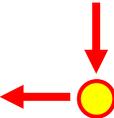


Часть 4

Опыт построения программных алгоритмов

Структура процедур для реализации расчетной части вычислительного эксперимента может быть представлена в форме трюичной функциональной матрицы:



	<i>Данные</i>	<i>Математические алгоритмы</i>	<i>Логика</i>
<i>Данные</i>	Начальные условия	Граничные условия	Режимы течения
<i>Расчет</i>	Исследования динамики смежных частиц	Трансформация тензора формы крупной частицы	Выбор функций и построения расчетного алгоритма
<i>Результаты</i>	Структура представления результатов расчета	Контроль и корректировка решения	Контроль или восстановление расчетной области

Рис. 4.1. Матрица взаимодействия программ при проведении вычислительного эксперимента в гидромеханике.

Каждый столбец матрицы образует перечисление функционально обособленных процедур, которые работают со специфическими для них программными объектами – списочными последовательностями и структурами данных, плюс комплексами функций с описателями их свойств.

Каждая строка матрицы определяет расчетные этапы со своей системой правил передачи данных и организации их взаимодействия.

Это означает, что в проекте программы используется рекурсивный принцип взаимодействия между элементами строки и прямое обращение к элементам столбца функциональной матрицы. Таким образом обеспечивается разделение и независимость функционального и декларативного метода программирования, где осуществляется контекстное управление расчетом на линии столбца и последовательное формирование данных при взаимодействии элементов одной строки.

Процесс вычислений можно представить как цикл по линиям матрицы, где каждая линия исполняется слева направо путем рекурсивного поиска требуемой информации. Словесно же алгоритм анализируется при переборе элементов змейкой, начиная с «начальных условий»:

- На основании начальных и граничных условий выбирается режим движения жидкости;

- Ищутся функции, которые трансформируют крупную частицу, рекурсивно определяя состояние внешней среды;

- Затем формируются результаты расчета, контролируется точность и устойчивость решения, и восстанавливаются параметры расчетной области для продолжения вычислений.

Для полной реализации описанного метода проектирования вычислительного эксперимента необходима, как минимум, следующая программная поддержка:

- 1 - Компилятор алгоритмического языка, включающего динамически определяемые данные и операции. Поддержка процедур должна обеспечивать распознавание типов для параметров, процедуры – функции должны возвращать в качестве результата массивы и структуры данных или другие функции с их описателями (образцами). Такой язык служит оболочкой для функциональной системы программирования. Его назначение – прямое управление процессом проведения вычислительного эксперимента;

- 2 - Функциональная среда программирования, включающая обработку динамических структур данных и списков, и поддерживающая рекурсивные методы формирования и распознавания процедур-функций. Такая среда призвана обеспечивать расширение языка обо-

лочка и предназначена для логического анализа и моделирования физических явлений.

Если взять для примера чисто алгоритмический язык, типа Pascal, то он должен быть расширен включением динамически определяемых размерностей массивов и аппаратом построения новых операций. В языке программирования C++ указанные операции имеются, стандартные математические и логические операции легко переопределяются, и потому C++ вполне может быть использован как для отработки прикладных вычислительных экспериментов, так и с целью моделирования новых языковых конструкций функционального метода программирования.

Транслятор должен передать на этап выполнения контроль параметров и результатов процедур-функций. В простейшем случае включение перечисленных средств может происходить на уровне исходных текстов самого транслятора, что в неявном виде и происходит в рамках объектно-ориентированного языка программирования C++.

Тогда разработка функциональной среды становится делом реализации самого вычислительного эксперимента, где с помощью списков формируются граничные условия и описатели (*образцы*) функций-операций, а сами тензорные и информационные процедуры включаются в язык программирования путем частичной трансляции исходных текстов транслятора.

Из сказанного следует вывод, что вычислительные эксперименты в механике сплошных сред опираются на собственный математический аппарат конечных разностей (*как в пространстве, так и во времени*), в основе которого лежат аппроксимации непрерывных функций ограниченным количеством опорных величин, распределенных в дискретных ячейках памяти цифровой ЭВМ.

Традиционные конечноразностные аппроксимации уравнений движения жидкости, после их алгоритмической формализации, с определенной долей условности могут рассматриваться уже в качестве некой другой гидромеханической модели, качественно отличающейся от исходной записи законов механики в виде системы дифференци-

альных уравнений в частных производных. Оптимизация же численных моделей для повышения скорости расчетов, контроль физических критериев корректности решений и применение адаптивных методов для расширения области применимости инженерных расчетов нередко выполняются непосредственно в понятиях алгоритмических операций для сложных числовых объектов внутри ЭВМ. Особо актуален и наиболее сложен такой анализ численных моделей при согласовании физических свойств жидкости в особых условиях, нередко возникающих как внутри расчетной области, так и на свободных границах.

Практический опыт реализации вычислительных экспериментов, связанный с решением инженерных задач гидромеханики, является тем востребованным практикой обоснованием для формализации действий, необходимых как для ускорения расчетных алгоритмов (включая оптимизацию циклов вычислений), так и для унификации процедур, моделирующих законы гидромеханики на внутренних разрывах и внешних границах расчетной области (обеспечении функциональной невидимости границ).

Естественным математическим инструментом для построения элементарных вычислительных объектов стало классическое тензорное исчисление, точнее – его часть, моделирующая линейные интерполяционные операции с элементарными физическими объектами в размерном виде (не выше тензоров II ранга – для 3-мерного пространства). При этом свертывание численных схем к тензорной форме, приводит к своеобразной канонической записи исходных уравнений, которые наиболее быстрым и эффективным образом реализуются на цифровых ЭВМ. Как показал практический опыт проектирования и реализации вычислительных экспериментов, новые модели в тензорном представлении несут в себе очень глубокий физический смысл, и вполне могут быть применены для решения определенного круга задач механики сплошных сред, и в том числе в аналитической форме.

Логическая структура обобщенного программного комплекса

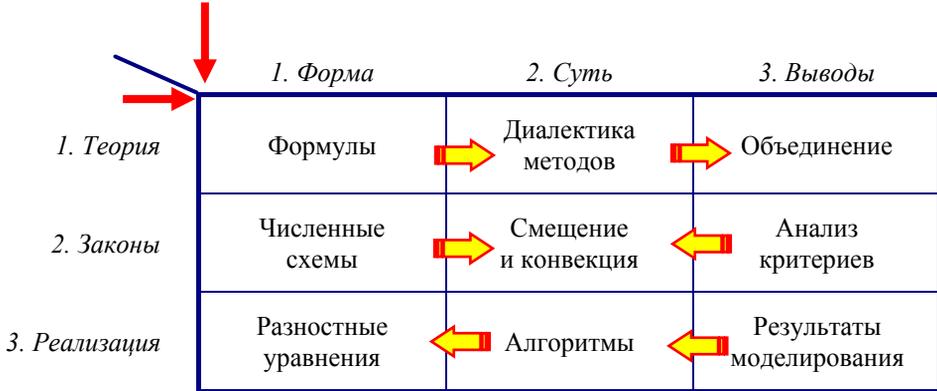


Рис. 4.2. Вариант получения разностно-тензорных уравнений путем интерпретации современных численных методов для решения задач теории длинных волн.

Приведенная на рис. 4.2 схема построения вычислительного эксперимента может быть представлена в виде трех уровней аппаратной и языковой поддержки различных методов программирования, создаваемых по принципу от «множества расчетных алгоритмов» к «унифицированной функциональной среде», ориентированной на внутренний контроль и согласование реологических свойств жидкости, и автоматизированную численную реализацию законов механики сплошной среды.

По диагонали матрицы (рис. 2.3) показаны ключевые объекты, которые рассматриваются при проектировании прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике:

1.1. – *Алгоритмический уровень*. Описание расчетной области в единой системе координат. Построение всех вычислительных объектов и однозначное связывание их физических и кинематических свойств в рамках общей сеточной области;

2.2. – *Функциональный уровень*. Построение строгих математических функций для удовлетворения всех запросов к элементарным вычислительным объектам и их пространственным взаимосвязям с ближайшими частицами сплошной среды;

3.3. – *Уровень моделирования*. Реализация конкретных вычислительных моделей, обеспечивающих моделирование гидродинамиче-

ских процессов при заданных начальных условиях и внешних граничных или объемных возмущениях, необходимых для моделирования реальных физических явлений.

На практике, на каждом из уровней (*слева-направо по строкам матрицы*, рис. 4.2) создаются комплексы специализированных процедур, в основу которых закладывается одинаковая программная среда:

1. Алгоритмический пакет процедур нижнего уровня

1.1. – статические форматы исходных данных и результатов вычислений, а также утилиты низкого уровня для их представления в расчетах;

1.2. – динамические формируемые расчетные объекты и системы процедур для их построения, трансформации и возврата новых данных в исходные статические поля гидродинамических параметров;

1.3. – комплекс утилит для перерасчета всех гидродинамических параметров между используемыми системами координат, в том числе используемые для интерактивного представления вычислительных процессов и текущих результатов на графическом экране ЭВМ.

2. Функциональная среда разработки моделей гидромеханики:

2.1. – представление всех вычислительных объектов и гидродинамических полей в виде комплекса специальных процедур (в терминах C++ - классов), образующих функциональную среду для разработки прямых численных экспериментов;

2.2. – логическая система и ее препроцессорное обеспечение для связывания различных числовых объектов, в том числе учитывающих необходимость преобразования систем координат, физических размерностей и автоматического применения экстраполяционных методов, при нехватке исходных данных;

2.3. – интеграция во все числовые объекты дополнительных функций, позволяющих деформировать их пространственные и физические характеристики в зависимости от скалярного параметра – времени. Главной особенностью этой логической системы для связи

пакетов исполнительных алгоритмов, являются дополнительные процедуры контроля изменения режимов течения, обеспечивающие автоматическое применение гибридных схем в зонах изменения режимов течения.

3. Построение гидродинамических экспериментов:

3.1. – разработка методов связывания вычислительных объектов для реализации конкретного вычислительного эксперимента, в том числе с помощью глобальных списков параметров для реализации вычислительного эксперимента в целом;

3.2. – разработка сценариев выборки исходных данных, преобразования их во внутренние форматы численного моделирования и с целью непрерывной визуализации всех вычислительных процессов и результатов расчета на графическом экране ЭВМ;

3.3. – создание интерактивной среды и графического окружения для постановки, проведения и анализа текущих результатов непосредственно в процессе проведения вычислительных экспериментов.

В полной мере приведенная структура программного комплекса применима, конечно же, только в случае проведения прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике, при которых все численные схемы для решения систем дифференциальных уравнений могут быть выражены в явной форме, когда каждая расчетная операция сопоставлена с моделируемыми физическими процессами и при необходимости скорректирована для получения достоверного гидродинамического решения.

Моделирование длинноволновых процессов в океане в полной мере соответствует указанным упрощающим условиям, и потому представляется наиболее интересной задачей для теоретической и программной отработки методов проектирования и создания прямых вычислительных экспериментов.

При решении этой же задачи удалось рассмотреть новые математические модели гидромеханики, наиболее полно адаптированные к аппаратным особенностям цифровой вычислительной техники.

Примеры реализации численных схем

Тензорная арифметика, использованная для проектирования полных и прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике, в общем случае всегда имеет дело с реальными жидкостями, обладающими полным комплексом реологических свойств, которые задаются линейными/обратными зависимостями в пределах конечноразностного масштаба элементарных расчетных ячеек. Основные иллюстрации выполнялись на примере решения гиперболической задачи о распространении упругих продольных волн (длинных волн в океане), которые допускают явные пространственные решения и потому очень удобны для физической интерпретации основных вычислительных процессов.

1. В современной математике, опирающейся на большие информационные массивы и численные методы прямого моделирования физических процессов, важное место занимает визуализация процессов подготовки исходных данных и наглядного представления результатов вычислительных экспериментов, при котором многомерные зависимости анализируются на двумерном поле графического экрана ЭВМ.

Такой анализ всегда связан с геометрическими построениями сложных трехмерных объектов на плоскости, или – компьютерной графикой.

Представленная в книге тензорная арифметика дает возможность наиболее наглядного представления всего комплекса геометрических алгоритмов для автоматической подготовки больших гидродинамических полей, и для визуализации результатов моделирования, в том числе непосредственно в процессе проведения численных расчетов.

Во многих случаях показанные в работе тензорные преобразования активно используются для быстрого и наглядного построения двух-трехмерных интерполяционных процедур, работающих как преобразование систем координат, и в том числе – неортогональных, заведомо обладающих наивысшей вычислительной эффективностью.

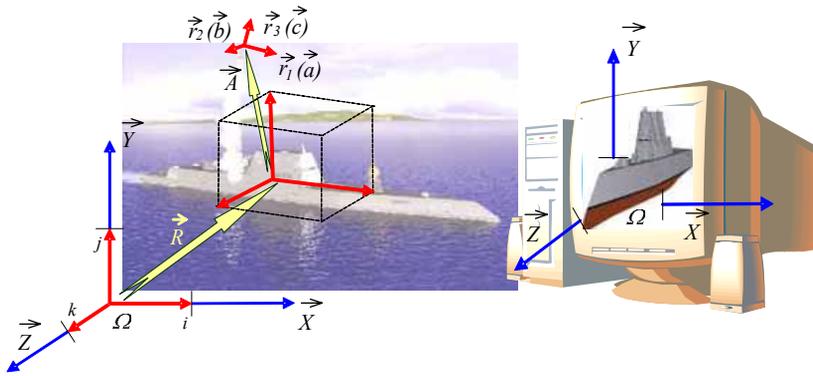


Рис. 4.3. Автоматизация координатных преобразований в компьютерной графике: в управлении подвижными объектами всегда используются многократные преобразования систем координат, связанных как с реальными объектами, так и с их представлением в счетно-решающих устройствах и терминалах ЭВМ.

2. Важным подтверждением корректности тензорных уравнений служит вычислительный эксперимент по моделированию обтекания нескольких тел произвольной формы стационарным потоком идеальной жидкости (*т. е. потоком, внутри которого отсутствуют вихреисточники*).

В этом случае все показанные здесь тензорные зависимости справедливы не только по отношению к смежным расчетным ячейкам, но и все дальние расчетные ячейки имеют активные связи, осуществляемые строго по прямым линиям. Это означает, что моделирование обтекания тел идеальной жидкостью можно свести к простому интегрированию движущегося тела по его объему и смоченной поверхности. Для этого объем твердого тела заменяется эквивалентными диполями, а поверхность - вихреисточниками.

Тензоры-диполи должны обладать энергией для захвата объема жидкости и перемещения его с заданной скоростью, а каждый вихреисточник должен обладать той же интенсивностью, что и тензорный диполь, а его соотношение вихревой и излучающей части должно обеспечивать локальное искажение внешнего потока так, чтобы искажаемый внешний поток в секторе вихреисточника был сориентирован вдоль границы тела. Такая задача решается успешно, в том числе для нескольких движущихся тел одновременно.

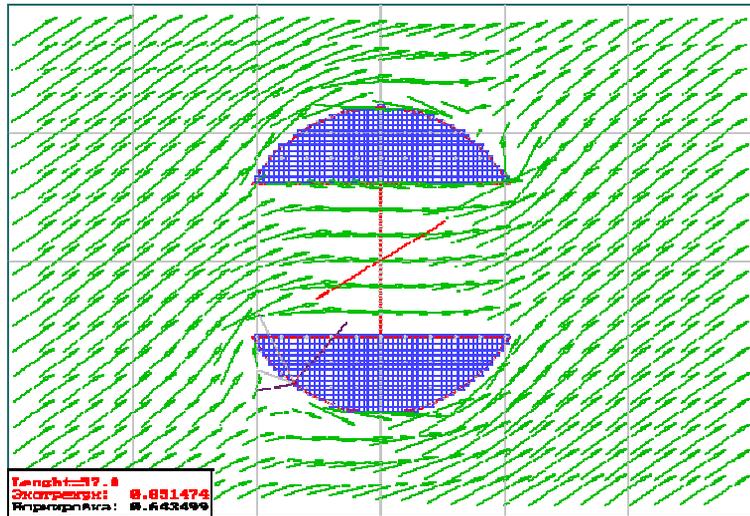


Рис. 4.4. Пример решения задачи об обтекании двух тел косым потоком, где параметры течения вычисляются простым интегрированием по объему и поверхности тел.

Показанный пример - в случае использования произвольных тензорных базисов, может служить своеобразной моделью дальнего взаимодействия между энергонапряженными корпускулами, что может быть с успехом использовано для формализации многих законов электромагнитных взаимодействий

Но все же основным результатом работы является обнаружение связи между численным описанием *крупных частиц жидкости* и ее реологическими параметрами, и, как следствие, возможность постановки вычислительных экспериментов для нестационарных процессов, допускающих сквозной контроль процессов вычислений, с возможностью адаптивного применения физических законов при изменении режимов течения.

3. Даже простая реализация вычислительных экспериментов о распространении длинных волн, построенная на основе тензорной модели, при реальном моделировании длинноволновых процессов в океане (*приливы, штормовые нагоны, цунами*) показывает хорошее соответствие модели натурным наблюдениям.

Тензорная модель обладает ярко выраженными дисперсионными свойствами (*увеличение периода при движении волны над неровным*

дном, или – так называемое «красное смещение»); эта модель показывает хорошее согласование с наблюдениями за временем затухания длинноволновых процессов вблизи побережья (декремент затухания характеризует корректность условий сохранения энергии длинноволновых процессов); в случае успешного согласования аппроксимационных критериев в вычислительной модели получается хорошее соответствие формы и порядка следования длинноволновых импульсов моделируемого и реального цунами вблизи мелководных участков побережья (корректное протекание интерференционных, дисперсионных и рефракционных процессов в акваториях с геометрически сложным рельефом морского дна).

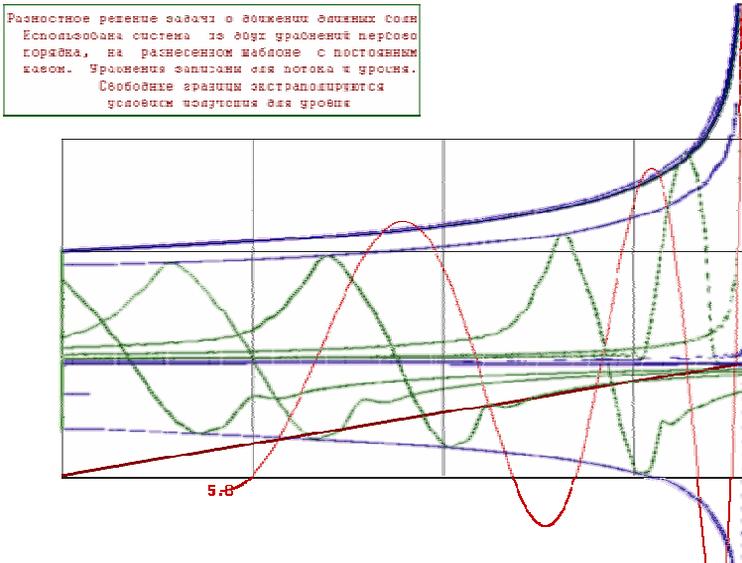


Рис. 4.5. Пример изображения на экране ЭВМ при тестировании алгоритмов по моделированию наката одиночной волны на пологий берег. Изображены различные варианты оценочных и аналитических расчетов, а также несколько снимков численного моделирования волны с теми же начальными параметрами. Линия, начало которой отмечено параметром 5,0 – Бесселева функция, оптимизированная под точку экстремума с помощью коэффициента усиления волны по функции Грина.

При использовании полной длинноволновой модели, в которой задействуется «конвективное» перемешивание частиц жидкости, тензорная модель позволяет создавать вычислительные эксперименты с «сильно нелинейными свойствами». Тензорная модель легко позво-

ляет задействовать гибридные схемы и внедрять в решение различные эмпирические зависимости, типа приливного геопотенциала, придонной вязкости и поверхностных напряжений при прохождении штормов и глубоких циклонов. Так как модель основана на принципах разделения решений по физическим процессам, то все инородные зависимости могут включаться или исключаться непосредственно в процессе проведения вычислительных экспериментов.

Построение длинноволнового эксперимента на векторных формализациях

Вычислительные эксперименты в гидромеханике по моделированию морских наводнений, оперирующие многомиллионными массивами данных с морской батиметрией и быстро меняющимися полями параметров состояния окружающей среды, представляются идеальным физическим процессом, имеющим строгую математическую основу для построения специального языка и его прямого алгоритмического представления, максимально приближенного к особенностям цифровой вычислительной техники, в том числе создающих проектные предпосылки для создания новых поколений компьютеров с глубоко распараллеленными процессами моделируемых физических процессов.

Гиперболическое уравнение в задаче о распространении *длинных волн на море* допускает каноническое представление математической модели и явную одношаговую постановку вычислительной задачи для построения нестационарных во времени вычислительных экспериментов и тестирования различных, и в том числе гибридных численных схем. Стандартная математическая модель в задаче о длинных волнах легко приводится к классической форме записи системы дифференциальных уравнений гидромеханики в частных производных с естественными физическими размерностями.

Формально эта модель, только после многочисленных допущений о малости влияния конвективных эффектов, тоже может быть сведена к одному дифференциальному уравнению второго порядка,

но в численном решении эти модели отнюдь не могут быть названы совершенно идентичными:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + C^2 \frac{\partial \eta}{\partial \vec{r}} = 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} \right) = 0 \end{cases} \left(\frac{\partial}{\partial \vec{r}} \right) \Leftrightarrow \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - C^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial \vec{r}^2} = 0,$$

4

где: $H = \eta + D$ – полный уровень моря, с учетом высоты волны; $\vec{U} = \vec{V} \cdot H$ – скоростной поток жидкости учитывает влияние глубины моря; $C^2 = g \cdot H$ – скорость свободного движения волны здесь выступает в качестве весового коэффициента. В записи уравнений использовано формальное векторное представление пространственной производной для $\delta \vec{r}$, которая соответствует градиенту (grad), а в случае использования простых скобок – как дивергенцию (div), квадратных – ротор (rot). Однако такая формализация математических операций не дает возможности строгой и полной интерпретации физических процессов при построении реальных вычислительных экспериментов в гидромеханике, что обусловлено невозможностью сведения реологических свойств жидкости к одной - бесконечно малой точке.

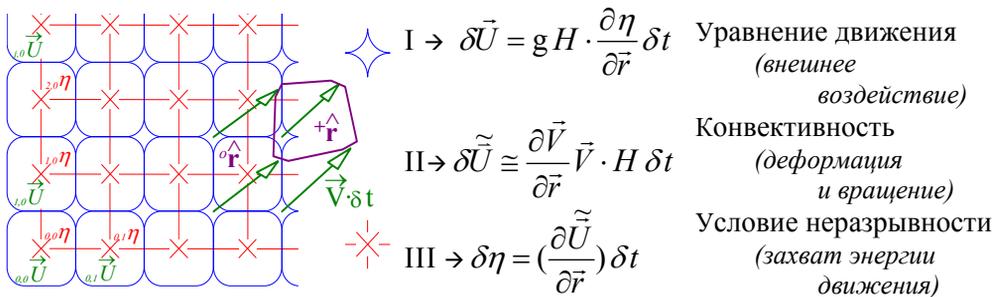


Рис. 4.6. Выделение элементарного вычислительного объекта – крупной частицы жидкости из традиционной сеточной области дискретного разбиения пространственного поля, построенного для моделирования гидродинамических процессов на цифровой дискретной ЭВМ. Важно отметить, что дифференциальные (разностные) операции на сеточном пространстве всегда соотносятся не с узлами сетки, а с центрами масс (объемов), образуемых этими узлами элементарных частиц, внутри которых действуют линейные аппроксимации.

Аналогичную по форме численную модель можно построить прямым рассмотрением сил (рис. 4.6) на границах малого деформируемого контрольного объема (*метод конечного объема*), в котором дифференциалы изначально трактуются в виде конечных разностей.

Полученная схема вычислений не связана непосредственно с волновыми (*гиперболическими*) решениями механики сплошных сред. Упрощающей особенностью длинноволновых решений является возможность пропуска этапа **II**, на котором определяются конвективные свойства течения. Для идеальной жидкости (*эллиптических уравнений матфизики*) формально отсутствует этап **III**, точнее он является контрольным по условию сохранения объема жидкости при исполнении первых двух этапов. А так как на этапах **I** и **II** невозможно в явной форме разделить искомые векторные потоки U , то явное численное решение и задача о сквозном анализе численного решения традиционными методами становятся трудноразрешимыми.

Традиционный вычислительный эксперимент по моделированию длинных волн в океане также ограничивается двумя этапами вычислений: **I** – где рассчитываются скорости течений для условно свободных частиц жидкости; и **III** – где нарушение сплошности среды в явном виде компенсируется накоплением внутренней энергии для этих же частиц. Даже столь упрощенные решения не удается в полной мере проанализировать традиционными методами дифференциального исчисления, в котором все расчеты сводятся к бесконечно малой и недеформируемой точке. Отрадно лишь то, что именно постановка исходной задачи в конечных разностях, определяемая как прямой вычислительный эксперимент, приводит к наилучшему согласованию результатов расчета с моделируемыми природными явлениями, что делает актуальным изучение математических моделей именно в такой изначальной постановке.

Включение в вычислительную модель этапа **II**, который, по сути, является интерполяционным оператором для учета малых, но конечных смещений моделируемых частиц жидкости, и переводит процесс моделирования к решению полной задачи механики сплошных сред, с учетом реологических свойств жидкости, как вязкость, упру-

гость и сжимаемость. Однако на этом пути стоят сложнейшие теоретические проблемы, рассмотрение которых возможно только с помощью тензорных формализаций исходных конечноразностных моделей гидромеханики.

Особенности реализации вычислительного эксперимента на примере задачи о накате волны на пологий берег

4

Рассмотрим примеры получения известных аналитических соотношений длинноволновой гидродинамики и критериев существования решения, изначально ориентированных на построение демонстрационного алгоритма, с использованием которого можно на практике проанализировать различные методы программирования.

1.1. *Формулы.* В предыдущих разделах рассматривались общие вопросы проектирования и постановки вычислительного эксперимента. Определены гидродинамические объекты и операции, которые однозначно описываются с помощью современных средств программирования для цифровых ЭВМ. Было введено скалярное определение плотности жидкости в виде коэффициента пропорциональности между внешней массовой силой и ускорением контрольных точек среды.

Последнее позволяет провести аналогичный геометрический анализ численных методов для решения систем дифференциальных уравнений в частных производных, пусть это будут уравнения длинных волн.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + g \frac{d\eta}{dr} = 0 ; \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \left(\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{r}} \right) = 0, \quad (2)$$

где: $H = \eta \cdot D$ - полный уровень моря; $\vec{U} = \vec{V} \cdot H$ - поток жидкости.

Математическая модель, составленная из уравнений (1) и (2) определена в одной, в данном случае абсолютной или эйлеровой системе координат, соответственно метод решения называют эйлеровым.

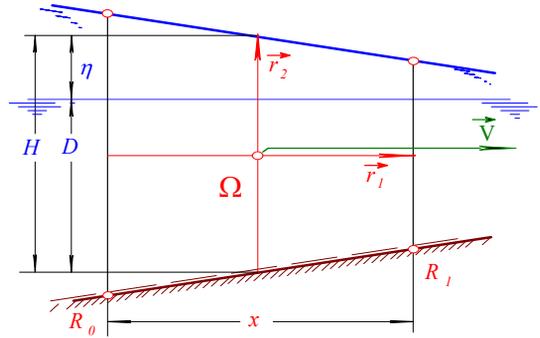


Рис. 4.7. Локальная геометрия длинноволнового движения жидкости.

В лагранжевом подходе уравнение (1) применяется к дискретным точкам, «вмороженным» в жидкость. Уравнение неразрывности в этом случае должно быть заменено соотношением, определяющим взаимные правила движения таких лагранжевых частиц жидкости. Например, для условия сохранения объема:

$$\hat{\det}(r) = const, \quad (3)$$

где: $\hat{r} = \vec{r}_i$ - симплекс базисных векторов, соединяющих смежные точки.

Уравнение движения для линейной теории длинных волн записывается в форме аналогичного векторного дифференциального уравнения, но только в частных производных, и отличается от записи полного уравнения движения (1) отсутствием конвективных составляющих движения даже в малых объемах моделируемого течения жидкости:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

формально это означает, что в процессе вычислений частица жидкости считается неподвижной.

1.2. *Диалектика методов.* Опираясь на известные численные методы [Белоцерковский, 1982], можно выделить три основных подхода к построению вычислительной модели:

- 1) решение в эйлеровых координатах;
- 2) решение в лагранжевых переменных;
- 3) смешанный лагранже-эйлеров подход или «метод крупных частиц».

Динамическое уравнение для всех трех подходов определяется одинаково, в обобщенном случае это закон движения в форме Ньютона. Различие же методов связано с различием в представлении деформационных свойств жидкости.

Первый подход – решение в эйлеровых координатах, характеризуется наибольшим математическим формализмом. Здесь математическая модель имеет строгую формулировку и представляется в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных. При решении практических задач исходная математическая модель существенно усложняется, особенно при постановке сложных граничных условий, характерных для моделирования гидродинамических процессов в реальных морских акваториях.

Второй подход – решение в лагранжевых переменных, принципиально отличается от первого тем, что уравнение движения применяется к некоторым свободным точкам, которые интерпретируются как «вмороженные в жидкость». Здесь, после явного применения динамического уравнения, на втором этапе расчетов производится согласование условий сохранения массы, энергии и количества движения. Основным достоинством лагранжевой расчетной схемы является принципиальная возможность моделирования сложных течений с произвольными границами, фактически превращая расчеты в классический вычислительный эксперимент с согласованием всех расчетных уравнений чисто инженерными методами. Главный недостаток – это требование огромных вычислительных ресурсов, а также отсутствие уверенности как в корректности моделирования гидродинамических процессов, так и в устойчивости численных схем.

Третий подход можно представить как обобщение двух первых. Если проводить такое обобщение с целью построения решения на минимальных машинных ресурсах, то основная идея метода сводится к следующему:

- жидкость рассматривается как совокупность крупных лагранжевых частиц, которые участвуют в свободном движении;
- эти частицы имеют конечные размеры и определяются в виде тензора формы совместно с деформациями;
- внешние силы интерпретируются как массовые и распределенные по всему объему такой крупной частицы.

В такой гидромеханической модели уравнение движения может быть обобщено таким образом, чтобы реакция на действие внешних сил определяла не только изменение вектора количества движения всей частицы, но и оказывала влияние на ее деформацию. Это будет означать, что каждая из крупных частиц имеет гидродинамические особенности в виде вихресточника и диполя, интенсивность которых будем называть некоторой внутренней энергией, оказывающей влияние на действие внешних сил. При этом под внешними силами можно понимать не полную результирующую силу, а, например, только градиент давления, или какую-либо другую объемную величину, которая доступна на конкретном этапе вычислительного эксперимента, в том числе получаемых с целью адаптации расчетной модели к оперативным наблюдениям за текущим состоянием морских акваторий.

1.3. *Объединение.* Этапы проведения вычислительного эксперимента могут быть описаны следующим образом:

1) Расчет нового местоположения и скорости для каждой крупной частицы, при этом тензор деформации будет влиять на величину изменения количества движения. Такое влияние будет учитывать предысторию рассогласований внешних сил с реакциями.

2) Пересчет тензора формы и деформации крупной частицы путем удовлетворения локальных законов движения жидкости. Факти-

чески здесь рассматривается взаимное влияние смежных частиц жидкости.

3) Удовлетворяются условия сохранения массы, энергии и количества движения для всей расчетной области. При этом расчетные величины могут быть интерполированы со смещенных лагранжевых узлов на исходную эйлерову сетку.

2.1. *Численные схемы.* Пусть алгоритмическая модель будет построена так, что на первом этапе рассчитывается новое поле скорости:

$${}^{k+1}\vec{V} = {}^k\vec{V} + \vec{F} \frac{\delta t}{\rho} = {}^kV_i - g \frac{{}^k\partial\eta}{\partial x^i}, \quad (5)$$

тогда поле уровней моря η будет выступать в качестве свободного скалярного параметра, с помощью которого согласуются условия неразрывности на втором этапе расчетов:

$${}^{k+1}\eta = {}^k\eta + \frac{\partial(V_i H)}{\partial X_i} \cdot \delta t. \quad (6)$$

Применяя лагранжев подход, учтем перемещение узлов, ограничивающих крупную частицу жидкости Ω :

$${}^{k+1}\vec{R} = {}^kR + {}^k\vec{V} \cdot t + \vec{F} \frac{t^2}{2\rho} = {}^kR_i + {}^kV_i \cdot t - \frac{g}{2} \frac{{}^k\partial\eta}{\partial x^i} \cdot t^2. \quad (7)$$

Здесь поле скорости (5) определяется на подвижных узлах расчетной сетки $\{ R \}$ и таким образом снимаются допущения линейной теории.

Условие сохранения объема (3) может быть записано в явном виде

$${}^{k+1}H = \frac{{}^k x \cdot {}^k H}{{}^{k+1}x}. \quad (8)$$

Вычислительная модель, составленная из уравнений (5), (7), (10), соответствует совместному использованию эйлерова и лагран-

жевого подходов, где поле внешних сил рассчитывается в глобальной системе отсчета, а поле скорости определяется на подвижных узлах сетки.

2.2. *Смещение и конвекция.* Если провести линейную интерполяцию скорости на исходную сеточную область, то будет получено дополнительное слагаемое для уравнения движения (4), которое будет определять конвективную составляющую течения:

$${}^{k+1}V = {}^kV - g \cdot \frac{d\eta}{dx} t + \frac{V(R_1) - V(R_0)}{x} t. \quad (9)$$

Выражение (9) определяет поле скорости в глобальной системе отсчета и в общем случае соответствует нелинейной теории длинных волн. Практическое же использование последнего выражения ограничено из-за повышенного порядка пространственной аппроксимации. Физические свойства жидкости по сути своей локальны и тоже не могут быть ни описаны, ни интерпретированы в единой системе отсчета.

Для получения результирующего выражения, рассмотрим совместное движение двух точек жидкости. Используя формулу (7) получим расстояние между точками R_1 и R_0 на новый момент времени:

$${}^{k+1}r = {}^{k+1}R_1 - {}^{k+1}R_0 = r + v_1 t + f_1 \frac{t^2}{2\rho}. \quad (10)$$

Если ${}^{k+1}r_i$ считать пробным вектором из тройки векторов определяющих тензор формы локального базиса, то для любой точки \vec{a} в этом базисе:

$${}^{k+1}r = {}^{k+1}R_1 - {}^{k+1}R_0 = r + v_1 t + f_1 \frac{t^2}{2\rho}. \quad (11)$$

2.3. *Анализ критериев.* Рассмотренный метод построения вычислительного эксперимента показан в обобщенном виде, поэтому пока не представляется возможным произвести оценки точности расчетов.

Такие оценки существенно связаны с формой крупных частиц жидкости, зависят от структуры программной реализации и методов доступа к информации в расчетной области.

Контроль же критериев существования решения, его динамическая интерпретация и модификация численной модели заложены в основу разработки предлагаемого вычислительного эксперимента. Реализация такого контроля выносится на этап построения конкретной алгоритмической модели. Он может проявляться в исследовании тензора формы \hat{r} или в установлении эмпирических зависимостей между частицами жидкости. Более высокий уровень анализа состояния частиц может быть построен с помощью тензора плотности $\hat{\rho}$ (тензора внутренней гидромеханики), что выразится в рассмотрении взаимодействия диполей, вихрей и источников, формализующих этот тензор.

Простейший критерий устойчивости может быть связан с абсолютной скоростью частиц жидкости:

$$|| \vec{r}_i || \geq | \vec{V} | \cdot t. \quad (12)$$

Он означает, что смещение узлов за расчетный интервал времени не может превышать размеров частицы жидкости. Полученный критерий не характеризует общий ход решения, т.е. скорость - варьируемая величина. В задаче о длинных волнах общий критерий может быть получен с помощью ускорения свободного падения, которое не изменяется во всей расчетной области.

Пусть тензором формы \hat{r} будет расчетная ячейка с размерами: H – глубина моря; x – шаг сетки. Тогда распределенная массовая сила

$$\hat{f} = \hat{\rho} \cdot \hat{g}$$

обладает свойствами тензора скорости \hat{v} . Учитывая условие неразрывности, определенное с помощью смешанного тензора конвективных скоростей:

$$tr(\overset{\times}{v}) = tr(\overset{\times}{f}) = 0$$

перенесем ускорение w_z на вертикальную грань частицы:

$$w_x = g \cdot H/x.$$

В качестве критерия устойчивости используем интервал времени, за который вертикальная грань деформирующейся ячейки приобретает критическую скорость (12):

$$V_x \cdot t = g \cdot H \cdot t^2/x < x.$$

В результате получается традиционный критерий Куранта:

$$t \leq \frac{x}{\sqrt{g \cdot H}}, \quad (13)$$

где в знаменателе стоит скорость распространения силового возмущения, в данном случае это фазовая скорость длинных волн

$$C = \sqrt{g \cdot H}.$$

Необходимо отметить, что при получении критерия Куранта (13) было использовано условие неразрывности, выраженное через след тензора конвективных скоростей:

$$\text{tr}(\overset{\times}{v}) = 0$$

вместо условия сохранения объема

$$\overset{\wedge}{\det}(r) = \text{const}. \quad (14)$$

В задачах аэродинамики аналогом глубины моря H является плотность жидкости ρ , которая формализует внутреннюю энергию крупной частицы. В данной работе не исследовался тензор плотности $\check{\rho}$, поэтому отметим только, что скалярность величины H является основным упрощающим отличием уравнений длинных волн от полных уравнений гидродинамики в тензорном представлении.

3.1. *Разностные уравнения.* Проведем построение разностных уравнений для одномерной задачи о распространении длинных волн.

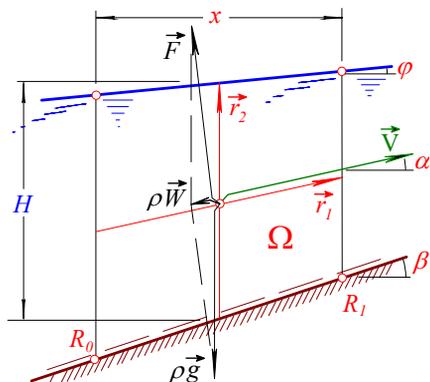


Рис. 4.8. Расчетная ячейка – как жидкая деформируемая частица.

Геометрия крупной частицы жидкости (рис. 4.8) определяется дуальными (взаимно обратными) тензорами:

$$\hat{r} = r_{ij} = \begin{vmatrix} x & 0 \\ x \cdot \tan \alpha & H \end{vmatrix}; \quad (15)$$

$$\check{r} = \hat{r}^{-1} = \begin{vmatrix} 1/x & 0 \\ \tan \alpha / H & 1/H \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Объем частицы \hat{r} :

$$\Omega = \det(\hat{r}) = x \cdot H. \quad (17)$$

Уравнения движения получаются после одновременного применения граничных условий на свободной поверхности и условий непротекания на дне моря, подчеркивая их единую суть, как полноценных уравнений механики:

1. Внешняя массовая сила должна иметь направление по нормали к свободной поверхности;
2. Вертикальная составляющая внешней силы определяется ускорением свободного падения g , следовательно

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} -\rho \cdot g \cdot \tan \phi \\ \rho \cdot g \end{vmatrix}. \quad (18)$$

3. Условие непротекания моделируется компенсацией нормальной составляющей внешней силы в локальной системе отсчета

$$\begin{aligned}
 \overleftarrow{F} &= \overset{\vee}{r} \cdot \overrightarrow{F} = \rho \cdot g \cdot \left| \begin{array}{c} \frac{\tan \varphi}{x} \\ \frac{\tan \varphi}{\Omega} (\tan \alpha + 1) \end{array} \right| ; \\
 \overleftarrow{F} &= \langle \text{отражение} \rangle = \rho \cdot g \cdot \left| \begin{array}{c} \tan \varphi \\ x \\ 0 \end{array} \right| ; \\
 \overrightarrow{F} &= \hat{r} \cdot \overleftarrow{F} = -\rho \cdot g \cdot \left| \begin{array}{c} \tan \varphi \\ \tan \varphi \tan \alpha \end{array} \right|. \tag{19}
 \end{aligned}$$

Здесь угол α определяет заданное направление движения частицы жидкости, φ - угол склона волны:

$$\tan \varphi = -\frac{\partial \eta}{\partial x}. \tag{20}$$

Таким образом получено традиционное уравнение движения теории длинных волн на мелкой воде:

$${}^{k+1}V = {}^kV - g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} \cdot t \tag{21}$$

или

$$\frac{\delta V}{\delta t} + g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0.$$

При получении формулы (21) все тензорные операции были выполнены аналитически, поэтому из программы можно исключить ее функциональное наполнение. Сам же расчетный алгоритм будет соответствовать традиционным методам проведения вычислительного эксперимента.

3.2. *Алгоритмы.* В соответствии со структурой матрицы взаимодействия программ при проведении вычислительного эксперимента (рис.4.2), алгоритм решения задачи будет состоять из трех этапов,

каждый из которых, в зависимости от уровня вычислительных процедур, будет определяться соответствующей строкой этой функциональной матрицы:

1 этап:

По заданным координатам узлов расчетной сетки { R } и полю уровней моря { H }, рассчитываются внешние силы для центров объема крупных частиц жидкости (ячеек расчетной области)

$$F = -\rho \cdot g \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (22)$$

Здесь можно проконтролировать величину угла склона волны, и если искусственно ограничить этот угол 60-ю градусами, что соответствует разрушению стоячей волны, то в решение будет внесено рассеяние энергии, соответствующее образованию бора.

Важно, что в расчетной схеме не предусматривается сохранение поля внешних сил, то результатами первого этапа будут:

- Новое поле скоростей:

$${}^{k+1}\vec{V} = {}^k\vec{V} + \vec{F} \cdot \frac{t}{\rho}; \quad (23)$$

- Новые координаты расчетных узлов:

$${}^{k+1}\vec{R} = {}^k\vec{R} + {}^k\vec{V} \cdot t + \vec{F} \cdot \frac{t^2}{2\rho}, \quad (24)$$

где \vec{V} и \vec{F} относятся к координатам узлов \vec{R} .

2 этап:

На первом этапе рассматривались свободные горизонтальные перемещения частиц жидкости. Это допустимо, если уровень моря считать независимым скалярным параметром, который характерен для решения задач о сжимаемой жидкости. Тогда условие сохранения объема можно выполнить путем расчета нового поля уровней моря (8):

$${}^{k+1}H = \frac{{}^k x^k H}{{}^{k+1}x}.$$

На этом этапе расчетов необходимо контролировать критерии существования решения: ${}^{k+1}x > 0$ и устойчивости (12), (13). В случае нарушения критериев можно прибегнуть к полуаналитическим аппроксимациям решения внутри крупных частиц жидкости или использовать соответствующие эмпирические соотношения.

3 этап:

Очевидно, что предлагаемое деление на расчетные этапы плохо сопоставляется с реальными процессами течения жидкости. Суть такого деления скорее соответствует цели сопоставления нового подхода с известными расчетными схемами. Например, второй этап не нужен: если в уравнение движения (24) были бы включены тензорные составляющие \hat{r} , \hat{v} и \hat{f} . Третий этап завершает моделирование решения на неподвижной эйлеровой сетке, здесь новое поле скоростей и уровней моря интерполируется на исходные расчетные узлы:

$$\begin{aligned} V &= V(R); \\ H &= H(R). \end{aligned}$$

Здесь же производится корректировка решения на границах расчетной области:

- Излучение волны из расчетной области:

$${}_{ep}V = \pm \eta \sqrt{gH};$$

- Генерация входящей волны:

$${}_{ep}H = f(R \pm T \sqrt{gH}).$$

3.3. *Результаты моделирования.* Описанный алгоритм решения был реализован на объектно-ориентированном языке программирования, типа C++. Ключевым элементом реализации программной среды явилось достижение принципиальной возможности для быстрой перестройки всех расчетных схем, необходимых для постановки модели-

рования прикладных задач, основанных на известных численных решениях для систем конечно-разностных уравнений, допускающих явные численные схемы для реализации нестационарных волновых задач (*с преимущественно гиперболическими свойствами*). Несмотря на принципиальное понимание физической сути и особенностей моделируемых процессов в новых вычислительных экспериментах, обобщение математических моделей для решения прикладных задач о воздействии штормовых волн на морские инженерные сооружения приостановлены на стадии разработки трехмерной графической среды, условия для создания которой возникли только в настоящее время, когда компьютеры с мощными графическими возможностями стали доступны для проведения исследовательских работ.

По приведенному выше алгоритму можно отметить, что последний интерполяционный этап обладает худшей устойчивостью и на нем трудно применять сколь-нибудь обоснованные корректировки в процессе решения. Если третий этап исключить, и строить решение на подвижных узлах, то возникает возможность упрощенного моделирования выхода волны на пологий берег, где существенно увеличиваются скорости частиц жидкости и растет угол склона волны. Интерполяция, которая выполняется на втором этапе для пересчета внешних сил с центров объема частиц на узлы неподвижной сетки, вносит в решение диссипативные эффекты и может привести к нарушению устойчивости и разрушению самого решения. Для снятия этих ограничений можно отказаться от второго этапа в том виде, как он описан в этой работе. В этом случае декларативные принципы программирования на языке C++ приводят к загромождению программы, неоправданному повторению многих расчетных операций и полной потере связи между оформлением текста программы и описываемого физического явления. Разрешение последнего противоречия возможно путем совместного и независимого использования функционального и алгоритмического методов программирования [Уинстон, 1980] на основе принципов разделения доступа ко всем объектам числовой информации и контекстно-зависимым исполнительным процедурам.

Кинематическая модель расчета волновых фронтов и лучей

Кинематические модели, так же как и графическая интерпретация данных естественных наблюдений и результатов предвычисленных вычислительных экспериментов, позволяет в кратчайшие сроки провести экспресс-анализ обстановки на море, сразу же после поступления данных о проявлении опасных морских явлений. Такой экспресс-анализ может быть выполнен многократно, по мере изменения или поступления новых исходных данных.

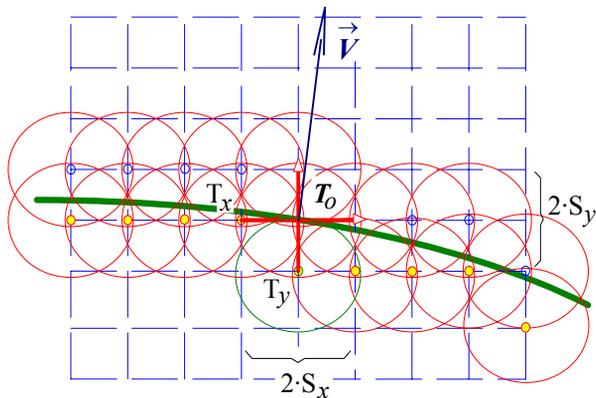


Рис. 4.9. Каждый такт вычислений, в рамках процесса движения фронта волны по принципу Гюйгенса, нацелен на поиск точек, наиболее близких к текущему времени на фронте волны T_0 . В найденной точке время уточняется с помощью расчета направления движения фронта волны, и принимается за новое текущее расчетное время, при необходимости добавляются новые предфронтовые точки или уточняется время в уже имеющихся, затем поиск повторяется для выбора новой узловой точки на сеточной области, охваченной текущим фронтом волны.

Кинематическая модель распространения волновых фронтов и лучей основывается на сортировке точек с минимальными отсчетами времен добегаания длинных волн, полученных на основе принципа Гюйгенса для точечных излучателей. В настоящее время реализована модель, использующая 4-точечный шаблон, на котором вычисляются производные по направлению (рис. 4.9).

Поле времен получается достаточно гладким, чтобы по нему восстанавливались не только линии изохрон, но и линии лучей, которые показывают маршруты движения длинных прогрессивных волн. Указанную вычислительную модель можно отнести к гидродинами-

ческому моделированию нулевого порядка, по которому возможно построение поля коэффициентов усиления на фронтах первого вступления длинных волн, когда коэффициент усиления вычисляется из условия сходимости лучевых линий и не зависит от периода волнения.

Основная часть алгоритма основывается на поиске фронтальной точки (среди точек включенных в специальный список, рис. 4.9), у которой текущее время (пробега) является минимальным. Найденная точка используется в качестве излучателя, вовлекая в список фронтальных точек ближайшие смежные точки, сама же излучающая точка при этом исключается из фронтального списка. На фронтальном шаблоне типа “крест”, кроме вычисления минимальных времен, производится уточнение времени в центре шаблона с помощью оценки направления излучения по всем четырем лучам шаблона.

Точный учет сферичности Земли на карте в Меркаторской проекции, обладающей конформностью в преобразовании локальных масштабов, может быть осуществлен с помощью соответствующей корректировки исходного поля скоростей распространения длинных волн:

$${}_{ij}^t C = {}_{ij} C / \cos {}_{ij} \varphi,$$

искусственно увеличивающей эту скорость, пропорционально изменению масштаба карты.

Такое высокоскоростное прямое численное моделирование позволяет динамически экспериментировать при анализе гидродинамики длинноволновых процессов в открытом море и вблизи побережья, в наглядном графическом виде показывать самые тонкие особенности численных схем и моделируемых природных явлений, создавая тем самым условия для решения экспертных задач при анализе гидромеханики морских инженерных сооружений.