкости в тензорной форме не удастся в точности сохранить форму представления традиционных выражений, для формального согласования физических размерностей в одномерных законах вязкости и упругости и введена здесь характерная скалярная дистанция  $l$ .

$$\hat{v} \cdot \hat{R} = \hat{v} \cdot \hat{R}^{-1} = \hat{v},$$

в результате чего получен тензор скоростей в смешанной системе координат, который по совокупности физических свойств может быть назван тензором конвективных скоростей. Фактически же, полученный тензор был обезразмерен по пространственному аргументу, и потому его величины могут сопоставляться с реологическими параметрами жидкости.

### Свойства элементарных вычислительных объектов

Для анализа используем разложение тензора конвективных скоростей на девиаторный  $\hat{v}^*$  и шаровой  $\hat{v}_0$  тензоры: как:  $\hat{v} = \hat{v}_0 + \hat{v}^*$ . Тензор шарового сжатия  $\hat{v}_0$  представляется диагональной матрицей, все элементы которой равны между собой, в тензоре конвективных скоростей он характеризует скалярную дивергенцию (сжатие) потоков жидкости и связан с первым реологическим параметром жидкости:  $\varepsilon$  – коэффициентом динамического сжатия.

Девиаторный тензор  $\hat{v}^*$  имеет нулевой линейный инвариант:  $\text{tr}(\hat{v}^*) = 0$ , что формально свидетельствует о свойствах несжимаемости оставшегося потока жидкости. Тензор вязких напряжений получается выделением кососимметрической части из матрицы девиаторного тензора  $\hat{v}^*$ , что формально соответствует вращению элементарных частиц жидкости, и связанному с ним внутреннему напряжению<sup>16</sup>:

$$\hat{f}_H = \eta \cdot \hat{v}_H = \eta \cdot (\hat{v}^* - \hat{v}^{*T}) / 2. \quad [\text{кг/м}^3/\text{с}^2]$$

<sup>16</sup> Здесь и далее характерный линейный размер опущен, что переводит реологические тензоры из категории поверхностных напряжений в своеобразные аналоги объемно распределенных сил.

Оставшийся симметричный тензор будет определять чистую деформацию элементарной частицы жидкости, которая может быть связана с упругими напряжениями:

$$\overset{\vee}{f}_T = \overset{\vee}{c} \cdot \overset{\vee}{v}_T \cdot \overset{\vee}{t} = \overset{\vee}{c} \cdot (\overset{\vee}{v}^* - \overset{\vee}{v}^{*T}) \cdot \overset{\vee}{t} / 2.$$

Соответственно, полный тензор распределенных по объему частицы внутренних напряжений:

$$\overset{\vee}{f} = (\overset{\vee}{\varepsilon} \cdot \overset{\vee}{v}_0 + \overset{\vee}{c} \cdot \overset{\vee}{v}_T) \cdot \overset{\vee}{t} + \overset{\vee}{\mu} \cdot \overset{\vee}{v}_H. \quad [\text{кг/м}^3/\text{с}^2]$$

Обычно тензорные определения реологических параметров применяются только при анизотропных свойствах сплошных сред, но в случае обсуждаемых здесь вычислительных моделей, традиционно скалярные физические параметры жидкости должны быть представлены в качестве ортогональных тензоров, определяемых с помощью соответствующих диагональных матриц.

С тензором плотности  $\overset{\vee}{\rho}$  связывается предыстория деформации элементарных расчетных объектов, что на Лагранжевом этапе вычислительного эксперимента позволяет считать крупные частицы жидкости участвующими в свободном (*корпускулярном*) движении. Кроме тензора плотности на всех расчетных этапах будут проявляться упругие и вязкостные свойства жидкости в виде связанных тензоров  $\overset{\vee}{\mu}$  и  $\overset{\vee}{c}$ , реальные физические величины которых зависят от текущего состояния тензора формы  $\overset{\wedge}{r}$ . Если же в вычислительном эксперименте используются модели идеализированных жидкостей, или расчеты строятся на неподвижных узлах сетки  $\{\overset{\rightarrow}{\Omega} \mathbf{R}\}$ , то суть вычислений будет сводиться к обеспечению изотропности среды, когда тензоры  $\overset{\vee}{\mu}$  и  $\overset{\vee}{c}$  образуются только равными по величине диагональными компонентами.

## Свойства вычислительных операций

Все операции вычислительной гидромеханики выполняются исключительно в размерной форме, что необходимо для обеспечения автоматического контроля физической корректности моделируемых процессов для каждой отдельно взятой частицы жидкости и, при необходимости, применения гибридных схем в подобластях, где происходит изменение режимов течений, требующее своевременной подмены используемых законов механики и их математических моделей. С вычислительными объектами связываются три группы операций:

1. Операции логические или эмпирические. Это физические законы, такие как: *если есть тензор конвективных скоростей  $\overset{\vee}{V}$ , то он порождает тензор напряжений  $\underset{\vee}{f}$  по закону (2)*, и т.п. Такие операции задают способ формирования и методы анализа состояния тензорных объектов, а также принятие решений об изменении математических моделей по ходу расчетов.

2. Операции сложения, применяемые только к величинам с одинаковыми физическими размерностями и при условии, что они определены и построены в одном и том же базисе. К сложным объектам сложение может также применяться в условиях, когда определены операции автоматического согласования систем отсчета и физических размерностей.

3. Операция «произведение» применима только к объектам, у которых связываемые компоненты лежат в дуальных системах отсчета. Запрещается повышение ранга тензора в операциях произведения. Для построения векторных или тензорных объектов должны определяться специальные алгоритмы, опирающиеся на физическую постановку задачи о проведении вычислительного эксперимента.

Вычислительные объекты наделяются следующими свойствами:

1) скалярные или инвариантные величины, например время  $t$ , участвуют только в операциях произведения, с любыми объектами;

2) векторные величины участвуют в операциях сложения с сопоставимыми векторами и в операциях произведения с тензорами,

если это необходимо для перехода из одной системы отсчета в другую. Применение умножения векторов для построения диад недопустимо;

3) тензорные величины определяют физические свойства элементарных частиц жидкости, их геометрические деформации [Астарита, Маруччи, 1978], кинематические свойства и другие динамические процессы в сплошной среде. Тензоры участвуют как в операциях сложения с сопоставимыми тензорами, так и в операциях произведения со связанными (дуальными) векторными или скалярными объектами. С использованием тензорных объектов формулируются основные законы гидромеханики, а автоматическое конструирование и анализ этих объектов образует собственно и саму логико-математическую задачу о проведении вычислительного эксперимента в гидромеханике.

Движение контрольной точки в пространстве, сместившейся за один такт первого (эйлерового) этапа вычислительного эксперимента, может быть представлено в форме пересчета координат точки из локальной системы отсчета в абсолютную, с учетом интервала времени  $t$  :

$${}^+ \vec{A} = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + \vec{F} \cdot M \cdot t^2 / 2 + (\hat{r} + \hat{v} \cdot t + \hat{f} \cdot M \cdot t^2 / 2) \cdot \hat{a} . \quad (4)$$

Следующим этапом вычислений может быть определение вектора приращения локальной скорости для этой точки (ускорения), по полю которого затем восстанавливается новое поле внешних сил и внутренней энергии для исходных крупных частиц жидкости:

$${}^+ \vec{V} = \vec{V} + (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) \cdot \hat{v} . \quad (5)$$

Таким образом выполняется первый шаг вычислительного эксперимента, за которым следует контроль корректности решения на поле  $\{ r \}$ ; согласование условий сохранения физических параметров внутри элементарных ячеек жидкости  $\{ M \}$ ; а в завершение – выполняется перерасчет новых для каждой крупной частицы жидкости «внешних сил»:

$$\vec{F} = M \cdot \nabla \cdot \vec{V} = r \cdot \rho \cdot \nabla \cdot \vec{V}.$$

Схемой расщепления решения для уравнений второго порядка по физическим процессам будем называть деление процесса вычислений на два этапа, на каждом из которых выполняется дифференцирование первого порядка. Если на одном из этапов выполняется пространственное дифференцирование поля скорости, то затем по нему вычисляется новое поле напряжений, что позволяет на втором этапе выполнить расчет смещений частиц жидкости по скорректированному ускорениями полю скорости и с использованием конвективных перераспределений потоков согласовать условия сохранения, и снова восстанавливается поле скорости, но уже на новый момент времени.

При пространственном дифференцировании происходит операция переноса с узлов расчетной области на центры образуемых ими крупных частиц жидкости, а эти центры уже смещаются в направлении скорости свободного движения частиц. Это означает, что второй этап вычислений осложняется дополнительными алгоритмами интерполяции внутри расчетной области и экстраполяции в разорванных узлах на внешних границах.

Если в задаче участвуют распределенные массовые силы, например, в виде ускорения свободного падения, то они будут постоянно отклонять траекторию движения свободных частиц, которая на втором этапе должна выправляться за счет упругости жидкости. Для отключения такого механизма трансформации частиц жидкости необходимо искать механизмы замены поля внешних сил напряженным состоянием свободной поверхности.

## Построение вычислительного эксперимента

Процесс трансформации полей, в случае исходного требования сохранения координат узловых точек  $\{\vec{R}\}$ , может быть разделен на три этапа:

### 1 этап. КИНЕМАТИКА.

Новое поле узловых точек:

$$\{ \vec{R} = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + \vec{F} \cdot M \cdot t^2 / 2 \}. \quad (6)$$

Поле конвективных скоростей образуется алгоритмическим построением тензора:

$$\{ \hat{v} \} = \{ +\vec{V}_i - o\vec{V}_i \}. \quad (7)$$

Расчетное состояние нового поля внутренних свойств:

$$\begin{aligned} \{ \overset{>}{M} \} &= \{ \hat{r} \cdot \overset{v}{\rho} \} = \{ (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) \cdot \overset{v}{\rho} \}, \\ \{ \overset{v}{\rho} \} &= \{ \overset{v}{\rho} \cdot (1 + \overset{v}{v} \cdot t) \}. \end{aligned} \quad (8)$$

### 2 этап. ДИНАМИКА.

Здесь производится сопоставление реологии жидкости с текущим состоянием вычислительной модели. Пусть определен закон сохранения количества движения на разнесенном по этапам вычислений интервале времени:

$$\begin{aligned} \overset{>}{M} \cdot \vec{V} &= \overset{>}{M} \cdot (\vec{V} + \overset{iy}{V}), && \text{исходя из (8):} \\ \Delta \vec{V} &= (\overset{+}{M} - \overset{>}{M}) \cdot \overset{<}{M} \cdot \vec{V} = \overset{>}{v} \cdot \vec{V} \cdot t, \end{aligned} \quad (9)$$

получается векторное уравнение Ньютона в форме Эйлера, справедливое для крупной частицы жидкости на неподвижных узлах расчетной области:

$$\vec{F} = M \cdot \vec{v} \cdot \vec{V} = \hat{r} \cdot \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \vec{V}. \quad (1')$$

Полученное выражение содержит в себе напряженное состояние жидкости, которое можно объяснить реологическими свойствами вычислительной модели течения:

$$\{ \hat{f} \} = \{ +\vec{F}i - o\vec{F}i \} \text{ или } \hat{f} = \hat{r} \cdot \hat{\rho} \cdot \vec{v} \cdot \vec{v} = M \cdot \vec{v} \cdot \vec{v}.$$

По форме новое уравнение соответствует записи напряжений в уравнениях Навье-Стокса. Реология реальной жидкости оформляется в виде законов (2), (3), связанных с тензором конвективных скоростей  $\vec{v}$ . Тогда суть расчетов может быть сведена к согласованию свойств вычислительной и физической моделей жидкости.

В результате разностного дифференцирования, в выражении (9) была утеряна объемная составляющая ускорения, которая может быть получена при рассмотрении движения частицы с переменной массой без учета деформации:

$$M = \det(\hat{M}), \quad \hat{\rho} = \det(\hat{c}), \quad \Delta \vec{V} = \vec{V} \cdot \left( \frac{M}{+M} - 1 \right) = \vec{V} \cdot \left( \frac{\rho}{+\rho} - 1 \right). \quad (10)$$

Рассматриваемая вычислительная модель всегда наделяет жидкость свойствами сжимаемости, вязкости и упругости. В полученных уравнениях пока не рассматривались деформации тензора формы крупной частицы  $\hat{r}$ , что позволяет считать жидкость изотропной. Выделением диагонального тензора  $\vec{v}_0$ , такого, что след его остатка  $\vec{v}^*$  будет равен нулю:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}^* \quad (tr \vec{v}^* = 0),$$

получим тензор шарового сжатия:



$$\overset{\vee}{f}_0 = \overset{\vee}{\varepsilon} \cdot \overset{\vee}{v}_0 \cdot \overset{\vee}{t}, \quad (11)$$

где компоненты тензора  $\overset{\vee}{f}_0$  определяют давление,  $\overset{\vee}{\varepsilon}$  – коэффициент динамического сжатия.

Выделением кососимметричной части тензора  $\overset{\vee}{v}^*$ , которая задает вращение одной крупной частицы относительно смежных, будет получен тензор вязких напряжений:



$$\overset{\vee}{f}_H = \overset{\vee}{\mu} \cdot \overset{\vee}{v}_H = \overset{\vee}{\mu} \cdot (\overset{\vee}{v}^* - \overset{\vee}{v}^{*T}) / 2. \quad (12)$$

Оставшийся симметричный тензор связывается с упругой деформацией (6):



$$\overset{\vee}{f}_r = \overset{\vee}{c} \cdot \overset{\vee}{v}_r \cdot \overset{\vee}{t} = \overset{\vee}{c} \cdot (\overset{\vee}{v}^* + \overset{\vee}{v}^{*T}) \cdot \overset{\vee}{t} / 2. \quad (13)$$

Полный тензор внутренних напряжений:

$$\overset{\vee}{f} = (\overset{\vee}{\varepsilon} \cdot \overset{\vee}{v}_0 + \overset{\vee}{c} \cdot \overset{\vee}{v}_r) \cdot \overset{\vee}{t} / 2 + \overset{\vee}{\mu} \cdot \overset{\vee}{v}_H. \quad (14)$$

Рассматриваемые динамические коэффициенты  $\overset{\vee}{\mu}, \overset{\vee}{c}, \overset{\vee}{\varepsilon}$  отличаются от кинематических коэффициентом скалярной плотности  $\overset{\vee}{\rho}$ . Под действием тензора напряжений  $\overset{\vee}{f}$ , частица получает приращение скорости внутреннего (замкнутого) движения:

$$\overset{\Delta}{v} = \overset{\vee}{f} \frac{\overset{\vee}{t}}{\overset{\vee}{\rho}}. \quad (15)$$

Если течение установившееся, то, за расчетный интервал времени тензор приращения скоростей  $\overset{\Delta}{v}$  должен компенсировать сам тензор конвективных скоростей:

$$\overset{\wedge}{v} \cdot \overset{\vee}{r} + \overset{\vee}{r} \cdot \overset{\Delta}{v} = 0.$$

На данном этапе вычислений это выражение является точным, поскольку не учитывается смещение крупных частиц за время  $t$ .

### 3 этап. СТАТИКА.

На завершающем этапе необходимо провести восстановление поля скорости по вычисленным на втором этапе приращениям, при этом рассматриваются деформационные движения вокруг статических центров тяжести частиц.

От тензора  $\overset{\Delta}{v}$ , определенного в локальном базисе, необходимо перейти к смешанному тензору, где локальные характеристики опираются на абсолютную систему отсчета:

$$\overset{\Delta}{v} = \overset{\Delta}{v} \cdot \overset{\wedge}{r}. \quad (16)$$

Этот тензор не связан с локальной геометрией базиса  $\overset{\wedge}{r}$ .

Для перехода к исходной сетке построим новый локальный базис, который опирается на неподвижный узел, а в качестве смежных используем смещенные во времени пространственные точки:

$$\overset{+}{r} = \overset{+}{r} \overset{\rightarrow}{R}_i - \overset{o}{r} \overset{\rightarrow}{R}_i. \quad (17)$$

Раскрывая выражение (7), использованное при построении тензора локальных скоростей:  $\overset{\wedge}{v} = \overset{+}{V} \overset{\rightarrow}{i} - \overset{o}{V} \overset{\rightarrow}{i}$ , по скоростям, связанным с новыми базисными векторами  $\overset{+}{r}$ , получим алгоритм вычисления нового поля скорости:

$$\overset{+}{V} = \overset{\rightarrow}{V} + \sum_i \overset{\wedge}{r} \cdot \overset{\Delta}{v}_i, \quad (18)$$

который суммирует приращения скорости от окружающих крупных частиц.

Выражения (15) - (18) раскрывают основные алгоритмические построения, позволяющие применять обратный закон Ньютона:

$$\overset{\rightarrow}{W} = \overset{\rightarrow}{F} \cdot \overset{\leftarrow}{M}.$$

Ускорения, полученные в векторной форме: для частицы с переменной «массой» ( $10$ ) и для распределенных массовых сил, должны быть интерполированы с центров ячеек на исходные узлы расчетной области.

Словесно этапы вычислений определяются следующим образом:

**1** - на неподвижной Эйлеровой сетке производятся расчеты распределенных характеристик течения;

**2** - рассматриваются внутренние свойства частиц жидкости с целью построения тензоров «массы», в которых сохраняется предыстория деформации. Здесь же организуются итерационные процессы установления, в которых происходит согласование реологии вычислительной и физической моделей течения жидкости;

**3** - на завершающем этапе производится интерполяция характеристик течения со смещенных, в Лагранжевом движении центров тяжести крупных частиц на исходные узлы расчетной области. На этом же этапе можно рассмотреть условия на свободных (жидких) границах, где вместо алгоритмов интерполяции в разорванных узлах нерегуляризованной сетки внутри расчетной области будет использоваться экстраполяция с помощью заграничных центров особых (граничных) частиц жидкости.

## Вычислительная среда

Свойства тензора напряжений  $\overset{\triangleright}{f}$  в процессе вычислений могут рассогласоваться с реологией рассматриваемой жидкости. Для получения итерационного алгоритма согласования физических и вычислительных параметров течения, тензор  $\overset{\triangleright}{f}$  можно разделить на истинный тензор и девиатор. Это позволит допустимые напряжения включить в динамику течения, а девиаторные отразить от границ сопряжения смежных частиц, тем самым демпфируя дальнейшее развитие их негативной деформации. Аналогично корректируется тензор конвективных скоростей  $\overset{\triangleright}{v}$ , из которого вычитаются девиационные компоненты. По сути, это обычный механизм свободных и отражающих

границ, применяемых только для релаксационного согласования численных решений.

Если начальные условия при запуске процесса решения не соответствуют законам течения жидкости, то величина тензора девиации может быть настолько большой, что произойдет разрушение аппроксимационных критериев. В этом случае можно воспользоваться поправками к реологическим параметрам жидкости, которые методом итераций должны согласовать (или приблизить) физические и вычислительные характеристики течения. Последнее особенно важно для идеализированных жидкостей, численные алгоритмы для которых всегда будут сводиться либо к неявным схемам, либо к итерационным процессам.

Контроль корректности выполняемого решения всегда сводится к контролю допустимости интерполяционных формул. В качестве примера разрушения решения, можно привести случай, когда одна грань частицы, в результате свободного движения в заданном поле скоростей, обгонит свою же противоположную сторону. Этого можно избежать уменьшением расчетного интервала времени. Выражение, показывающее такой предельно допустимый интервал, обычно называют критерием устойчивости решения во времени. Известный критерий Куранта в точности соответствует вышеуказанному определению.

С контролем пространственной аппроксимации дело обстоит существенно сложнее, так как соответствующие критерии связываются не только с начальными условиями, но и с локальными геометрическими характеристиками расчетной области. На отладочных этапах реализации вычислительных экспериментов можно использовать только метод визуального контроля формы расчетных полей, прорисовываемых на графическом экране ЭВМ после каждого такта вычислений.

В соответствии с выражением (8)  $\overset{>}{M} = (\overset{\wedge}{r} + \overset{\wedge}{v} \cdot t) \cdot \overset{\vee}{\rho}$ , масса частицы фактически является сумматором тензоров локальных скоростей. На первом этапе  $\overset{>}{M}$  используется для определения внутренних

свойств частицы, на третьем - с помощью сопоставления  $\overset{<}{M} = \overset{>}{M}^{-1}$ , но относящихся к смежным ячейкам, согласовываются условия сохранения при взаимодействии смежных частиц жидкости. Как показано выше, вычислительная модель всегда содержит в себе все три основных свойства жидкости: сжимаемость, вязкость, упругость, при этом соотношение интенсивностей указанных напряжений может привести к критическому режиму или изменить режим течения жидкости (имеется в виду образование струй, вихревых слоев и кавитационных разрывов).

$$\overset{v}{f} = \overset{v}{\varepsilon} \cdot \overset{v}{v}_0 \cdot \overset{v}{t} + \overset{v}{\mu} \cdot \overset{v}{v}_H + \overset{v}{c} \cdot \overset{v}{v}_\Gamma \cdot \overset{v}{t} = \overset{v}{f}_0 + \overset{v}{f}_H + \overset{v}{f}_\Gamma. \quad (14')$$

Тензор напряжений (14) можно представить в качестве характеристического полинома для внутреннего состояния расчетной частицы, в котором реологические параметры жидкости встанут на месте главных инвариантов тензора:

$\overset{v}{v}_0$ :  $\mathbf{I} \neq 0$  – сжимаемость;

$\overset{v}{v}_H$ :  $\mathbf{II} \neq 0$  – поворот;

$\overset{v}{v}_\Gamma$ :  $\mathbf{III} \neq 0$  – чистая деформация, другие инварианты этих тензоров равны нулю.

Если внутреннее состояние частицы рассматривается без учета смещения расчетных узлов, то можно поставить требование компенсации тензора локальных скоростей, за счет приращений скорости вызываемых тензором напряжений:

$$\overset{\wedge}{v} \cdot \overset{\wedge}{t} + \overset{\wedge}{f} \cdot \overset{<}{M} \cdot \overset{<}{t}^2 / 2 = 0, \quad (19)$$

из которого, в качестве сумматора напряжений, можно вывести тензорную плотность:

$$\overset{+}{\rho} = \overset{v}{\rho} + (\overset{v}{f}_0 + \overset{v}{f}_H + \overset{v}{f}_\Gamma) \cdot \frac{\overset{v}{t}^2}{2} \cong \overset{v}{\rho}_0 + \overset{v}{\rho}_H + \overset{v}{\rho}_\Gamma. \quad (20)$$

Рассмотрим два варианта разрушения полного тензора  ${}^+\rho$  при выполнении одного такта вычислений, когда  $\rho = \det(\rho)$  обращается в ноль.

1. Кавитационный разрыв плотности:

$\rho_H$  - не рассматривается;

$\rho_0 = \det(\rho_0) < 0$  - соответствует полю с разрежением;

$\rho^* = \det(\rho_0 + \rho_\Gamma) = 0$  - тензор плотности обращается в диаду,

которая может быть определена плоскостью, перпендикулярной к главной оси растяжения тензора упругости  $\rho_\Gamma$ . Если жидкость не выдерживает отрицательного давления, то данная плоскость должна быть использована в качестве свободной границы, проходящей через крупную частицу.

2. Образование свободной струи или турбулентного вихря.

Пусть система отсчета будет связана с движущейся частицей, которая подвержена сдвиговой деформации.

На завершающем этапе вычислений исходная вихревая частица может обратиться в нуль детерминант внутреннего поля сопряженной частицы, где  $\rho_0 > 0$ . В этом случае можно воспользоваться эмпирическим алгоритмом переноса вихря с первого этапа вычислений в тензор «массы» третьего этапа. В этом случае будет снято напряжение со смежной ячейки, а частица в свободном движении будет проявлять особенности, свойственные турбулентному вихрю. Приведенный алгоритм является эмпирической моделью, которую можно использовать за пределами аппроксимационного разрешения расчетной области, для получения точного решения сетка в районе вихря может быть сгущена.

