

**Тензорная арифметика / геометрия / математика законов гидромеханики  
в построении прямых вычислительных экспериментов**  
**Трехмерная тензорная математика вычислительных экспериментов  
аэрогидромеханики (вектор-тензор-пространство)**  
**Прикладная вычислительная математика**  
(алгоритмы механики сплошных сред)

Ленинград – Владивосток – Южно-Сахалинск – ירושלים – Санкт-Петербург  
1983–2020

УДК: 514.743, 519.6, 532.5, 629.5

**Рабочие материалы — 2026.06.09**

Храмушин В. Н.

**Прикладная вычислительная математика** (тензорные алгоритмы физики)  
/ Учебное пособие. В. Н. Храмушин. – Санкт-Петербург: СПбГУ, 2016–2020. – 119.??? с.  
ISBN 5-\_\_\_\_-\_\_\_\_-X

Курс прикладной вычислительной математики ... ..

Проектные и поверочные этапы, в разработке сложных вычислительных алгоритмов для создания прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике, при моделировании нестационарных процессов и физических полей механики сплошных сред, должны опираться на строгие правила конструирования числовых объектов, и направленного синтеза методов их использования в строгом соответствии с прикладной задачей гидромеханики. Возможность использования троичной логики для разрешения противоречий функционального и декларативного программирования одновременно приводит к новым схемам тензорной математики, которые позволяют оптимизировать эффективность и обосновывать адекватность результатов моделирования, в том числе с использованием интерактивных графических методов для визуализации промежуточных результатов и управляемого воздействия на ход вычислительного эксперимента под управлением инженеров аэрогидромехаников – исследователей. Книга ориентирована на студентов и инженеров, ведущих поисковые исследования и реализующих прикладные вычислительные эксперименты в различных областях науки и техники, и прежде всего в корабельной гидромеханике и нестационарной механике сплошных сред.

**Ключевые слова:** тензорная математика, вычислительный эксперимент, гидромеханика, проектное решение, сеточный узел, ячейка, виртуальная корпускула

**Applied Calculus Mathematics** (in tensor algorithms of physics).

Vasily N. Khramushin. – Saint-Petersburg: Saint-Petersburg State University. – \_\_\_ p.  
E-mail: Khram@Mail.ru.

Design and verifying steps in the software development of complex computational algorithms to create a direct computational experiments in fluid mechanics simulation of unsteady processes and physical fields of continuum mechanics, must be based on strict rules of constructing numerical objects, and directed synthesis methods for their use in strict accordance with the applied problems in fluid mechanics. The ability to use ternary logic to resolve differences of functional and declarative programming at the same time leads to new schemes tensor mathematics to help optimize the efficiency and correctness of the simulation, including the use of interactive graphics techniques to visualize the intermediate results and managed to influence the course of computational experiment running by aerohydronechanic researchers.

**Keywords:** fluidmechanics, computational experiment, software engineering, virtual corpuscle, large particles, tensor mathematics, optimal design, artificial intelligence, verifying

Ответственный редактор: \_\_\_\_\_

Рецензенты: \_\_\_\_\_

ISBN 5-\_\_\_\_-\_\_\_\_-X

© В. Н. Храмушин, ЛКИ @1983

© СПбГУ ПМПУ КММС, 2015

© РосНТО судостроителей им. А. Н. Крылова, 2020

## Содержание

Сводка обозначений числовых объектов и операций гидромеханики.....	3
<b>2. Тензорная арифметика/геометрия/математика законов гидромеханики в реализации прямых вычислительных экспериментов.....</b>	<b>5</b>
Краткий свод исходных определений и обозначений.....	5
Координатные системы, числовые объекты и алгоритмические операции вычислительного эксперимента в гидромеханике.....	7
Геометрическое обобщение вычислительных объектов и операций в едином глобальном пространстве и локальных базисах сопряженных корпускул.....	11
Пространственное представление кинематики сплошной среды.....	14
Континуальный и корпускулярный этапы прямого численного моделирования в гидромеханике.....	18
<b>3. Тензорная математика в алгоритмической записи основных законов гидромеханики.....</b>	<b>20</b>
Реологическое состояние, живые силы и проявления инерции при внешних воздействиях.....	22
Вычислительные модели законов движения и внутренней механики числовой ячейки-корпускулы.....	23
Построение вычислительной модели для явных численных схем гидромеханики.....	27
Механика континуально-корпускулярных взаимодействий.....	30
Алгоритмы численного моделирования в континуально-корпускулярных построениях тензорной математики.....	32
Вычислительная среда.....	36
Из классификации уравнений теории поля.....	39
Заключение.....	41
<b>4. Диполи, вихресточники (поляризованные корпускулы).....</b>	<b>43</b>
Двумерное поле и трехмерное пространство внутри и вокруг диполя.....	43
Асимптотические аппроксимации дальнего и ближнего взаимовлияния.....	45
Аналитическая теория (двух/трехмерные модели).....	48
Поляризованные корпускулы под действием взаимного притяжения.....	50
Моделирование в кинематике, динамике и механике движения.....	50
Динамика корпускулы под действием массовых сил и поверхностных напряжений.....	52
<b>5. Координатные системы, числовые объекты и алгоритмы вычислительного эксперимента в гидромеханике.....</b>	<b>56</b>
Вычислительная среда пространственных сеточных ячеек – виртуальных корпускул.....	57
Построение сеточных областей и корпускулярных расчетных схем.....	58
О построении тензорных числовых объектов и моделирующих алгоритмов.....	59
Сеточные пространства и свободно взаимодействующие частицы.....	61
Пример: Возмущение свободной поверхности под гравитационным притяжением.....	63
<b>1. Исходные тезисы и суждения о построении вычислительного эксперимента (ἐκλεκτικὸς προδισλωγία).....</b>	<b>64</b>
Историческое обобщение основных понятий и математических моделей гидромеханики.....	65
Мир компьютерных моделей механики сплошных сред.....	66
Исходные положения и концепция построения трехмерной тензорной математики.....	67
Проектирование и проверка алгоритмов вычислительного эксперимента в гидромеханике.....	69
Графическая визуализация и контроль моделируемых явлений и процессов.....	72
Формирование этапов прямого вычислительного эксперимента на основе явных численных схем.....	73
<b>Общее заключение.....</b>	<b>75</b>
Литература.....	77
Приложение А. Основные утверждения исчисления флюксий.....	79
Приложение Б. О постановке и разрешимости математических задач механики сплошных сред (antiquitas).....	85
Приложение В. Представление вычислительных объектов (υπόθεση).....	88

## Сводка обозначений числовых объектов и операций гидромеханики

$T$ – абсолютный отсчет времени; $t = \Delta T$ – расчетный интервал времени	с
$p$ – точечное (скалярное) давление,	Н/м <sup>2</sup> ; кг/(с <sup>2</sup> ·м)
$\overset{T}{\Omega}R$ – координатный узел $\Omega$ в сеточной области на момент времени $T$ ,	м
$\overset{+}{R}$ – координаты смежных узлов в следующий момент времени,	м
$\overset{\rightarrow}{V}$ – полная скорость частицы жидкости в абсолютной системе отсчета,	м/с
$\overset{\rightarrow}{v}$ – вектор скорости относительно центра частицы жидкости,	м/с
$\overset{\rightarrow}{w}$ – вектор приращения скорости (ускорения) для частицы жидкости,	м/с <sup>2</sup>
$\overset{\wedge}{r} = r_i = r_{ij}$ – геометрический тензор формы крупной частицы жидкости,	м <sup>3</sup>
$\overset{\wedge}{v} = \overset{\Delta}{r}$ – синтезированный тензор локальных скоростей (приращений скорости) для базисных осей тензора формы,	м <sup>3</sup> /с
$\overset{\wedge}{v} \cdot \overset{\rightarrow}{t} = \overset{\Delta}{r}_i \cdot \overset{\rightarrow}{t} = \overset{+}{r}_i - \overset{o}{r}_i$ – тензор приращений локальных координат), как деформация базисных осей геометрического тензора,	м <sup>3</sup> /с
$\overset{<}{v} = \overset{\wedge}{v} \cdot \overset{\wedge}{r} = \overset{\wedge}{v} / \overset{\wedge}{r}$ – тензор конвективных скоростей,	
$\overset{\wedge}{\omega} = \overset{\Delta}{V}_i$ – тензор течений внутри крупной частицы жидкости,	
$\overset{\vee}{\rho} = \overset{\leftarrow}{\rho}^j = \overset{\rho}{\rho}^{kj}$ – тензор массовой плотности или внутреннего состояния и энергии жидкой частицы,	кг/м <sup>3</sup>
$\overset{>}{m} = m_j^i = \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{r}$ – тензорная масса жидкой частицы, смешанный тензор внутреннего состояния в абсолютной системе отсчета,	кг
$\overset{\rightarrow}{F}$ – результирующий вектор массовых (объемных) сил,	Н, кг·м/с <sup>2</sup>
$\overset{\rightarrow}{f} = \overset{\rightarrow}{w} \cdot \overset{>}{m} = \overset{\rightarrow}{w} \cdot \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{r}$ – закон движения частицы сплошной среды,	Н, кг·м/с <sup>2</sup>
$\overset{\wedge}{f}$ – тензор напряжений на границах жидкой частицы,	Н·м <sup>2</sup> , кг·м <sup>3</sup> /с <sup>2</sup>
$\overset{<}{f} = \overset{\wedge}{f} \cdot \overset{\wedge}{r}$ – напряжение внутри и в окрестности частицы,	Н/м, кг/с <sup>2</sup>
$\overset{<}{f}_H = \overset{\vee}{v}_H \cdot \overset{\wedge}{\eta} / \overset{\wedge}{\Lambda}$ – условный тензор вязких напряжений по Ньютону,	Н/м
$\overset{\vee}{\eta}$ – тензор динамической вязкости,	Н·с/м <sup>3</sup> , кг/с·м <sup>2</sup>
$\overset{>}{\tau} = \overset{\vee}{\eta} \cdot \overset{\wedge}{\rho}$ – тензор коэффициентов кинематической вязкости,	м/с
$\overset{<}{f}_G = \overset{\vee}{v}_G \cdot \overset{\wedge}{\kappa} \cdot \overset{\wedge}{t} / \overset{\wedge}{\Lambda}$ – тензор упругих напряжений по линейному закону Гука:	
$\overset{\vee}{\kappa}$ – размерный тензор упругости (жесткости),	Н/м <sup>3</sup> , кг/с <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>
$\overset{>}{\mu} = \overset{\vee}{\kappa} \cdot \overset{\wedge}{\rho}$ – тензорный модуль объемной и сдвиговой упругости,	м
$\overset{\mu}{\mu}$ – безразмерный модуль Пуассона для взаимно нормальных деформаций	

Живые силы, субстанциональные (+конвективные) ~ Лагранжевы производные ...

Times:  $\Delta \nabla \nabla \left\langle \leftarrow \rightarrow \right\rangle \wedge \vee \times \wedge \vee \wedge \vee \wedge \vee$

Symbol:  $\leftarrow \downarrow \vee \times \wedge \langle X \rangle \uparrow \rightarrow \leftarrow \rightleftharpoons \pm \otimes \infty \equiv \neq \approx \leq \geq \leftarrow \downarrow \leftarrow \uparrow \Rightarrow \infty f \sim = \Delta \nabla \wedge \nabla \vee \langle \rangle \leftarrow \rightarrow \wedge \vee$

Прямой вычислительный эксперимент в корабельной гидромеханике на настоящее время прекрасно согласуется и обосновывается морской практикой в штормовых и сложных условиях эффективного маневрирования (*~где есть Торричелли + Бернулли*). ...

Декартовы (ортонормированные) базисы в подвижной локальной системе отсчета внутри крупных частиц жидкости имеют строго однозначное — взаимное векторно-тензорное отображение в Евклидовых пространствах смежных малых и деформированных объемах сплошной среды, совместно позволяющих единообразно трактовать законы гидромеханики в качестве пропорциональных или линейных трансформаций в абсолютном пространстве-времени Исаака Ньютона, в том числе с возможностью интерпретации основных уравнений в канонической форме, с разделением по условно независимым физическим процессам.

... ..

Во глобальном инерциальном пространстве или абсолютной системе координат

по Эйлеру: 
$$\vec{\dot{V}} + \frac{\hat{v}}{\hat{r}} \cdot \dot{\vec{a}} \simeq \frac{\delta \vec{V}}{\delta t} + \frac{\hat{\delta v}}{\delta r} \frac{\delta \vec{a}}{\delta t} = \vec{F} / \rho \simeq \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \quad [\text{M/c}^2]$$

## 2. Тензорная арифметика/геометрия/математика законов гидромеханики в реализации прямых вычислительных экспериментов

(вектор-тензор-пространство  $\leftrightarrow$  алгоритм-функция-моделирование)

### Краткий свод исходных определений и обозначений

**Тензорная математика** дополняет тензорное исчисление геометрическими объектами и операциями цифровых дискретных компьютеров для представления законов гидромеханики в малом пространстве разностных аппроксимаций локальной геометрии Евклида. Двойственность корпускулярно-континуальной гидромеханики Исаака Ньютона в тензорных построениях сводится к естественному разделению этапов вычислительного эксперимента по физическим процессам, а разностные схемы исчисления флюксий первого порядка приводят к сквозному распараллеливанию алгоритмов над аппроксимирующими пространственными ячейками [21] в дуальных отсчетах относительно единой абсолютной и множества локальных систем координат.

**Тензорная арифметика** оперирует вычислительными объектами в физических размерностях в ближних пределах элементарных частиц сплошной среды и смежных с ними сеточных узлах и ячейках [19], что создает неразрывные физические поля с помощью линейных аппроксимаций разностных уравнений аэрогидромеханики и образует основу среды программирования со сквозной физической интерпретацией всех вычислительных объектов и операций [1], в том числе с целью повсеместного контроля и адаптации гибридных схем, эмпирических и асимптотических согласований в подобластях с вырождающимися критериями численного моделирования.

**Тензорные числовые объекты** формируют единичные декартовы базисы внутри элементарных подвижных и деформируемых частиц жидкости, что необходимо для интерполяционной записи законов гидромеханики [10], как в глобальной системе сеточных координат, так и в линейной взаимосвязи со всеми смежными разностными узлами и центрами масс свободных крупных частиц жидкости<sup>1</sup>.

Тогда на первом этапе вычислений тензорные числовые объекты будут формироваться на ребрах сеточных ячеек, по узлам которых создаются линейные интерполяционные поля физических величин – параметров течения и состояния сплошной среды, а все физические величины будут предопределяться в традиционных физических размерностях: м, кг, Н, м/с и др.

Как следствие, второй этап вычислительного эксперимента будет строиться на подвижных центрах масс виртуальных корпускул или на условных точках концентрации

---

<sup>1</sup> Описание реологических свойств жидкости, состояние подвижных полей потоков сплошной среды и суммарные концентрации внешних и внутренних напряжений естественным образом фиксируются в узлах неподвижного сеточного пространства. Тогда собственно механика движения будет определяться свободными движениями и деформациями раскрепощенных сеточных ячеек – вездесущих виртуальных, и столь же континуальных корпускул в плотной упаковке реальной жидкости

энергии, где привязанные к пространству физические величины интерпретируются скорее в качестве обратных:  $\text{м}^{-2}$ ,  $\text{кг}^{-1}$ ,  $\text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$  и т. п., при согласовании физической сути приведения движения в пространстве, и сопутствующих процессов гидромеханики во времени, достаточных для формализации полей скоростей, локальных деформаций и – других «флюксий» в производной по времени.

**Тензорные операции** в евклидовом пространстве локальных базисов не ограничены по малости внешних воздействий и перемещений с сопутствующими вращениями и деформациями [2]. Для достижения формальной независимости существования моделируемых дискретных числовых объектов, в алгоритмической среде прямых вычислительных экспериментов вводится искусственное ограничение многообразия векторно-тензорных операций [20], что, безусловно, следует из необходимости строгого и однозначного построения математического описания законов механики сплошных сред [3], и требуется для унификации пространственно-временных операций и геометрических преобразований в единой контекстной среде алгоритмических процедур, связываемых функциональными зависимостями прямых и обратных операций моделирования и контроля общего состояния неразрывных физических сред [5] и процессов аэрогидромеханики.

Покажем здесь предварительную сводку наиболее важных элементов по системе обозначений векторно-тензорных геометрических величин для континуально-корпускулярного моделирования в гидромеханике реальных жидкостей с использованием прописных букв при записи традиционных физических обозначений в масштабах глобальной системы координат (*флюенты и их флюксии*), и, строчных букв – для отметки величин в связанных локальных базисах, по сути являющихся расчетными частицами жидкости или, в привычной одномерной нотации: разностными дифференциалами (*конечными разностями, приращениями функции или, по И. Ньютону – моментами*):

$\vec{A} = A_i[\text{м}]$  – определенный вектор в отсчетах и в проекциях единой абсолютной системы координат;

$\overleftarrow{a} = a^j[\text{м}^{-2}]$  – малый свободный вектор в проекциях и в сопоставимом масштабе собственного локального базиса виртуальной частицы жидкости;

$\overswarrow{r} [\text{м}^3]$  – тензор формы крупной частицы жидкости:  $r_{jk}$  – виртуальный числовой объект;

$\overset{< \wedge \vee}{v} = v \cdot r [\text{с}^{-1}]$  – тензор конвективных скоростей:  $v_i^j$  – инвариантно определяет замкнутые течения внутри крупной частицы сплошной среды, и образуется проецированием

(*нормировкой*) внешнего анизотропного поля скоростей:  $\overswarrow{v} [\text{м}^3/\text{с}]$  – на собственный локальный базис:  $\overset{\vee \wedge}{r} = r^{-1} [\text{м}^{-3}]$  – слитый с деформирующимся потоком жидкости;

$\overset{\vee}{\rho} [\text{кг}/\text{м}^3]$  – анизотропная динамическая плотность жидкости:  $\rho^{ij}$  – как тензор реологического состояния и инерции предыстории свободного движения корпускулы, её живые силы – интенсивность внутренней кинетической энергию;

$\overset{> \vee \wedge}{m} = \rho \cdot r [\text{кг}]$  – масса виртуальной частицы:  $m^i_k = \rho^{ij} \cdot r_{jk}$  – в произведении локальной (*собственной*) плотности жидкости с тензором формы крупной частицы сплошной среды в абсолютной системе отсчета, чем формируется математическая модель механики

поляризованной частицы сплошной среды корпускулярного этапа вычислительного эксперимента;

$\vec{F}$  [Н] – распределенной по объему крупной частицы жидкости вектор массовой силы, измеренный в масштабе и в проекциях единой абсолютной системы координат; или в разностных масштабах собственных базисов ячеек-частиц:  $\vec{f}$  [Н];

$\overset{\wedge}{f}$  [Н·м<sup>2</sup>] – анизотропный тензор поверхностных напряжений на гранях сеточной ячейки, возникающих в под давлением и сдвиговым воздействием окружающей сплошной среды при нестационарном континуально-корпускулярном проявлении внутренней энергии (*живых сил*) инерционного тензора массы:  $\overset{>}{m}$  [кг];

$\overset{\dagger}{\Omega}R$  [М] – снизу слева индексы точки в сеточном пространстве  $\{\Omega\}$ , с индексом слева вверху для следующего (+) расчетного этапа вычислений во времени. Фигурные скобки  $\{\dots\}$  здесь и далее используются для явной отметки всей совокупности сеточных узлов  $\{R\}$  и сопряженного множества центров масс виртуальных корпускул  $\{\omega\}$ .

## Координатные системы, числовые объекты и алгоритмические операции вычислительного эксперимента в гидромеханике

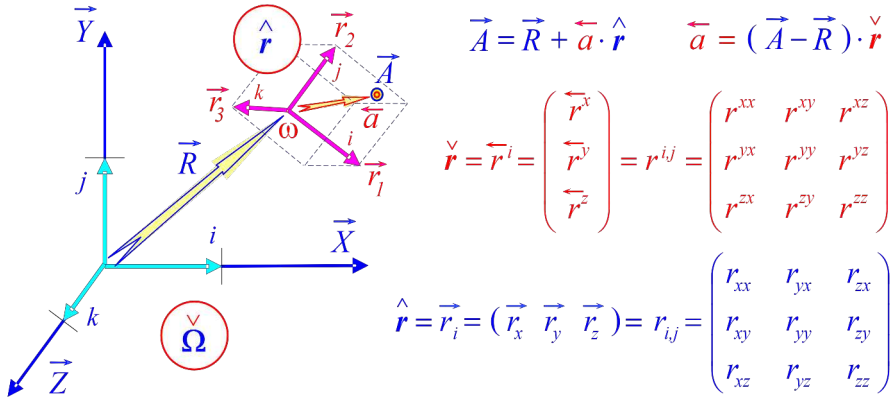
Вне зависимости от исходных математических моделей, для описания физических процессов в механике сплошных сред, формализация численного решения в конечных разностях – ячейках и корпускулах с конкретной массой и внутренней энергией, сводится к унифицированному геометрическому построению пространственной задачи с использованием скалярных, векторных и тензорных числовых объектов со строго определенным выбором арифметических операций, производимых в размерной физической форме с обязательным контролем принадлежности сопрягаемых объектов к собственным интерполяционным базисам в особом линейном – тензорном<sup>2</sup> геометрическом пространстве.

Вычислительные операции с векторными и тензорными величинами строятся с учетом точного соответствия геометрических базисов и физических размерностей в операциях сложения. Компоненты векторных и тензорных объектов в операциях произведения могут сопоставляться только в случае их принадлежности дуальным системам отсчета – в строго сопряженных геометрических базисах, и с должным контролем обоснованности производных физических размерностей<sup>3</sup>. На практике это означает присутствие в операциях произведения «немых индексов» для покомпонентного суммирования – скалярной свертки без возможности повышения ранга результата, и, как следствие, исключение возможности порождения физических неопределённостей или необоснованного *жонглирования индексами* при вольном манипулировании абстрактными числовыми структурами,

<sup>2</sup> Тензорное или евклидово пространство внутри опирается на ортогональную декартову систему координат с ортами в масштабе исходных базисных векторов.

<sup>3</sup> Тензорное произведение служит для смены сопряженных координатных базисов, или для изменения физических свойств пространственных числовых объектов.

что особо чувствительно к ошибкам на стадиях проектирования вычислительного эксперимента и построения его алгоритмических комплексов.



**Рис. 1.** Геометрия глобального сеточного пространства:  $\{\overset{\vee}{\Omega}\}^4$  и множества локальных базисов:  $\{\overset{\wedge}{r}(\omega)\}^5$ ;  $i, j, k$  – единичные орты в связанной системе отсчета.

Элементарные числовые объекты образуются симплексами некопланарных базисных векторов (Рис. 1), используемых в качестве линейных интерполяционных операторов – разностных дифференциалов в трехмерном евклидовом пространстве:  $r_i$  – и служат для построения неразрывных физических полей в окрестности смежных сеточных узлов:  $\overset{\vee}{\Omega} \overset{\rightarrow}{R}$  и центров масс, как особых центров концентрации внутренней энергии:  $\omega$  – для сопряженных с ними крупных деформируемых и подвижных частиц сплошной среды.

Компоненты базисных векторов:  $r_i$  – в абсолютной системе координат образуют столбцы матрицы-тензора:  $r_{ij}$ , или строки векторов (Рис. 1), соответственно. Тензор базисных векторов:  $r[\overset{\wedge}{M}^3]$  – по определению, не может быть вырожденным (*детерминант, как объем – существует всегда*), и обратный – дуальный к нему тензор с тройкой векторов в столбце:  $\overset{\vee}{r} = r^j[\overset{\leftarrow}{M}^3]$  – служит для отображения ортов глобальных координат в проекциях локального базиса (*построчное расположение компонент базисных векторов в матрице-тензоре:  $r^{jk}$* ).

Прямые и обратные пространственные преобразования (*произведения*) векторных и тензорных величин строятся по правилам суммирования немых индексов в одночленном произведении:  $\overset{\leftarrow}{a} = \overset{\rightarrow}{a} \cdot \overset{\vee}{r}$  или  $a^j = a_i \cdot r^{ij}$  – при переходе в локальный базис, и обратно:  $\overset{\rightarrow}{a} = \overset{\leftarrow}{a} \cdot \overset{\wedge}{r}$  или  $a_k = a^j \cdot r_{jk}$  – при возврате к абсолютным координатам (*тензор локального базиса – справа от вектора*).

<sup>4</sup> Фигурные скобки {...} отмечают наличие множества сеточных узлов и корпускул.

<sup>5</sup> Тензорные объекты без индексов здесь и далее выделяются жирным шрифтом.

Доопределяя систему геометрических обозначений и операций для формирования унифицированной среды пространственного моделирования в механике сплошных сред:

– Прописными буквами отмечаются большие числовые величины, измеряемые в масштабной шкале глобального пространства:  $\{ \Omega \}$ , и единого абсолютного времени:  $T$ ;

– Строчными – существенно малые величины:  $f$ ; или конечные разности  $\overset{\wedge}{r}$  [м<sup>3</sup>], соизмеримые с физическими размерениями или параметрами состояния относительно локальных базисов элементарных частиц сплошной среды:  $\{ \omega \}$ , и в интервале текущего расчетного шага во времени:  $t$ .

Вычислительный эксперимент в гидромеханике оперирует неразрывными физическими полями с тензорными числовыми объектами<sup>6</sup>, интерполирующими параметры состояния сплошной среды в окрестности сеточных ячеек:  $\{ \overset{\wedge}{r} \}$  [м<sup>3</sup>] – и расчетного интервала времени:  $t$  [с]. Разность физических величин для смежных ячеек в глобальном масштабе будет означать **разностное дифференцирование** – получение конечноразностных числовых объектов, как например:  $\{ \overset{\wedge}{r} = \overset{\circ}{R} - \overset{\circ}{R} \}$  [м<sup>3</sup>] – алгоритмическое построение локального тензора формы по векторным разностям смежных пространственных узлов.

Абсолютное время:  $T$  – может содержать, к примеру, Юлианскую дату и время от начала суток<sup>7</sup> для визуализации результатов вычислительного эксперимента, как:  ${}^k T = \overset{\circ}{T} + k \cdot t$ , так же как и абсолютные отсчеты в пространстве:  $\overset{\rightarrow}{A} = \overset{\rightarrow}{R} + \overset{\leftarrow}{a} \cdot \overset{\wedge}{r}$  [м] – могут включать географические и другие обобщенные координаты<sup>8</sup> с гигантскими числовыми величинами, не всегда обязательными к утяжелению всего множества операций прямого численного моделирования.

Доопределение или перерасчет физических величин в глобальном масштабе с помощью суммирования со смежными конечными разностями по физической сути уже представляется в качестве **традиционного интегрирования**, в котором тензорная математика вполне корректно расширяет применимость скалярных аналитических операций до уровня трехмерных разностных аппроксимаций в пространстве и времени, как пример:  $\{ \overset{\rightarrow}{A} = \overset{\rightarrow}{R} + \overset{\leftarrow}{a} \cdot \overset{\wedge}{r} \}$  [м] и  ${}^k T = \overset{\circ}{T} + k \cdot t$ , соответственно.

При построении вычислительных объектов и операций, например в виде классов языка C++, важно предусматривать специальные и автоматические переходы к локальным (дифференциальным) масштабам в разностях длинных отсчетов (операциях вычитания); и должного внешнего хранения масштабной шкалы, что важно при необходимости восстановления абсолютных координатных отсчетов для привязки свободных векторов – величин малых или локальных разностей, и т. п.

<sup>6</sup> Тензорные объекты формируются в конечных разностях для описания свойств моделируемой среды в линейных локальных базисах, где орты глобальных координат отображаются в сопоставимом масштабе.

<sup>7</sup> Истинное время задается числовой структурой **Event** с Юлианской датой: **D** (от 4713 г. до н. э.), и локальным отсчетом в часах от начала суток: **T**.

<sup>8</sup> В программной среде точки в глобальных координатах: **Point** – различаются от свободных векторов в локальных базисах: **Vector**, что унифицирует вычислительные операции с тензорными числовыми объектами: **Tensor** и **Basis**.

– Левый верхний индекс отмечает текущее время, которое может обозначаться прописной буквой:  $\{\Omega\}$  – в абсолютном измерении, но чаще локальной отсылкой к шагу во времени:  $t$ , как:  $\{R\}$ , или значками:  $^+\omega$  и  $^-\omega$  – для указания текущих расчетных шагов вперед или обратно во времени, в пределах которых справедливы моделируемые законы гидромеханики для конкретных расчетных этапов вычислительного эксперимента;

– Левый нижний индекс отмечает местоположение в сеточном пространстве:  ${}_{[X,Y,Z]}^{\wedge}R$ . В практических вычислениях актуальна упрощенная отметка косвенных ссылок на смежные сеточные узлы текущего этапа вычислений:  ${}_{(+)}^{\wedge}r$ , и в произведениях физических компонент с отсчетами от центров масс частиц жидкости:  ${}_{(-)}^{\vee}r$  – из сопряженных этапов вычислительного эксперимента в целом.

Все операции с левыми индексами представляются весьма сложными алгоритмами для быстрого поиска смежных опорных точек при взаимной интерполяции физических величин между сеточными узлами и центрами масс подвижных частиц жидкости. Явные по скалярному времени численные схемы могут содержать 2–3 уровня числовых массивов данных для последовательных этапов вычислений, между которыми, при необходимости, устанавливаются итерационные процессы для установления заданных реологических и динамических параметров сплошной среды (*либо, при плохой сходимости, вводятся в расчеты релаксационные или неявные схемы с консервативными свойствами*).

*Правые индексы* связывают векторные и тензорные компоненты в абсолютном и локальных базисах, служащих строгому определению пространственной динамики и деформации числовых ячеек – виртуальных частиц сплошной среды.

– Нижние правые индексы показывают компоненты в проекциях единой абсолютной системы координат (Рис. 1): тензорный «домик» для отметки локального разностного базиса:  $r = r_i = r_{ik}$  [M<sup>3</sup>], собираемого по столбцам из базисных векторов в матрице геометрических преобразований – локального тензора формы; и – как стрелочка вправо для векторов в проекциях абсолютной системы координат:  $a_i = a = a \cdot r$  [M].

$$r = r_i = r_{ik} = \begin{pmatrix} \rightarrow & \rightarrow & \rightarrow \\ r_x & r_y & r_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{xx} & r_{yx} & r_{zx} \\ r_{xy} & r_{yy} & r_{zy} \\ r_{xz} & r_{yz} & r_{zz} \end{pmatrix} \quad [M^3].$$

– Верхние правые индексы – проекции внутри пространственного тривектора – координатного параллелепипеда подвижной и деформируемой сеточной ячейки, где её грани служат ортами декартового базиса (Рис. 1), а отображение проекций ортов глобальных координат ложится векторами-строками в матрице обратных координатных преобразований:  $r = r^j = r^{jk} = r^{-1}$  [M<sup>-3</sup>] из локального тензора формы:  $r \cdot r = 1 \approx 1$ , отмечаемых тензорной «галочкой», или векторной стрелочкой влево – для обозначения связанного с локальной системой отсчета свободного вектора:  $a^i = a = a \cdot r$  [M<sup>-2</sup>].

По геометрической сути локальный тензор:  $\overset{\wedge}{r}$  [М] – не может потерять объем, вырождение и плохая обусловленность его матрицы недопустимы, что служит достаточным условием существования обратного тензора:

$$\overset{\vee}{r} = \overset{\leftarrow}{r}{}^j = \begin{pmatrix} \overset{\leftarrow}{r}{}^x \\ \overset{\leftarrow}{r}{}^y \\ \overset{\leftarrow}{r}{}^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{xx} & r^{xy} & r^{xz} \\ r^{yx} & r^{yy} & r^{yz} \\ r^{zx} & r^{zy} & r^{zz} \end{pmatrix} [\text{М}^{-3}],$$

В сбалансированных численных схемах исключается необходимость вовлечения абсолютных отсчетов в пространстве  $\{\overset{\rightarrow}{\Omega}R\}$  и времени  $T$ , так как на всех этапах вычислений задействуются лишь разностные величины и локальные отсчеты относительно узлов и центров масс сопряженных сеточных ячеек – виртуальных корпускул:  $\{\overset{\wedge}{r} = \overset{\rightarrow}{+}R_i - \overset{\rightarrow}{-}R_i\} [\text{М}^3]$ .

В соизмеримых масштабах с пространственными разностями должны определяться физические и реологические параметры сплошной среды в смежных центрах масс крупных частиц жидкости, что позволяет формализовать условные схемы вычислений в виде простых выражений, типа:  $\{\overset{+}{m} = \overset{\circ}{m} + f(\overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{v}) \cdot t\} [\text{кг}]$ , где:  $\overset{+}{m}$  – инерционная масса<sup>9</sup> частицы жидкости;  $f(\overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{v}) [\text{кг/с}]$  – закон механики как функция произведения внутреннего состояния – плотности частицы жидкости:  $\overset{\vee}{\rho} [\text{кг/М}^3]$ , под воздействием тензора локальных скоростей:  $\overset{\wedge}{v} [\text{М}^3/\text{с}]$ .

На сопряженных этапах вычислительного эксперимента возникают обновленные пространственные поля скоростей и деформаций, допускающие контроль динамического состояния с возможностью переопределения реологических характеристик жидкости в форме скалярных, векторных и тензорных неразрывных физических полей для следующего расчетного интервала во времени. В традиционных интегральных вычислительных моделях аналогичные гидродинамические особенности ассоциируются с пространственными распределениями поляризованных дипольных ядер, а также с производными от них вихреисточниками на поверхностях разрыва сплошности и в зонах нарушения устойчивости потоков реальной<sup>10</sup> вязкой, упругой и сжимаемой жидкости.

## Геометрическое обобщение вычислительных объектов и операций в едином глобальном пространстве и локальных базисах сопряженных корпускул

Тензорная математика включает в себя линейные пространственные преобразования в Евклидовом пространстве, при которых внутри каждой крупной деформируемой частицы жидкости виртуально удерживаются локальные Декартовы (ортогональные и ор-

<sup>9</sup> Невырожденные тензоры формы  $\overset{\wedge}{r}$  и массы  $\overset{+}{m}$  могут содержать предвычисленную обратную матрицу внутри компьютерного числового объекта.

<sup>10</sup> В тензорной математике определяется реологические характеристики для вязкой и упругой жидкости, зависящие от величины и скорости локальной деформации.



точки внутри локального базиса:  $a$  [м<sup>2</sup>], вмороженной в жидкость (Рис. 2), кинематическое уравнение также образует дифференциал (*момент*) скоростей движения и времени в единой абсолютной системе координат:  $\overset{\vee}{V}(\Omega, t)$  – и в подвижных локальных базисах:  $\overset{\wedge}{r}(\omega)$  – внутри крупных частиц жидкости<sup>12</sup>:

$${}^+ \overset{\rightarrow}{A} = \overset{\rightarrow}{R} + \overset{\rightarrow}{V} \cdot t + a \cdot (\overset{\leftarrow}{r} + \overset{\wedge}{v} \cdot t) = {}^o \overset{\rightarrow}{A} + (\overset{\rightarrow}{V} + \overset{\leftarrow}{a} \cdot \overset{\wedge}{v}) \cdot t,$$

где:  $t$  – расчетный интервал времени;  $\overset{\leftarrow}{a}$  – координаты точки в сплошной среде внутри локального базиса – в крупной частице жидкости;  ${}^+ \overset{\rightarrow}{A}$  и  ${}^o \overset{\rightarrow}{A}$  – новое и исходное положение контрольной точки в абсолютной системе координат;  $\overset{\rightarrow}{R}$  – местоположение локального базиса в абсолютной системе координат;  $\overset{\rightarrow}{V}$  – скорость поступательного смещения локального базиса;  $\overset{\wedge}{v}$  – тензор вращения и деформации базисных осей тензора формы  $\overset{\wedge}{r}$ .

Согласно исчислению флюксий, опускается неизменяющаяся часть кинематического уравнения, оставшийся результат делится на малый параметр, время:  $t$  – что переводит местоположение подвижных пространственных точек к скоростям их перемещения:

$${}^+ \overset{\rightarrow}{V} = {}^o \overset{\rightarrow}{V} + \overset{\leftarrow}{a} \cdot \overset{\wedge}{v} + \overset{\leftarrow}{\omega} \cdot \overset{\wedge}{r} + \overset{\leftarrow}{\omega} \cdot \overset{\wedge}{v} \cdot t. \quad [\text{м/с}].$$

Алгебраические операции с матрицами позволяют провести условное исключение единичных тензоров:  $\overset{\wedge}{r} \cdot \overset{\vee}{r} = 1$ , возникающих в результате перекрестного приведения локальных векторов к исходной абсолютной системе отсчета:

$${}^+ \overset{\rightarrow}{V} = {}^o \overset{\rightarrow}{V} + \overset{\rightarrow}{\omega} + \overset{\rightarrow}{a} \cdot \overset{\rightarrow}{v} + \overset{\rightarrow}{\omega} \cdot \overset{\rightarrow}{v} \cdot t \quad [\text{м/с}].$$

Получается разложение вектора движения в абсолютной системе координат на составляющие: скорости полного потока:  $\overset{\rightarrow}{V}$ ; скорость смещения точки внутри частицы жидкости:  $\overset{\rightarrow}{\omega}$ ;  $\rightarrow$  конвективной скорости:  $\overset{\rightarrow}{a} \cdot \overset{\rightarrow}{v}$ ; и некоторого приращения локальной скорости:  $\overset{\rightarrow}{\omega} \cdot \overset{\rightarrow}{v} \cdot t$ , зависящего от скорости течений внутри крупной частицы жидкости.

С допущениями о порядке малости разностных величин, в исчислении флюксий Ньютона последнее слагаемое, содержащее малый множитель  $t$ , может быть опущено, однако не стоит спешить с потерей содержащихся там локальных течений в замкнутом пространстве внутри крупной частицы жидкости.

В традициях аддитивного анализа новое приращение координат разделяет чисто деформационное и внутреннее движение точки в локальных координатах, условно свойственное внутреннему вектору:  $\overset{\leftarrow}{a}$  [м<sup>2</sup>] – как дифференциалу от скорости перемещения

<sup>12</sup> В поэлементной или скалярной записи:

$$\begin{aligned} {}^+ A_x &= {}^o A_x + (V_x + v_{xx} a^x + v_{xy} a^y + v_{xz} a^z) \cdot t; \\ {}^+ A_y &= {}^o A_y + (V_y + v_{yx} a^x + v_{yy} a^y + v_{yz} a^z) \cdot t; \\ {}^+ A_z &= {}^o A_z + (V_z + v_{zx} a^x + v_{zy} a^y + v_{zz} a^z) \cdot t; \end{aligned}$$

среды внутри крупной частицы жидкости:  $\overset{\leftarrow}{\omega} \cdot t$  [м<sup>-2</sup>] – в точке:  $\overset{\leftarrow}{a}$ , отчего кинематическое выражение, по аналогии с исчислением флюксий Исаака Ньютона, в явной форме обретает второй порядок во времени, свойственный традиционным уравнениям аналитической механики с дополнительными кинематическими слагаемыми для приращения скоростей, объединяющим внутренние течения с деформациями базиса формы расчетной ячейки частицы жидкости:

$${}^+A = \overset{\rightarrow}{R} + \overset{\rightarrow}{V} \cdot t + \overset{\leftarrow}{a} \cdot (\overset{\wedge}{r} + \overset{\wedge}{v} \cdot t) + \overset{\leftarrow}{\omega} \cdot (\overset{\wedge}{r} + \overset{\wedge}{v} \cdot t) \cdot t \quad [M]. \quad (1)$$

Геометрическое моделирование кинематических свойств поля течения внутри элементарного вычислительного объекта, в тензорной форме может дополняться изменением скорости  $\overset{\rightarrow}{\omega}$ , замеряемой на базисных векторах  $r_i$  в проекциях абсолютной системы координат при условии, что все внешние силы полностью скомпенсированы кинематическими реакциями в окрестности этой элементарной частицы жидкости, что в вычислительном эксперименте с разделением на континуально-корпускулярные этапы моделирования практически неосуществимо, или – излишне.

Несколько иначе привносится интерпретация динамики внутреннего смещения точки в приведенной системе координат:  $\overset{\leftarrow}{a} = \overset{\leftarrow}{a} + \overset{\leftarrow}{w} \cdot t$  [м<sup>-2</sup>] – относительно локального базиса:

$${}^+A = \overset{\rightarrow}{A} + [\overset{\rightarrow}{V} + (\overset{\leftarrow}{a} + \overset{\leftarrow}{w} \cdot t) \cdot \overset{\wedge}{v}] \cdot t,$$

что привносит кинематическое ускорение в тензорное поле локальных деформаций:  $\overset{\wedge}{v}$  [м<sup>3</sup>/с], и, соответствующее усложнение описания движения сплошной среды до второго дифференциального порядка по аргументу времени  $t$  [с].

Необходимо воспользоваться обобщениями без повышения порядка разностного дифференцирования: для чего в прямом вычислительном эксперименте столь сложные законы механики разносятся и интерпретируются на сопряженных этапах континуально-корпускулярного моделирования с линейной интерполяцией физических явлений в пространстве, и такой же линейной аппроксимацией гидродинамических процессов – во времени.

## Пространственное представление кинематики сплошной среды

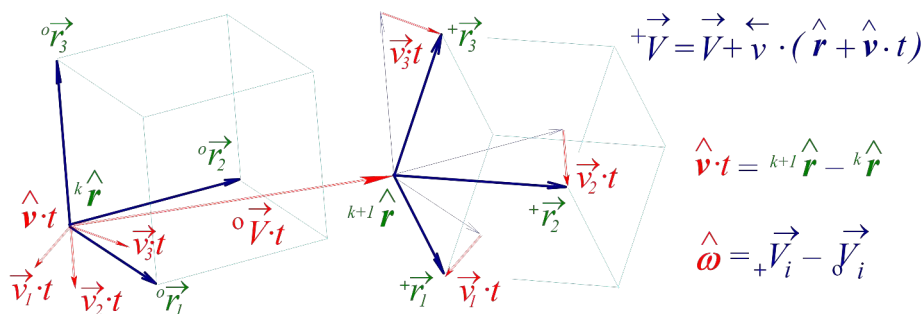
*Математические операции* в прямом вычислительном эксперименте строятся с условием необходимости повсеместного и непрерывного контроля реологического состояния моделируемой сплошной среды, и с возможностью динамического выбора адекватных математических моделей непосредственно в процессе вычислений. С этой целью все числовые объекты определяются с привязкой к геометрическому базису совместно физическими размерностями и реологическими характеристиками сплошной среды, необходимыми для алгоритмического согласования и преобразования вычислительных объектов непосредственно в процессе численного моделирования.

Естественные размерности числовых объектов задаются в абсолютном координатном базисе, где тензор локальной системы отсчета представляется в качестве некоего

пространственного объема в косоугольном параллелепипеде некопланарных базисных векторов:  $\overset{\wedge}{r}$  [м<sup>3</sup>]. Все числовые величины внутри локального базиса представляются распределенными по объему (*трехмерному пространству*). Простой геометрический вектор:  $\overset{\leftarrow}{a} = \overset{\rightarrow}{a} \cdot \overset{\vee}{r}$  в локальном базисе обретает размерность [м<sup>2</sup>], что полагает его интерпретацию в качестве некой особой точки с дипольной поляризацией, определяемой интенсивностью, направлением и расстоянием до точки приложения вектора  $\overset{\leftarrow}{a}$  [м<sup>2</sup>].

Абсолютный или полный вектор скорости крупной частицы жидкости будет представляться как смещение условного центра масс виртуальной числовой корпускулы:  $\overset{\wedge}{r}$  [м<sup>3</sup>] – в глобальной системе координат:

$$\vec{V} \cdot t = {}^A \vec{R} = {}^I \vec{R} - {}^O \vec{R} = {}^{T+I} \vec{R} - {}^T \vec{R} . \quad [M]$$



**Рис. 3.** Тензор изменения скоростей базисных векторов:  $\overset{\wedge}{\omega}$  [м<sup>3</sup>/с] – образуется деформационными движениями ребер координатного симплекса расчетной ячейки в пространстве, на фоне их смещения<sup>13</sup> в пространстве:  $\overset{\wedge}{v} \cdot t$  [м<sup>3</sup>] – за интервал времени:  $t$  [с].

Прямыми геометрическими построениями собирается тензор мгновенных скоростей:  $\overset{\wedge}{\omega}$  [м<sup>3</sup>/с] – относительно условного центра объема крупной частицы жидкости (рис. 3) в проекциях абсолютной системы координат. Тензор содержит компоненты вращения и скорости взаимной деформации базисных ортов относительно смежных узлов для движущихся точек в потоке жидкости в фиксированный момент времени:

$$\overset{\wedge}{\omega} = \omega^i \rightarrow = {}_A \vec{V}_i = {}_+ \vec{V}_i - {}_{\Omega} \vec{V}_i . \quad [M^3/c]$$

В момент запуска вычислительного эксперимента тензор внутренних течений в абсолютной системе координат:  $\overset{\wedge}{\omega}$  [м<sup>3</sup>/с] – может полагаться нулевым, что соответствует постановке задачи об установлении течения в результате возбуждения искусственной (*естественной*) нестационарности моделируемого потока.

Производные пространственные поля на разделенных этапах вычислений, как поле скорости:  $\overset{\wedge}{\omega}$  [м<sup>3</sup>/с], конструируются и формализуются с использованием потенциально

<sup>13</sup> Тензоры скорости  $\overset{\wedge}{\omega}$  и  $\overset{\wedge}{v} \cdot t$  могут быть нулевыми или вырожденными, а их обращение – физически неадекватно и математически некорректно.

вырожденных тензоров, что в механике жидкости предполагает их применение лишь в качестве малых ускоряющих или деформирующих добавлений, подобно:  $\overset{\wedge}{r} = \overset{o}{r} + v \cdot t$  [M<sup>3</sup>] – в произведении со скалярным шагом между этапами вычислений во времени:  $t$ .

Локальная кинематика потоков жидкости в окрестности элементарной сеточной ячейки строится алгоритмически в качестве разностного тензора скорости для смещаемых в пространстве и времени базисных векторов формы крупной частицы жидкости:

$$v \cdot t = v_i \cdot t = \overset{\Delta}{r}_i = \overset{t}{r}_i - \overset{o}{r}_i \quad [M^3]$$

Полный тензор локальных скоростей:  $v$  [M<sup>3</sup>/c] – задает текущие скорости смещения базисных ортов частицы жидкости в локальном масштабе (*строчные буквы*) с учетом трансформации потока во времени:  $t$  [c], измеренные в проекции глобальной системы координат (*все индексы внизу*).

Преобразованием системы отсчета тензора скоростей к локальному базису крупной частицы жидкости (*геометрическая нормализация*):  $v = v \cdot r$  [c<sup>-1</sup>] – получается полный независимый тензор конвективных скоростей, характеризующий локальные потоки жидкости с масштабным соотношением в проекциях абсолютных пространственных координат. Это отчасти согласуется с традиционными интерпретациями тензора – аффинора, а с геометрическими построениями теоремы Коши-Гельмгольца [6] для аддитивного разложения тензора по малым приращениям во времени, как: расширение (*дивергенция*); вязкий поворот (*ротор*) и упругие деформации (*сдвиги*).

Тензорные построения поля скоростей, ассоциируемые здесь с ньютоновскими флюксиями, не могут мигрировать между глобальной и локальными системами отсчета как абстрактные алгебраические объекты со свойствами «дуальности»<sup>14</sup>, их матрицы формально необратимы; так же как и физическая размерность времени не может покидать знаменатель без особых истолкований необходимости.

В локальном базисе числовые величины соотносятся с параметрами текущего состояния сплошной среды, что может использоваться в построении вычислительных моделей корпускулярной механики и физической теории поля. Важным подспорьем в записи таких числовых моделей служит формализованный контроль принадлежности к конкретным системам отсчета, с сопутствующим сопоставлением физических размерностей в операциях с пространственными смещениями и произведениями виртуальных числовых объектов:

$$\overset{\rightarrow}{A} = \overset{\rightarrow}{R} + \overset{\rightarrow}{V} \cdot t + (\overset{\wedge}{r} + \overset{\wedge}{v} \cdot t) \cdot (\overset{\rightarrow}{a} \cdot r) = \overset{o}{A} + (\overset{\rightarrow}{V} + \overset{\leftarrow}{v} \cdot a) \cdot t,$$

где обратный тензор:  $r$  [M<sup>3</sup>] – считается безусловно определенным; и потому произведение:  $\overset{\rightarrow}{a} \cdot r = \overset{\leftarrow}{a}$  [M<sup>-2</sup>] – переводит координаты вектора в локальный базис; и, соответственно, обезразмеренный по пространственному масштабу тензор конвективных скоростей:

<sup>14</sup> Запрет повышения ранга в операциях произведения позволяет выполнять перестановки множителей при условии обоснованности геометрических преобразований в пространстве, как при-

мер:  $v \cdot a = v \cdot (\overset{\rightarrow}{a} \cdot r) = v r \cdot a = v \cdot \overset{\leftarrow}{a}$  [M/c].

$\wedge \vee <$

$v \cdot r = v [c^{-1}]$  – включает все субстанциональные производные в виде разностей по смещениям крупной частицы жидкости на исходном:  $\overset{\wedge}{\circ} r [m^3]$  – и последующем:  $\overset{+}{\wedge} r$  – отсчетах во времени.

Чистый тензор конвективных скоростей:  $v [c^{-1}]$  – содержит кинематические элементы системы дифференциальных уравнений движения в форме Эйлера со всеми перекрестными производными компонентами движения деформируемой частицы жидкости:

$$\overset{<}{v} \overset{\wedge}{\cdot} r = \begin{pmatrix} v_{xx} r^{xx} + v_{xy} r^{yx} + v_{xz} r^{zx} & v_{xx} r^{xy} + v_{xy} r^{yx} + v_{xz} r^{zy} & v_{xx} r^{xz} + v_{xy} r^{yz} + v_{xz} r^{zz} \\ v_{yx} r^{xx} + v_{yy} r^{yx} + v_{yz} r^{zx} & v_{yx} r^{xy} + v_{yy} r^{yx} + v_{yz} r^{zy} & v_{yx} r^{xz} + v_{yy} r^{yz} + v_{yz} r^{zz} \\ v_{ij} r^{jk} = \begin{pmatrix} v_{zx} r^{xx} + v_{zy} r^{yx} + v_{zz} r^{zx} & v_{zx} r^{xy} + v_{zy} r^{yx} + v_{zz} r^{zy} & v_{zx} r^{xz} + v_{zy} r^{yz} + v_{zz} r^{zz} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Иначе, это произведение формально представляется в виде второго пространственного дифференцирования:  $v = v / r = \overset{<}{\Delta} v_i / \overset{\wedge}{\Delta} r_i$ , исполняемого без искусственных исключений каких-либо «малых» или конвективных элементов в аппроксимационных приближениях субстанциональных производных, что крайне важно для корректной физической интерпретации реологических характеристик моделируемой жидкости и условий существования неразрывных течений, в том числе при необходимости задействования уточняющих или ускоряющих моделирование асимптотических и эмпирических аппроксимаций физических моделей непосредственно в процессе проведения прямых вычислительных экспериментов.

Векторное поле скорости в расчетных узлах, так же как и анизотропное тензорное поле конвективных скоростей, являются производными кинематики сплошной среды во времени, и сопоставляются с реологическими параметрами сплошной среды *строго в локальных системах отсчета*, где условия существования и критерии сохранения сплошности, массы и энергии изначально строятся в математически предопределенных физических процессах в универсальном линейном интерполяционном пространстве вычислительного эксперимента. Виртуальные числовые объекты в таких моделях связаны тензорными произведениями с ближайшими смежными ячейками и корпускулами, что формально моделируется накоплением внутренней энергии – живых сил для корректного инерционного отклика свободных крупных частиц на изменение состояния внешней среды.

Векторное поле скорости в расчетных узлах, так же как и анизотропное тензорное поле конвективных скоростей, являются производными кинематики сплошной среды во времени, и сопоставляются с реологическими параметрами сплошной среды *строго в локальных системах отсчета*, где условия существования и критерии сохранения сплошности, массы и энергии изначально строятся в математически предопределенных физических процессах в универсальном линейном интерполяционном пространстве вычислительного эксперимента. Виртуальные числовые объекты в таких моделях связаны тензорными произведениями с ближайшими смежными ячейками и корпускулами, что формально моделируется накоплением внутренней энергии – живых сил для корректного инерционного отклика свободных крупных частиц на изменение состояния внешней среды.

Изначально вычислительный эксперимент основан на использовании сеточных пространств в виде многомерных числовых массивов, обеспечивающих прямую индексацию смежных узлов и ячеек, представляющих контрольные точки локальных базисов и связанных с ними центров масс крупных частиц жидкости. Разделение этапов вычислений по физическим процессам с пространственными аппроксимациями первого порядка может строиться с использованием свойств векторных и тензорных числовых объектов, способных корректно накапливать предысторию деформационных девиаций пространственных сеточных ячеек в качестве внутренней энергии инерционных реакций [9] «несвободных» частиц жидкости – виртуальных расчетных корпускул.

Задействование в расчетах массовых/объёмных сил и градиентов напряжений, с вычислением сопутствующих приращений потоков или скоростей движения *в условно инерциальных системах отсчета* выполняется в интерполяционных процедурах на исходных неподвижных сеточных узлах, с приведением результатов к центрам масс/объемов для всех, ограниченных этими узлами смежных ячеек. Такой инерциальной системой координат, на мгновенный отсчет единого времени, устанавливается глобальное пространство с множеством расчетных сеточных узлов и смежных ячеек, в которых выстраиваются начальные условия и определяются результаты трансформации физических полей по циклам разделения решений в этапах вычислительного эксперимента. Вычислительными операциями континуального этапа, сводимыми к центрам масс/объемов пространственных ячеек, становится расчет скалярных параметров физического состояния моделируемой жидкости (детерминанты тензоров и дивергенция векторных полей), и соответствующее вычисление кинематических ускорений с перестроением потоков вещества, тепла или магнитных полей и др.

Исходя из аддитивного кинематического выражения на момент времени  $t$  для точки в локальном пространстве  $\vec{a}$ , смещающейся внутри собственного базиса со скоростью  $\vec{\omega}$  (1):

$$\vec{A} = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + (\vec{a} + \vec{\omega} \cdot t) \cdot (\vec{r} + \vec{v} \cdot t) \quad [\text{м}], \quad (2)$$

где вектор внутренней скорости  $\vec{\omega}$  может содержать как постоянную составляющую для пространственной ячейки в целом  $\vec{\omega} \cdot \vec{r}$ , так и замкнутый внутри частицы поток  $\vec{\omega} \cdot \vec{v} \cdot t$  – с проявлением свойств поляризации подвижной корпускулы.

После сведения кинематического выражения (2) к точке воздействия в центре инерционной массы вычислительной ячейки – частицы, где  $\vec{a} = 0$ :

$$\vec{v} = \vec{\omega} \cdot (\vec{r} + \vec{v} \cdot t) \quad [\text{м/с}], \quad (3)$$

остаточное приращение скорости обретает контекст традиционного ускорения, или вновь обретаемой скорости в течение заданного момента времени  $t$ .

**!!! WWW !!!** ... , отчего закон инерции Ньютона воссоздается простым вовлечением скалярного коэффициента – как детерминанта виртуальной (зависящей от контекста состояния моделируемой сплошной среды) тензорной массы:

$$\vec{F} = \vec{W} \cdot \vec{v} \cdot (\vec{r} + \vec{v} \cdot t) = \vec{W} \cdot \vec{M} \quad [\text{кг} \cdot \text{м/с}^2], \quad (4)$$

остаточное приращение скорости обретает традиционный смысл ускорения, где величина инерционной массы связана с объемом и скоростью деформации частицы сплошной среды.

... или выражение Жуковского для стационарного обтекания частицы ...

<<< здесь необходимы физические принципы и суть механики накопления энергии, отображающейся в локальных базисах и в масштабах глобальной системы отсчета >>>

... становятся вычисление градиентов для перестроения векторных полей и свертка векторных и тензорных параметров течения до скалярных...

На последующем корпускулярном этапе ...

### 3. Тензорная математика в алгоритмической записи основных законов гидромеханики

Формальное построение физических объектов и операций в тензорной математике [21] приводит к строгим определениям для своеобразной «модели мира» вычислительной гидромеханики:

1) континуально-корпускулярная вычислительная модель метода «Крупных частиц» [1] в тензорной записи сводится к двойной линейной разностной интерполяции физических полей (*вместо одномоментного интегрирования уравнений движения второго порядка*);

2) движение и взаимодействие крупных частиц жидкости строится в операциях произведения, что более соответствует физике пространственных процессов (*нет жестких пространственных ограничений по малости шага разностных аппроксимаций*);

3) использование явных численных схем и условно малых физических континуумов служат условием эффективности прямых вычислительных экспериментов, и не исключают возможности контроля корректности, и, по необходимости, задействования гибридных схем для достижения адекватных инженерных результатов численного моделирования (*континуально-корпускулярные модели обладают возможностью физической интерпретации законов гидромеханики вкупе с оценками реологического состояния и трансформации жидкой сплошной среды*).

В то же время, вычислительная модель в таком варианте строится на гладких функциональных зависимостях как в пространстве сеточных ячеек, так и по времени их трансформации, что формально усложняет построение исходных физических полей, текущее состояние которых всегда должно наследоваться согласованным развитием физических явлений в рамках моделирующих законов во времени из состояния полного покоя.

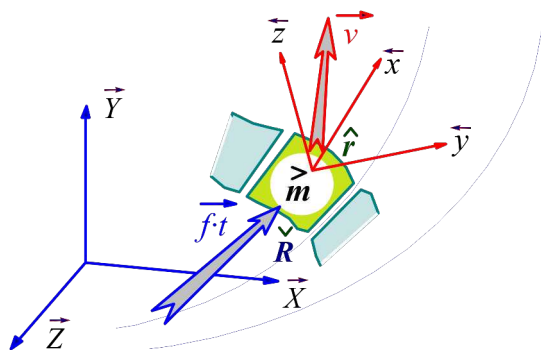
Алгоритмы прямого численного моделирования нестационарных процессов в гидромеханике строятся на историческом прототипе *исчисления флюксий* Исаака Ньютона, ассоциирующегося с элементарными ячейками-частицами трехмерного континуального пространства и виртуальными операциями для исполнения законов физики в контекстной пространственно-временных аппроксимаций тензорной математики.

Исходя из необходимости сквозного контроля текущего состояния числовых объектов, что важно для реализации динамического выбора методов вычислений, устанавливаются функциональные или контекстные требования к математическим моделям для вычислительных экспериментов в континуально-корпускулярных физических средах:

- *элементарные пространственно-временные объекты и базовые физические явления должны представляться в виде вычислительных структур и числовых величин в размерном виде;*
- *все вычислительные операции должны определяться во взаимосвязи физических свойств среды и законов гидромеханики для моделируемых явлений, применяемых для встроеного или автоматического перерасчета координатных величин и физических размерностей;*
- *свойства вычислительных операций и элементарных числовых объектов инвариантно определяются в глобальной – абсолютной системе координат, и од-*

нозначно соответствуют расчетным величинам в локальных – дуальных базисах, связанных операциями произведения между всеми крупными частицами – конечными объемами жидкости.

В локальных координатах близких линейных взаимодействий сеточных ячеек и виртуальных частиц жидкости складывается каноническое представление законов гидромеханики из элементарных математических операций с тензорными величинами для геометрических аппроксимаций числовых объектов и операций с ними в прямой взаимосвязи с архитектурой современных арифметико-логических устройств, и отображающихся в современных языках декларативного построения вычислительных алгоритмов.



**Рис. 4.** Разделение этапов моделирования по физическим процессам вовлекает тензорную массу:

$m$  [кг] – в процессы вычислений в качестве геометрического оператора, корректирующего движение частиц жидкости по реакциям живых сил и инерции, последовательно аккумулируемых в виртуальных ячейках-частицах на сопряженных по времени этапам вычислительного эксперимента.

Методы тензорной математики, в этом случае, сводятся к формированию двух последовательных этапов интегрирования на основе линейных аппроксимаций, соответствует решению дифференциальных уравнений механики в векторной нотации закона Ньютона для несвободного движения в близком окружении смежных поляризованных корпускул – ячеек-континуумов сплошной среды:

$$F_j = M_{ji} \cdot W^i \quad \text{или} \quad \vec{F} = \hat{M} \cdot \vec{W} \quad [\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2], \quad (5)$$

где вектор внешней силы:  $\vec{F}$  [Н, кг·м/с<sup>2</sup>] – компенсируется тензором инерции:  $\hat{M}$  [кг·м<sup>3</sup>] – как модели<sup>15</sup> внутреннего состояния поляризованной корпускулы – крупной частицы жидкости [13] в произведении с вектором ускорения  $\vec{W}$  [м<sup>2</sup>·с<sup>-2</sup>] в связанной (дуальной) системе локальных отсчетов.

Приведение уравнений движения (5) к единой абсолютной системе координат получается связыванием внутренней механики и внешних проявлений движения (Рис. 4) с

помощью смешанного тензора:  $m = \rho \cdot r = m_j^i$  [кг], масштабированного для исключения геометрического тензора:  $r$  [м<sup>3</sup>] – в глобальной системе отсчета, с помощью тензора

<sup>15</sup> Обозначение массы прописной буквой означает глобальный масштаб этой величины, как сумму поляризованных корпускул:  $M = \sum m$  – массу большого тела.

плотности:  $\overset{\vee}{\rho}$  [кг/м<sup>3</sup>] – в проекциях локального базиса, что придает жидкой среде обобщенные анизотропные механические свойства:

$$\vec{F} = \vec{W} \cdot \overset{\vee}{\rho} \cdot r_{ij} = \vec{W} \cdot \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{r} = \vec{W} \cdot \overset{>}{M}, \quad [H] \quad (6)$$

где:  $\vec{W}$  [м/с<sup>2</sup>] – становится привычным ускорением движения – реакцией на действие внешних сил под влиянием изменяющихся внутренних «живых сил»:  $\overset{>}{M}$  [кг] – условной тензорной массой, аккумулирующей предысторию девиации поступательных смещений и внутренних деформаций числового объекта на этапах разделения решений по физическим процессам с линейными пространственными аппроксимациями полных уравнений гидромеханики.

### Реологическое состояние, живые силы и проявления инерции при внешних воздействиях

Естественной математической моделью внутренних течений, связывающей инерцию нестационарного движения с внешними проявлениями реакции на изменение внутренней кинетической энергии, представляется использование своеобразного логического тензора плотности:  $\overset{\vee}{\rho}$  [кг/м<sup>3</sup>] – с физическими размерностями распределенной массы, определяемой внутри фиксированного локального базиса в абсолютной системе координат:  $\overset{\wedge}{r}$  [м<sup>3</sup>].

Первое пространственное интегрирование (*проецирование*) уравнений движения (6) для приведения компонент тензора плотности к абсолютной системе координат, превращает его в тензор:  $\overset{>}{m} = \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{r}$  [кг] – ассоциируемый с инерционной массой элементарной частицы жидкости, определяющей искомую внутреннюю энергию движения в обобщенной тензорной модели крупной частицы жидкости<sup>16</sup>:  $\overset{\vee}{\rho}$  [кг/м<sup>3</sup>], где тензор формы:  $\overset{\wedge}{r}$  [м<sup>3</sup>] – включается в произведение нормализации (*исключения пространственного масштаба*) внутренней кинетической энергии частицы жидкости, с привязкой ее к конкретной сеточной ячейке – расчетной корпускулы.

Собственный тензор массы:  $\overset{>}{m}$  [кг] – должен интерпретироваться в качестве особого поляризованного механического объекта, совмещаемого с текущим тензором формы крупной частицы жидкости, и задающим своеобразный замкнутый поток или кинетическую энергию течения внутри крупной частицы жидкости. Свойства внутреннего течения зависят от предыстории движения независимой частицы жидкости в несвободном про-

<sup>16</sup> Кинематика тензора формы строится на базисных векторах в абсолютной системе координат (Рис. 3), и после нормализации (*пространственного дифференцирования*) приводит к тензору конвективных скоростей:  $\overset{<}{v} = v_i^j$  – первый индекс нижний, второй – верхний. Анизотропная масса изначально задается как:  $\overset{>}{m} = v_k^j$  – с первым индексом вверх, и вторым – вниз, в качестве тензора – оператора инерции поляризованной корпускулы под влиянием внешних сил.

странстве. Тогда, в рамках теоремы о живых силах: изменение энергии внутреннего потока должно проявляться вне частицы в виде работы внешних сил или сил инерции. Анализ движения в рамках исчисления флюксий подтверждает, что в данном случае внешним силам противопоставляется инерционная реакция, обусловленная необходимостью изменения внутренней кинетической энергии элементарных частиц жидкости.

Такая кинематическая реакция имеет векторный характер, и может быть направлена как на отклонение от линии действия вектора внешних сил, так и на его торможение или даже ускорение, если в окружающей среде будут созданы условия для высвобождения замкнутой энергии движения жидкости внутри элементарной крупной частицы.

При конструировании вычислительного эксперимента, на первых этапах моделирования (в идеальной жидкости — на каждом шаге интегрирования во времени) тензор  $\rho$  может определяться как диагональный, с масштабом главных компонент в соответствии со скалярной плотностью.

Полагая геометрические свойства тензора плотности аналогичными тензору формы крупной частицы жидкости, можно допустить его представление в качестве дуального:  $\rho \cdot \rho = 1$  — в некой условной системе координат:  $\rho$  [м<sup>3</sup>/кг] — с проекциями единого для всех расчетных корпускул и универсального пространства массовых отсчетов. С применением масштабирующего тензора формы:  $r$  [м<sup>3</sup>] — в знаменателе, или обратного к нему тензора локального базиса:  $r$  [м<sup>3</sup>] — в произведении справа с тензором обратной плотности:  $m = \rho \cdot r = \rho / r = m_i^j$  [кг<sup>-1</sup>] — получается величина условно обратной массы для использования в алгебраической записи законов механики.

Искомый тензор массы:  $m$  [кг] — проявляет себя в качестве линейного оператора для моделирования инерционных реакций поляризованных корпускул (6), находящихся под векторным воздействием всепроникающих объемных (массовых) сил:  $\vec{F}$  [Н], и под влиянием окружающей сплошной среды на гранях сеточной ячейки в форме анизотропного тензора поверхностных напряжений:  $f$  [Н·м<sup>2</sup>], образующих нестационарное континуально-корпускулярное силовое взаимодействие при совокупной взаимокомпенсации внешних проявлений внутренней энергии (живых сил) инерционного тензора массы:  $m$  [кг].

## Вычислительные модели законов движения и внутренней механики числовой ячейки-корпускулы

В тензорной математике строятся различные вычислительные модели сплошной среды, в том числе с различными тепловыми, химическими или электромагнитными трансформациями реологических параметров состояния сплошной среды, формализуемыми линейными аппроксимационными связями в пространстве и времени, и что ни коей мере не ограничивает применение произвольных функциональных, асимптотических или

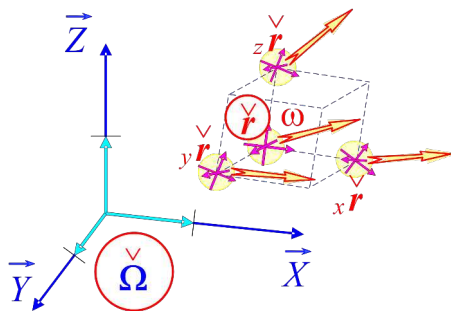
эмпирических моделей физической теории поля, с возможностью инструментальной поддержки непосредственно канонической записи физических законов в универсальных координатных отсчетах или собственных локальных базисах внутри подвижных корпускул сплошной среды, освобожденных от необходимости неразрешимых в численных методах перерасчетов сложных межкоординатных и высокоскоростных кинематических или конвективных взаимозависимостей.

Пространство скалярных величин (давление, температура, плотность, ...) в законах движения проявляются в качестве векторов градиентов, вычисляемых в центрах масс подвижных частиц сплошной среды, с фиксацией производных отсчетов либо на ребрах расчетных ячеек, либо сводимых к их пространственным центрам<sup>17</sup>.

Пространство векторных физических величин (массовые силы, скорость...) учитывается в интерполяционных построениях для произвольных точек пространства. Без потери общности в построениях вычислительного эксперимента для реальных жидкостей, ограничимся здесь рассмотрением массовых сил, поверхностных напряжений, с их инерционным откликом на ускорение, конвективные скорости и упругие смещения в локальных базисах виртуальных корпускул, в том числе с учетом их взаимодействия в составе окружающих смежных расчетных частиц-ячеек.

Вектор внешней массовой силы:  $\vec{f}$  [Н] – равномерно распределяется по объему элементарной частицы жидкости, и составляет дифференциал в векторной трактовке закона Ньютона, используемый в качестве приращения скорости за расчетный интервал времени:  $t$  [с]:

$${}^+ \vec{V} = {}^o \vec{V} + m \cdot \vec{f} \cdot t. \quad [\text{м/с}] \quad (7)$$



**Рис. 5.** На корпускулярном этапе вычислительного эксперимента выполняется оценка текущего реологического состояния сплошной среды в исходных узлах расчетной сетки

На континуальном этапе вычислительного эксперимента (рис. 6, 7) [7] для каждого пространственного сеточного узла:  ${}_{\Omega} \vec{R}$  [м] – уточняются векторные поля абсолютных:  $\vec{V}$  [м/с] – и локальных скоростей:  $v$  [м/с], находящихся в ближайших окрестностях расчетной ячейки:  $a$  [м<sup>2</sup>] – с учетом деформации и изменения внутренней кинетической энергии

<sup>17</sup> Пример: Акустическое поле жестко связывает приращение векторного градиента плотности с приращением потока плотности (скорости частицы) в том же направлении с использованием в качестве коэффициента – квадрата скорости звука.

гии:  $\omega$  [с<sup>-1</sup>] – под действием внешних массовых сил:  $\vec{f}$  [кг·м/с<sup>2</sup>] и поверхностных напряжений:  $\hat{f}$  [Н·м<sup>2</sup>], действующих в условиях активного влияния внутренней энергии и инерции:  $m = \rho \cdot r$  [кг] – конкретной частицы:  $r$  [м<sup>3</sup>] – в произведении с тензором плотности:  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] – формализующим предысторию действия объемной силы инерции и поверхностного комплекса живых сил – собственной внутренней энергии жидкой корпускулы:

$${}^+A = \vec{R} + \vec{V} \cdot t + m \cdot \vec{f} \cdot t^2 / 2 + (\hat{r} + \hat{v} \cdot t + m \cdot \hat{f} \cdot t^2 / 2) \cdot \vec{a}. \quad [M] \quad (8)$$

где:  ${}^+A$  [м] – местоположение точки в новый расчетный шаг во времени;  $\vec{R}$  [м] – исходное местоположение центра отсчета для числовой ячейки;  $\vec{V}$  [м/с] – скорость свободного движения частицы жидкости;  $\vec{f}$  [Н] – внешняя объемная сила;  $\hat{f}$  [Н·м<sup>2</sup>; кг·м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>] – тензор поверхностных напряжений, предопределенный из граничных условий. В случае использования специальных пространственно разнесенных сеточных шаблонов, интерполяционные поправки на локальное местоположение центра масс:  $\vec{a}$  [м<sup>-2</sup>] – могут стать пренебрежимо малыми.

Возвращение к интерпретации чисто кинематического определения для движения деформируемой сеточной ячейки приводит к прямому сопоставлению силовых и кинематических параметров движения в обобщенной форме Эйлера<sup>18</sup>:

$$m \cdot (\vec{F} + \hat{f} \cdot \vec{a}) \cdot t / 2 = (\hat{r} + \hat{v} \cdot t) \cdot \vec{\omega} \quad [M/c], \quad (9)$$

или, перепроецируя поверхностные напряжения:  $\hat{f}$  [Н·м<sup>2</sup>] – к конвективному тензору без пространственных геометрических компонент:  $\hat{f} = \hat{f} \cdot r$  [Н/м; кг/с<sup>2</sup>] – получим приведение всех свободных векторов к единой абсолютной системе координат:

$$m \cdot (\vec{F} + \hat{f} \cdot \vec{a}) \cdot t / 2 = \vec{\omega} + \hat{v} \cdot \vec{\omega} \cdot t \quad [M/c]. \quad (10)$$

Полученное соотношение соответствует искомому закону механики о взаимной компенсации внешних сил и поверхностных напряжений за счет приращения скоростей движения и вращения ячейки-корпускулы по аналогии с твердое тело, при участии независимых «живых сил» в виде вращательных и замкнутых деформационных и дипольных течений [21] внутри самой крупной частицы жидкости.

При построении вычислительного эксперимента на основе разделения решений по физическим процессам, полагается на первом континуальном этапе использовать векторные компоненты уравнений движения, отвечающие за поступательное движение крупной частицы жидкости под действием массовых сил. Тогда на последующем корпускулярном

<sup>18</sup> В тензорных операциях *перестановка сомножителей недопустима*, а ограничение жонглирования индексами позволяет автоматизировать расстановку сомножителей непосредственно в момент проведения вычислений.

этапе будут рассматриваться только деформационные составляющие течения в ближайшей окрестности элементарной частицы.

Вместо контрольного вектора для одной пространственной точки можно рассмотреть всю тройку базисных векторов, представляя их в проекциях локального базиса.

По ранее упоминаемым определениям:  $m = \rho \cdot r$  [кг] – собственные «живые силы» виртуальной корпускулы, и:  $f = f \cdot r$  [кг/с<sup>2</sup>] – тензор внешних напряжений на гранях числовой ячейки в дуальной к тензору масс системе координат.

Для моделирования внутреннего состояния частиц жидкости (9) на месте векторов:  $a$  и  $\omega$  [м] – снова используем базисные симплексы пространственных ячеек:  $r$  [м<sup>3</sup>], и – свободные тривекторы:  $\omega$  [м<sup>3</sup>] – замороженные в поток жидкости:

$$f \cdot \rho \cdot t / 2 = (1 + v \cdot t) \cdot \omega \quad [\text{м}^3/\text{с}] \quad 19, \quad (11)$$

что приводит к желаемым соотношениям между кинематическими и динамическими этапами вычислительного эксперимента, где в зависимости от характера и сложности прикладной задачи, континуальные вычисления обновляют векторные и тензорные поля в узлах неподвижной сетки, с последующим пересмотром корпускулярных взаимодействий при согласовании реологических параметров, условий существования и нестационарной механики потоков жидкости.

По изменению смещений и деформаций векторного поля в окрестности сеточной ячейки вычисляется тензор локальных скоростей, изменяющийся во времени и непосредственно влияющий как на оценки реологического состояния подвижных частиц жидкости, так и на характер трансформации массовых сил и тензоров поверхностных напряжений (11), зависящих от активности взаимодействия подвижных поляризованных корпускул – крупных частиц жидкости.

Для собственного тензора плотности-инерции:  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] – такое поверхностное напряжение поддерживается интенсивностью локальных скоростей в ближайшей окрестности пространственной ячейки-частицы в единицу времени:

$$f = v \cdot \rho / t, \quad [\text{Н/м}] \text{ или } [\text{кг}/\text{с}^2] \quad (12)$$

где тензор локальных скоростей:  $v = \vec{V}_i - \vec{V}_o$  – вовлекает в механику движения конкретной корпускулы (Рис. 5) компоненты для учета сжатия, вращения и сдвиговой деформации.

Реологические параметры сплошной среды также должны устанавливать возникновение поверхностных напряжений на гранях ячейки-частицы в зависимости от скорости и величины внутренней деформации, что определяется фундаментальными зависимостями Исаака Ньютона для вязкости и Роберта Гука для упругости сплошной среды, соответственно.

<sup>19</sup> Обозначение в виде крестика не связывает тензор с конкретным базисом. Физическая размерность принимается как у смежного слагаемого.

С соблюдением общепринятых физических определений и размерностей для локальных скоростей (*флюксий*) по Ньютону  $\overset{\wedge}{v}_H [\text{м}^3/\text{с}]$ , получается частное решение для напряжений на поверхности подвижной корпскулы:

$$\overset{<}{f}_H = \overset{\wedge}{v}_H \cdot \overset{\vee}{\eta} / \lambda, \quad [\text{Н/м}] \quad (13)$$

где:  $\overset{\vee}{\eta} [\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^3]$  или  $[\text{кг}/\text{с}/\text{м}^2]$  – распределенная по объему динамическая вязкость определяет напряжение от внутреннего трения с учетом отстояния точек приложения сил:  $\lambda [\text{м}]$ . Коэффициент кинематической вязкости обретает размерность скорости:  $\overset{>}{\tau} = \overset{\vee}{\eta} \cdot \overset{\wedge}{\rho} [\text{м}/\text{с}]$ , что в соотношении с масштабным отсчетом:  $\overset{>}{\tau} / \lambda [\text{с}^{-1}]$  – теряет формальную геометрическую привязку.

Для фиксации упругих напряжений тензор локальных скоростей обратим в соответствующий тензор смещений в произведении с расчетным шагом во времени:  $\overset{\wedge}{v}_\Gamma \cdot t [\text{м}^3]$ , тогда для внутренних динамических смещений по закону Гука;

$$\overset{<}{f}_\Gamma = \overset{\wedge}{v}_\Gamma \cdot \overset{\vee}{\kappa} \cdot t / \lambda, \quad [\text{Н/м}] \quad (14)$$

где:  $\overset{\vee}{\kappa} [\text{Н}/\text{м}^3]$  – динамический тензор коэффициентов упругости (*жесткости*) для объемной и сдвиговой деформации расчетной ячейки-частицы сплошной среды также включает масштабирующий геометрический размер:  $\lambda [\text{м}]$ . Кинематические оценки или тензорный модуль упругости:  $\overset{>}{\mu} = \overset{\vee}{\kappa} \cdot \overset{\wedge}{\rho} [\text{м}]$  – также не содержит размерности времени, и в соотношении с масштабным отсчетом:  $\overset{>}{\mu} / \lambda$  – становится безразмерной характеристикой объемного сжатия и сдвиговой упругости.

Под действием упругих напряжений ячейка-частица частично всегда деформируется также и по нормали к действию вектора внешних сил, что оценивается скалярным коэффициентом Пуассона:  $\mu$  – определяющим соответствующее изменение линейных размеров конкретного упругого материала при односторонней концентрации деформирующих напряжений.

## Построение вычислительной модели для явных численных схем гидромеханики

Формальное разделение этапов вычислений по физическим процессам основано на геометрическом построении интерполяционных полей с дифференцирующими разностями первого порядка, что приводит к разделенным этапам моделирования первого порядка также и во времени: континуального (*на неподвижной сетке Эйлера*), и затем – корпускулярного (*со свободными частицами Лагранжа*), в последовательном сопряжении создающих дифференцирование второго порядка для нестационарных процессов гидромеханики в функции от шага во времени:  $t$  – единого скалярного аргумента.

Определение механики числовой ячейки-частицы в сплошной среде включает в себя традиционную систему дифференциальных уравнений Эйлера для внешних массовых сил:  $\vec{F}$  [Н], а также дополнительное определение локальной деформации жидкой частицы под действием поверхностных напряжений:  $\overset{\wedge}{f}$  [Н·м<sup>2</sup>; кг·м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>] – на ее границах, формализуемых в явной форме относительно инерционных ускорений, (12), конвективных скоростей (13) и локальных смещений (14) в собственных локальных базисах расчетных ячеек-частиц жидкости..

Разделение вычислительного эксперимента по физическим процессам приводит к тому, что основной закон движения условно свободных частиц на континуальном этапе обеспечивается полным комплексом внешних сил, которые традиционно компенсировались простым векторным, а по сути – скалярным, законом движения Ньютона. К тому же требуется, чтобы под действием распределенных массовых сил:  $\vec{f}$ , и поверхностных напряжений:  $\overset{\wedge}{f}$  [Н·м<sup>2</sup>] – проявлялась весьма значимая инерционная реакция:  $\overset{\rightarrow}{w}$  [м/с<sup>2</sup>], увлекающая расчетную корпускулу не по плавному параболическому ускорению, а одно-моментно устанавливающая направление движения со значимым изменением скорости, согласующимся с предысторией течения жидкости в исходном неразрывном потоке.

Такой математической операцией является произведение с особым тензорным числовым объектом, аккумулирующим необходимую внутреннюю энергию (*живые силы*) для осуществления требуемой инерционной реакции на действие внешних сил, доступных на конкретном этапе вычислительного эксперимента. Если в тензоре *конвективных скоростей* аккумулируются *вихревые и дипольные эффекты*, это вызовет изменение величины и направления реакции на внешние силы, что формально расширяет возможности математического представления основных законов механики (*для взаимозависимых сплошных сред*).

Закон движения для свободной частицы сплошной среды (Рис. 4):

$$\overset{\rightarrow}{f} = \overset{\rightarrow}{w} \cdot m = \overset{\rightarrow}{w} \cdot \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{r}; \quad [\text{Н}, \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2] \quad (12)'$$

Тензор вязких напряжений в потоке локальных скоростей (Рис. 5):

$$\overset{<}{f}_H = \overset{\wedge}{v}_H \cdot \overset{\vee}{\eta} / \lambda = \overset{<}{v}_H \cdot \overset{<}{\eta} / \lambda, \quad [\text{Н} / \text{М}] \quad (13)'$$

Тензор упругих напряжений при деформации корпускулы<sup>20</sup>:

$$\overset{<}{f}_T = \overset{\wedge}{v}_T \cdot \overset{\vee}{\kappa} \cdot t / \lambda = \overset{<}{v}_T \cdot \overset{<}{\kappa} \cdot t / \lambda, \quad [\text{Н} / \text{М}] \quad (14)'$$

где тензор локальных скоростей:  $\overset{\wedge}{v} = \overset{+}{V}_i - \overset{o}{V}_i$  [м<sup>3</sup>/с]; реологические тензоры:  $\overset{>}{m} = \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{r}$  [кг] – тензор массы – инерции;  $\overset{\wedge}{r}$  [м<sup>3</sup>] – тензор формы;  $\overset{\vee}{\rho}$  [кг/м<sup>3</sup>] – «условная плотность»

<sup>20</sup> Реологические параметры жидкости в тензорной математике не сохраняют форму традиционных выражений, и для согласования физических размерностей введена характерная скалярная дистанция  $\lambda$  [м] в записях законов вязкости и упругости.

сохранения предыстории девиаций – внутренних «живых сил» подвижных корпускул;  $\eta$  [кг/с/м<sup>2</sup>] – тензоры динамической вязкости и жесткости;  $\kappa$  [кг/м<sup>2</sup>] – реальной жидкости,  $\lambda$  [м] – дистанция ближнего взаимодействия смежных частиц.

Тензор локальных скоростей:  $v$  [м<sup>3</sup>/с] – в проекциях абсолютной системы координат для использования в уравнениях движения (13) и (14) должен обрести свойства тензора конвективных скоростей без пространственной привязки, для чего геометрический масштаб исключается однократным применением операции пространственного дифференцирования для приведения к локальному базису расчетной ячейки-частицы:

$$v = v \cdot r = v \cdot r^{-1}. \quad [1/c] \quad (15)$$

Операции с тензором конвективных скоростей, и в первую очередь произведения с параметрами реологического состояния сплошной среды, образуют сложные комплексы субстанциональных производных для прямого моделирования законов гидромеханики в подвижных локальных базисах, подверженных интенсивным напряжениям и деформациям в сопутствующих нестационарных трансформациях механики сплошных сред.

Сопряженный корпускулярный этап вычислений получает обновленное кинематическое поле тривекторов локальных скоростей:  $v$  [м<sup>3</sup>/с] – с уточнением деформационных смещений относительно подвижных корпускул:  $\varepsilon$  [м<sup>3</sup>] – для обратного интерполирования – вторичного разностного интегрирования (Рис. 5) с фиксацией напряжений:  $\sigma$  [кг·м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>] – как ускорения потока массы в ближайших окрестностях виртуальных числовых объектов:

$$\sigma = (\varepsilon \cdot \kappa + v \cdot \eta) \times \lambda, \quad [H \cdot m] \quad (16)$$

где:  $\kappa$  [Н/м<sup>3</sup>] – тензорный модуль упругой деформации;  $\eta$  [Н·с/м<sup>3</sup>] – тензор коэффициентов вязкости;  $\lambda$  [м] – масштабный коэффициент, характеризующий дистанцию между взаимодействующими виртуальными энергетическими объектами – крупными частицами жидкости.

Отметим здесь, что тензоры напряжений  $\sigma$  и локальных скоростей  $v$  могут быть нулевыми или вырожденными. Это означает, что без возможности вычисления обратных матриц, смена базисов выполняется только в операциях произведения с тензорами формы:  $v \cdot r = v$  [с<sup>-1</sup>] – без влияния на отсчет времени в знаменателе. В вычислительном эксперименте, при эмпирическом построении математических моделей, требуемые физические объекты могут моделироваться прямым алгоритмическим синтезом векторных и тензорных числовых объектов по интерполяционным (*аппроксимационным*) оценкам состояния окружающей жидкости.

При шивке континуально-корпускулярных этапов, в качестве оптимального может стать метод итерационного согласования кинематических и реологических характеристик физического поля в явных численных схемах, сводимых к режиму последовательного

установления нестационарных вычислительных процессов, проистекающих по математическим моделям для *вязких, упругих и сжимаемых жидкостей*.

В различных прикладных вычислительных экспериментах во внутренние потоки подвижных частиц жидкости вовлекаются, к примеру, скалярное распределение температур, растекающееся между свободными частицами по отрицательным градиентам; или связанное скоростью звука изменение плотности упругого газа в функции от дивергенции скорости и величины давления, в том числе с уточнениями по закону Бернулли и с учетом внутренней тепловой энергии, что синтезирует расширенное решение прикладной задачи аэрогидромеханики.

## Механика континуально-корпускулярных взаимодействий

Законы движения пространственных объектов определяются в зависимости от времени:  $t$  [с] – выступающего в качества абсолютного скалярного параметра для всех процессов механики сплошных сред: кинематики пространственных перемещений и всех видов трансформации энергии.

В разделении вычислительного эксперимента по этапам линейно интерполируемых физических процессов не допускается одномоментное сопоставление внешних сил и внутренних реакций, традиционно формализуемых уравнениями движения второго порядка во времени. Двойная линейная пространственно-временная аппроксимация движения обуславливается тензорной формализацией инерционной массы:  $m$  [кг] – в качестве числовой ячейки-частицы, аккумулирующей инерцию девиации направления и скорости вынужденного движения по линиям тока в окружении смежных расчетных узлов и виртуальных корпускул, и согласующих полные уравнения гидромеханики по сбалансированным алгоритмическим схемам прогноза и коррекции для вычислительного эксперимента в целом.

На исходном континуальном этапе вычислительного эксперимента производится расчет поступательных скоростей:  $\vec{v}$  [м/с] – и сопутствующих смещений частиц жидкости под действием внешних массовых сил:  $\vec{f}$  [кг·м/с<sup>2</sup>] – векторной природы, то корпускулярный этап будет сводиться к оценкам вновь возникающих деформационных составляющих течения в форме тривектора локальных скоростей:  $\hat{v}$  [м<sup>3</sup>/с] – в ближайших окрестностях элементарных частицы жидкости под воздействием тензора поверхностных напряжений:  $\hat{f}$  [кг·м<sup>3</sup>/с<sup>2</sup>] и тензора массы:  $\hat{m} = \hat{m}^i_j = \rho \cdot \hat{r}$  [кг].

Кинематические модели приводят частицы жидкости к уточнённым координатам местоположения и новым скоростям движения в расчетных центрах масс крупных частиц жидкости, что, в свою очередь, требуется для оценки напряженного состояние (16) и инерционных реакций (12) при согласовании механических связей подвижных частиц – смежных ячеек жидкости:

$$\hat{f} = (\hat{\varepsilon} \cdot \hat{\kappa} + \hat{v} \cdot \hat{\eta}) / \lambda, \quad [\text{Н} \cdot \text{м}^2] \quad (17)$$

где:  $\hat{\varepsilon} \approx \hat{v} \cdot \hat{t}$  [м<sup>3</sup>] – тензор смещения базисных осей;  $\hat{\kappa} = \hat{\kappa} \cdot \hat{r}$  [Н] – относительный тензор модуля упругой деформации;  $\hat{v}$  [м<sup>3</sup>/с] – скорость деформации базисных осей и:  $\hat{\eta} = \hat{\eta} \cdot \hat{r}$  [Н·с] – относительная матрица коэффициентов вязкости;  $\hat{\lambda}$  [м] – масштабный коэффициент, характеризующий дистанцию между взаимодействующими частицами жидкости.

Массовая плотность жидкости представляется независимым физическим объектом в локальном базисе крупной частицы жидкости:  $\hat{\rho}$  [кг/м<sup>3</sup>] – характеризующим инерционные свойства и внутреннюю кинетическую энергию – живые силы свободной корпускулы в динамическом окружении смежных частиц – ячеек сеточной области. Дуальный тензор плотности:  $\hat{\rho}$  – формализует законы гидромеханики в качестве *предопределенных вычислительных операций с тензорными числовыми объектами*, и включая контроль сохранения массы и внутренней энергии, подобно условиям сплошности и сохранения объема в локальном тензоре формы:  $\hat{r}$  [м<sup>3</sup>].

Приведением плотности:  $\hat{\rho}$  – к смешанному тензору – числовому объекту с размерностью инерционной массы, инвариантной величиной в отношении пространственного масштаба в глобальных координатах:

$$\hat{m} = \hat{\rho} \hat{r} = m^j_k \quad [\text{кг}].$$

На сопряженном этапе вычислительного эксперимента потребуется обратное произведение, или разностное дифференцирование для учета инерционных реакций и взаимодействия смежных частиц жидкости – корпускул, в этом случае тензор плотности предварительно обращается<sup>21</sup>:

$$\hat{m} = \hat{\rho} \cdot \hat{r} = m_i^j = 1/m \quad [\text{кг}^{-1}].$$

В идеальной жидкости тензор массы:  $\hat{m}$  [кг] – шаровой, с детерминантом равным массе конкретной частицы жидкости. Это весьма жесткое условие для прямого вычислительного эксперимента, удовлетворяемое одномоментно только для стационарных течений при построении неявных численных схем со сложными граничными условиями.

В конкретный момент времени инвариантные характеристики тензорных числовых объектов связывают воедино физическую модель реологического состояния сплошной среды, определяя свойства сжимаемости с проявлениями вязкостных и упругих деформаций (17), также обобщаемых тензором массы:  $\hat{m}$  [кг] – расчетных частиц жидкости:

$$\hat{f} \cdot \hat{t} = \hat{v} \cdot \hat{m} \quad [\text{Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2, \quad \text{кг} \cdot \text{м}^3/\text{с}] \quad (18)$$

<sup>21</sup> Приведение к дуальному базису означает тензорное дифференцирование, и потому двойной переход редко бывает физически обоснованным. Невырожденный тензорный объект сначала обращается, и затем возвращается к нужному базису.

Как и в случае с тензором конвективных скоростей:  $v = v \cdot r$  [ $c^{-1}$ ] – проведем геометрический перенос тензора внешних поверхностных напряжений из абсолютной системы координат к проекциям на гранях подвижного локального базиса:

$$v = f \cdot m \cdot t \quad [c^{-1}], \quad (19)$$

фиксирующего обретение количества движения:  $v$  [ $c^{-1}$ ] – под действием тензора поверхностных сил:  $f$  [ $кг/c^2$ ] – в произведении с обратной инерционной массой:  $m$  [ $кг^{-1}$ ].

Виртуальная тензорная масса:  $m$  [ $кг$ ] – может строиться специальными алгоритмическими процедурами или функциональными методами моделирования физических явлений и процессов. В частности, в прямых построениях или итерационных согласованиях будут справедливыми векторные аналоги уравнений движения, которые необходимы для аддитивных оценок физических величин в узлах расчетной сетки или в центрах масс подвижных корпускул, где члены произведения также строится динамически в зависимости от состояния окружающих ячеек-частиц:  $\Omega$ :

$$\vec{v} = \sum_{\Omega} (m \cdot \vec{f}) \cdot t. \quad [м/с] \quad (20)$$



## Алгоритмы численного моделирования в континуально-корпускулярных построениях тензорной математики

Прямые вычислительные эксперименты в гидромеханике строятся на многомерных числовых массивах, аппроксимирующих неразрывные физические поля  $\{\vec{R}\}$  [ $м$ ] – поля координат узловых точек, в которых задается векторное поле скорости  $\{\vec{V}\}$  [ $м/с$ ], и синтезируется тензорное поле состояния крупных частиц жидкости  $\{m\}$  [ $кг$ ], сносимое на центры расчетных ячеек, и др. В сеточной области строятся локальные числовые объекты и связанные с ними вычислительные операции, в которых физические параметры течения определяются в абсолютной системе координат:  $r$  [ $м^3$ ] – тензор формы крупной частицы;  $v$  [ $м^3/с$ ] – тензор локальных скоростей деформации базисных осей этой элементарной частицы;  $f$  [ $Н \cdot м^2$ ] – тензор напряжений на ее границах.

Вычислительный эксперимент как последовательность исполнения алгоритмических моделей трансформации физических полей, в случае исходного требования сохранения местоположения узловых точек  $\{\vec{R}\}$  [ $м$ ] – может быть разделен на три этапа:

### 1 этап. Кинематика. ||

Перестраивается обновленное поле узловых точек:

$${}^+ \{ \vec{R} \} = \{ {}^o \vec{R} + \vec{V} \cdot t + m \cdot \vec{f} \cdot t^2 \}. \quad [M] \quad (21)$$

Поле конвективных скоростей образуется алгоритмическим построением тензора:

$$\{ \hat{v} \} = \{ {}_+ \vec{V}_i - {}_o \vec{V}_i \}. \quad [M^3/c] \quad (22)$$

Что позволяет сформировать расчетное состояние поля внутренних свойств на следующем шаге по времени:

$$\begin{aligned} \{ {}^+ m \} &= \{ {}^+ \rho \cdot r \} = \{ \rho \cdot (r + v \cdot t) \}, \quad [кг] \\ \{ {}^+ \rho \} &= \{ \rho \cdot (1 + v \cdot t) \}. \quad [кг/м^3] \end{aligned} \quad (23)$$

Пусть будет определен закон сохранения количества движения на разнесенном по этапам вычислений интервале времени, согласованный с уравнением движения (6) в окружении смежных частиц жидкости:

$$\begin{aligned} {}^+ m \cdot v &= m \cdot (v + \Delta v); \quad [кг \cdot м/с] \\ \Delta v &= ({}^+ m - m) \cdot m \cdot v = v \cdot v \cdot t, \quad [м/с] \end{aligned} \quad (24)$$

сводимых к традиционной векторной записи закона движения Ньютона в разностной форме для системы уравнений Эйлера, справедливых для крупной частицы жидкости на неподвижных узлах расчетной области:

$$\vec{f} = (v \cdot v) \cdot m = (v \cdot v) \cdot \rho \cdot r. \quad [H] \quad (25)$$

Весьма сложное выражение с двойным произведением по разному интерпретируется на континуальном и корпускулярных этапах вычислений, при этом вычислительная модель должна учитывать необходимость согласования внутренних реологических свойств жидкости, непосредственно отражающихся в оценках напряженного состояния каждой точки (25) внутри элементарной ячейки-частицы:

$$\begin{aligned} \{ \hat{f} \} &= \{ {}_+ \vec{f}_i - {}_o \vec{f}_i \}; \\ \text{где: } \hat{f} &= (v \cdot \omega) \cdot \rho \cdot r = (v \cdot \omega) \cdot m. \quad [H \cdot м^2] \end{aligned} \quad (26)$$

Новое выражение включает в себя расширенное представление вязко-упругих напряжений, аналогичных взаимным скоростям деформаций в уравнениях Навье-Стокса. Реология реальной жидкости [13] оформляется в виде законов (12)–(14), связанных с тензором конвективных скоростей:  $v$  [с<sup>-1</sup>], где вычислительные процессы сводятся к согласованию свойств вычислительной и физической моделей жидкости. Тензорное определение расчетных частиц-ячеек включает свойства сжимаемости, вязкости и упругости жидкости, которые в малых интервалах расчетного времени вполне корректно интерпретируются в рамках традиционного тензорного анализа [9] в механике сплошных сред.

## 2 этап. Динамика. ||

Здесь производится сопоставление реологии жидкости с текущим состоянием вычислительной модели.

На этапах вычислительного эксперимента внутреннее поле скорости:  $\hat{\omega}$  [м<sup>3</sup>/с] формализуется с использованием потенциально вырожденных тензоров, что вполне удовлетворяет традиционному аддитивному построению модели течения:  $\hat{r} = \hat{o}r + \hat{v} \cdot t$  [м<sup>3</sup>] – в абсолютном времени:  $t$  [с].

С целью сопоставления логики вычислительных операций с традиционными понятиями механики сплошных сред, допустим справедливость определений для тензора – аффинора в глобальной системе координат, и разложение Коши-Гельмгольца [2] для пространственных смещений: расширение (*дивергенция*); закрутка (*ротор*) и деформация (*сдвиг*).

Выделением диагонального тензора:  $\hat{v}_o$  [м<sup>3</sup>/с] – такого, что след девиаторного остатка  $\text{tr } \hat{v}^*$  будет равен нулю [18], получим тензор шарового сжатия:



$$\hat{v} = \hat{v}_o + \hat{v}^* \quad (\text{tr } \hat{v}^* = 0) \quad [\text{м}^3/\text{с}];$$

$$\hat{\sigma} = \hat{v}_o \cdot \varepsilon \cdot t \quad [\text{кг}/\text{с}^2], \quad (27)$$

где: детерминант тензора:  $\hat{\sigma}$  [кг/с<sup>2</sup> = Н/м] – определяет давление,  $\varepsilon$  [Н/м<sup>2</sup>] – коэффициент объемного сжатия – модуль продольной упругости.

Кососимметричная суперпозиция с компонентами девиаторного тензора:  $\hat{v}^*$  – выделяет начальный импульс к вращению частиц жидкости, с возникновением напряжения:  $f_H$  – в Ньютоновском определении механики вязкой жидкости (13):



$$f_H = \hat{v}_H \cdot \eta / \lambda = (\hat{v}^* - \hat{v}^{*T}) \cdot \eta / (2\lambda). \quad [\text{кг}/\text{с}^2] \quad (28)$$

с матрицей коэффициентов вязкости:  $\eta$  [Н·с/м<sup>3</sup>] – в произведении с тензором скоростей локальных деформаций:  $\hat{v}_H$  [м<sup>3</sup>/с].

Симметризация девиаторного тензора:  $\hat{v}^*$  – связывается со сдвиговыми напряжениями:  $f_G$  [Н/м<sup>2</sup>] – возникающими внутри крупной частицы сплошной среды по закону Гука: (14):



$$f_G = \hat{v}_G \cdot \kappa \cdot t / \lambda = (\hat{v}^* + \hat{v}^{*T}) \cdot \kappa \cdot t / (2\lambda), \quad [\text{кг}/\text{с}^2] \quad (29)$$

с модулем упругости:  $\kappa$  [Н/м<sup>3</sup>] и симметричным тензором относительных локальных смещений в окрестности крупной частицы жидкости:  $\hat{v}_G \cdot t$ .

Реологические характеристики состояния жидкости:  $\varepsilon$  [Н/м<sup>2</sup>],  $\kappa$  [Н/м<sup>3</sup>] и  $\eta$  [Н·с/м<sup>3</sup>] – могут также задаваться скалярными коэффициентами, аналогами шаровых тензоров в традиционных канонических зависимостях между напряжениями, локальными деформациями и вязкостными движениями сплошной среды. В тензорном обобщении неявно представляется анизотропия практического связывания перекрестных компонент для взаимовлияния внутренних напряжений в реологических характеристиках жидкости, представляемых традиционных в скалярных описаниях с помощью безразмерных коэффициентов Пуассона:  $\mu$ .

**Полный тензор внутренних напряжений однозначно связывает геометрические смещения, скорости деформаций и приращения скоростей с поверхностными напряжениями:**

$$\overset{<}{\varphi} = \overset{<}{\sigma} + \overset{<}{f}_T + \overset{<}{f}_H = \left( \overset{\wedge}{v}_o \cdot \overset{\vee}{\varepsilon} + \overset{\wedge}{v}_T \cdot \overset{\vee}{\kappa} / \overset{\wedge}{\lambda} \right) \cdot \overset{\wedge}{t} + \overset{\vee}{v}_H \cdot \overset{\vee}{\eta} / \overset{\wedge}{\lambda} \quad [\text{Н/м}^2]. \quad (30)$$

Для приведения закона движения с инерционной массой:  $\overset{<}{f} \cdot \overset{<}{t} = m \cdot \overset{<}{v}$  [кг/с] – к новым зависимостям для поверхностных напряжений:  $\overset{<}{\varphi}$  [кг/м/с<sup>2</sup>], необходим сомножитель с размерностью пространственного вектора:  $\overset{\wedge}{\lambda}$  [м], который по физическому смыслу соответствует либо вектору направления движения для теоремы Жуковского о свободном вихредиполе, либо расстоянию между взаимодействующими частицами жидкости.

$$\overset{\vee}{\rho} \overset{+}{=} \overset{\vee}{v} \cdot \overset{<}{f} \cdot \overset{<}{t}$$

Рассматриваемые динамические коэффициенты  $\varepsilon$ ,  $\kappa$  и  $\eta$  формально могут отличаться от кинематических тензоров простым скалярным делителем плотности  $\overset{\vee}{\rho}$ . Под действием тензора напряжений:  $\overset{<}{\varphi}$ , частица получает приращение скорости внутреннего (замкнутого) движения:

$$\overset{\Delta}{\overset{\vee}{v}} = \overset{<}{f} \cdot \overset{<}{t} \cdot \frac{1}{\overset{\vee}{\rho}} \quad [\text{с}^{-1}] \quad (31)$$

Если течение установившееся, то за расчетный интервал времени тензор приращения скоростей:  $\overset{\Delta}{\overset{\vee}{v}}$  – должен компенсировать сам тензор конвективных скоростей:

$$\overset{\wedge}{v} \cdot \overset{\vee}{r} + \overset{\vee}{r} \cdot \overset{\Delta}{\overset{\vee}{v}} = 0, \quad [\text{с}^{-1}] \quad (32)$$

а полученное условие неразрывности может считаться точным, поскольку здесь еще не вовлекалось смещение крупных частиц за время  $t$ .

### 3 этап. Статика. ||

На завершающем этапе выполняется интерполяционное перестроение расчетных полей для уточнения возможных смещений центров и поворотов крупных частиц – корпускул за расчетное время  $t$ .

От тензора:  $\overset{\Delta}{v} [M^3 \cdot c^{-1}]$ , определенного строго в локальном базисе, возможен переход к смешанному тензору, где локальные характеристики опираются на абсолютную систему отсчета

$$\overset{\Delta}{v} = \overset{\Delta}{v} \cdot \overset{\wedge}{r}. \quad [c]^{-1} \quad (33)$$

Этот тензор не связан с локальной геометрией базиса:  $\overset{\wedge}{r} [M^3]$  и дуален полю конвективных скоростей.

Переход к исходной сетке возможен при построении новых локальных базисов на неподвижных узлах с использованием смещенных во времени пространственных точек:

$$\overset{\wedge}{r} = \overset{+}{R}_i - \overset{o}{R}_i. \quad [M^3] \quad (34) \quad \boxed{???}$$

Раскрывая выражение (22), использованное при построении тензора локальных скоростей:  $\overset{\wedge}{v} = \overset{+}{V}_i - \overset{o}{V}_i [M^3/c]$ , по скоростям, связанным с новыми базисными векторами:  $\overset{\wedge}{r} [M]$ , получим алгоритм вычисления нового поля скорости:

$$\overset{+}{V} = \overset{\wedge}{V} + \sum_i \overset{\wedge}{r} \cdot \overset{\Delta}{v}_i, \quad (35)$$

который суммирует приращения скорости от окружающих крупных частиц.

Выражения (30) – (34) раскрывают основные алгоритмические построения, позволяющие применять обратный закон Ньютона:  $\overset{\wedge}{W} = \overset{\wedge}{F} / m$ .

Ускорения, полученные в векторной форме для частицы с переменной «массой» (24) и для распределенных массовых сил, также могут быть интерполированы с центров ячеек на исходные узлы расчетной области.

Таким образом формулируются основные математические зависимости, включающие алгоритмические построения тензорных числовых объектов и условно эвристических операций с ними, что требуется для построения *континуально-корпускулярных этапов вычислительного эксперимента*:

1 – на исходной эйлеровой сетке производятся расчеты распределенных характеристик течения с перестроением векторных полей на центры масс смещаемых частиц жидкости;

2 – выявляются деформации и внутренние течения (живые силы) в форме тензорных числовых объектов, учитывающих механику взаимозависимости смежных корпускул жидкости;

3 – интерполяционные согласования критериев существования и сохранения массы и энергии моделируемых состояний сплошной среды и потоков жидкости, перестроение внешних воздействий и граничных условий.

## Вычислительная среда

Свойства тензора напряжений  $\overset{\wedge}{f}$  в процессе вычислений могут рассогласоваться с реологией рассматриваемой жидкости. Для получения итерационного алгоритма согласо-

вания физических и вычислительных параметров течения, тензор  $f$  можно разделить на истинный тензор и девиатор. Это позволит допустимые напряжения включить в динамику течения, а девиаторные отразить от границ сопряжения смежных частиц, тем самым демпфируя дальнейшее развитие их негативной деформации. Аналогично корректируется

тензор конвективных скоростей  $v$ , из которого вычитаются девиационные компоненты. По сути, это обычный механизм свободных и отражающих границ, применяемых только для релаксационного согласования численных решений.

Если начальные условия при запуске процесса решения не соответствуют законам течения жидкости, то величина тензора девиации может быть настолько большой, что произойдет разрушение аппроксимационных критериев. В этом случае можно воспользоваться поправками к реологическим параметрам жидкости, которые методом итераций должны согласовать (или приблизить) физические и вычислительные характеристики течения. Последнее особенно важно для идеализированных жидкостей, численные алгоритмы для которых всегда будут сводиться либо к неявным схемам, либо к итерационным процессам.

Контроль корректности выполняемого решения всегда сводится к контролю допустимости интерполяционных формул. В качестве примера разрушения решения, можно привести случай, когда одна грань частицы, в результате свободного движения в заданном поле скоростей, обгонит свою же противоположную сторону. Этого можно избежать уменьшением расчетного интервала времени. Выражение, показывающее такой предельно допустимый интервал, обычно называют критерием устойчивости решения во времени. Известный критерий Куранта в точности соответствует вышеуказанному определению.

С контролем пространственной аппроксимации дело обстоит существенно сложнее, так как соответствующие критерии связываются не только с начальными условиями, но и с локальными геометрическими характеристиками расчетной области. На отладочных этапах реализации вычислительных экспериментов можно использовать только метод визуального контроля формы расчетных полей, прорисовываемых на графическом экране ЭВМ после каждого такта вычислений.

В соответствии с выражением (23):

$$M = (r + v \cdot t) \cdot \rho,$$

масса частицы фактически является сумматором тензоров локальных скоростей. На первом этапе  $M$  используется для определения внутренних свойств частицы, на третьем - с

помощью сопоставления  $M = M^{-1}$ , но относящихся к смежным ячейкам, согласовываются условия сохранения при взаимодействии смежных частиц жидкости. Как показано выше, вычислительная модель всегда содержит в себе все три основных свойства жидкости: сжимаемость, вязкость, упругость, при этом соотношение интенсивностей указанных напряжений может привести к критическому режиму или изменить режим течения жидкости (имеется в виду образование струй, вихревых слоев и кавитационных разрывов).

$$f = \varepsilon \cdot v_0 \cdot t + \mu \cdot v_H + c \cdot v_{\Gamma} \cdot t = f_0 + f_H + f_{\Gamma}. \quad (14')$$

Тензор напряжений (14) можно представить в качестве характеристического полинома для внутреннего состояния расчетной частицы, в котором реологические параметры жидкости встанут на месте главных инвариантов тензора:

- >
- $v_0 : \mathbf{I} \neq 0$  – сжимаемость;
- >
- $v_H : \mathbf{II} \neq 0$  – поворот;
- >
- $v_{\Gamma} : \mathbf{III} \neq 0$  – чистая деформация, другие инварианты этих тензоров равны нулю.

Если внутреннее состояние частицы рассматривается без учета смещения расчетных узлов, то можно поставить требование компенсации тензора локальных скоростей, за счет приращений скорости вызываемых тензором напряжений:

$$v \cdot t + f \cdot M \cdot t^2 / 2 = 0, \quad (19)$$

из которого, в качестве сумматора напряжений, можно вывести тензорную плотность:

$$+ \rho = \rho + (f_0 + f_H + f_{\Gamma}) \cdot \frac{t^2}{2} \simeq \rho_0 + \rho_H + \rho_{\Gamma}. \quad (20)$$

Рассмотрим два варианта разрушения полного тензора  $+ \rho$  при выполнении одного такта вычислений, когда  $\rho = \det(\rho)$  обращается в ноль.

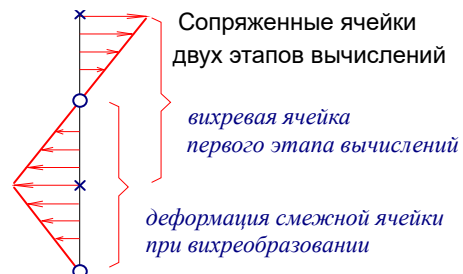
### 1. Кавитационный разрыв плотности:

- >
- $\rho_H$  - не рассматривается;
- >
- $\rho_0 = \det(\rho_0) < 0$  - соответствует полю с разрежением;
- >
- $\rho^* = \det(\rho_0 + \rho_{\Gamma}) = 0$  - тензор плотности обращается в диаду, которая может быть

определена плоскостью, перпендикулярной к главной оси растяжения тензора упругости  $v_{\Gamma}$ . Если жидкость не выдерживает отрицательного давления, то данная плоскость должна быть использована в качестве свободной границы, проходящей через крупную частицу.

### 2. Образование свободной струи или турбулентного вихря.

Пусть система отсчета будет связана с движущейся частицей, которая подвержена сдвиговой деформации.



На завершающем этапе вычислений исходная вихревая частица может обратить в нуль детерминант внутреннего поля сопряженной частицы, где  $\rho_0 > 0$ . В этом случае можно воспользоваться эмпирическим алгоритмом переноса вихря с первого этапа вычислений в тензор «массы» третьего этапа. В этом случае будет снято напряжение со смежной ячейки, а частица в свободном движении будет проявлять особенности, свойственные турбулентному вихрю. Приведенный алгоритм является эмпирической моделью, которую можно использовать за пределами аппроксимационного разрешения расчетной области, для получения точного решения сетка в районе вихря может быть сгущена.

## Из классификации уравнений теории поля

Аддитивное наращивание физических величин происходит по единому скалярному аргументу во времени. В пространственных или геометрических операциях задействуется последовательное произведение, определяющее законы механики в качестве интерполяционных зависимостей между внутренними декартовыми и трансформированными евклидовыми базисами реологических характеристик сплошной среды.

Синтаксис – порядок сомножителей: «*векторы • ( реология • геометрия • производные ) • скаляры*» где реологические и геометрические тензоры всегда существуют, в то время как производные – локальные скорости и напряжения – могут быть вырожденными. Векторные величины задействуются в формальных перестроениях физических и геометрических базисов в законах механики и кинематики неразрывных потоков. Скаляры инвариантны относительно пространственных преобразований, в частности применяются в традиционном дифференцировании/интегрировании уравнений гидромеханики по времени.

1. В вычислительном эксперименте, условно, первый континуальный или кинематический этап будет строиться на исходных узлах сеточной области по заданным массовым инерционным силам и напряжениям на сопряженных гранях вычислительных ячеек. В произведениях с внешними силами и напряжениями участвуют тензорные модели реологического состояния моделируемой жидкости, в том числе включающие предысторию гидродинамических процессов для релаксационного согласования по схеме «прогноза и коррекции» в уравнениях движения. Результатом вычислений является обновленное пространство приращений интенсивности потоков сплошной среды, в котором фиксируются как собственно смещение центров масс частиц жидкости – числовых ячеек, так и их текущие конвективные скорости с деформациями тензорных осей в сопряженных узлах расчетной области.

Векторы чистого движения:  ${}^+ \vec{V} = {}^o \vec{V} + m \cdot \overset{<}{f} \cdot t$  [м/с] и конвективных скоростей в тензорной форме:  $v = m \cdot \overset{<}{f} \cdot t = \rho \cdot r \cdot \overset{<}{f} \cdot t$  [с<sup>-1</sup>] – востребуются в анализе аппроксимационных критериев, с последующим синтезом геометрии обновлённых пространственных потоков. Законы гидромеханики, соответственно, записываются для векторов массы-инерции и анизотропной трансформации сплошной среды с привязкой к центрам масс и сопряженных базисов числовых ячеек – активных поляризованных корпускул.

Обобщенные законы механики действуют в отношении гладких пространственных функций: векторов количества движения в привязке к центрам масс крупных частиц жидкости:  $\vec{v} \cdot \vec{m} = \vec{f} \cdot t$  [кг·м/с]; и тензоров интенсивности внутренних потоков в тензорной форме:  $\rho \cdot \vec{v} = r \cdot \vec{f} \cdot t$  [кг/с] – «живых сил» внутри деформируемых числовых ячеек, корректно связывающих инерционные процессы, в том числе в условиях зарождения сильных градиентов и разрывов сплошной материальной среды.

2. На втором корпускулярном этапе рассматривается механика взаимодействия виртуальных числовых объектов, обладающих конкретными физическими – реологическими свойствами сплошной среды в тензорном представлении, где по необходимости задействуются кинематические смещения центров масс и локальные деформации крупных частиц жидкости.

Для согласования законов гидромеханики и реологии внутреннего состояния частиц сплошной среды на корпускулярном этапе складываются кинематические смещения для построения базисов подвижных и деформированных частиц жидкости, образуя алгоритмическую последовательность:

*{ новые синтезированные базисы → локальные и конвективные скорости → напряжения }.*

На корпускулярном этапе расчетные узлы смещены к центрам виртуальных числовых ячеек, что востребует алгоритмические методы для быстрой выборки значений в сопряженных интерполяционных пространствах  $\{ {}^o\hat{r} = {}^o\vec{R}_i - {}^o\vec{R}_i \}$  [м<sup>3</sup>], где новые координаты центров масс повторно строятся с помощью разностей  $\{ {}^+\hat{r} = {}^+\vec{R}_i - {}^o\vec{R}_i \}$  [м<sup>3</sup>].

В случае малых деформаций, свойственных моделям теории упругости, тензор локальных смещений образуется суммированием по всему временному периоду. В гидромеханике локальные скорости и смещения:  $\{ \hat{v} \cdot t = {}^+\hat{r} - {}^o\hat{r} \}$  [м<sup>3</sup>] дополняются приращениями скоростей (ускорений) за расчетный интервал времени  $t$  [с], синтезируемыми по обновленным скоростям числовых ячеек:  $\{ {}^+\hat{\omega} = {}^+\vec{V}_i - {}^o\vec{R}_i \}$  [м<sup>3</sup>/с], либо выбираются из первого этапа в случае малых деформаций:  $\hat{\omega} = \omega^i = {}^+\vec{V}_i - {}^o\vec{V}_i$  [м<sup>3</sup>/с].

В случае малых деформаций, свойственных моделям теории упругости, тензор локальных смещений образуется суммированием по всему временному периоду. В гидромеханике локальные скорости и смещения:  $\{ \hat{v} \cdot t = {}^+\hat{r} - {}^o\hat{r} \}$  [м<sup>3</sup>] дополняются приращениями скоростей (ускорений) за расчетный интервал времени  $t$  [с], синтезируемыми по обновленным скоростям числовых ячеек:  $\{ {}^+\hat{\omega} = {}^+\vec{V}_i - {}^o\vec{V}_i \}$  [м<sup>3</sup>/с], либо выбираются из первого этапа в случае малых деформаций:  $\hat{\omega} = \omega^i = {}^+\vec{V}_i - {}^o\vec{V}_i$  [м<sup>3</sup>/с].

В соизмеримых масштабах проявляется реология сплошной среды, формализуемая простыми выражениями:  $\{ \overset{+}{m} = \overset{o}{m} + f(\overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{v}) \cdot t \}$  [кг], где:  $m$ [кг] – инерционная масса<sup>22</sup> частицы жидкости;  $f(\overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{v})$  [кг/с] – собственно закон механики<sup>23</sup>, как тензорная функция произведения внутреннего состояния – плотности частицы жидкости:  $\overset{\vee}{\rho}$  [кг/м<sup>3</sup>] под воздействием тензора локальных скоростей:  $\overset{\wedge}{v}$  [м<sup>3</sup>/с].

В пространстве тривекторов локальных скоростей: с уточнением деформационных смещений относительно подвижных корпускул:  $\overset{\wedge}{\varepsilon} \approx \overset{\wedge}{v} \cdot t$  [м<sup>3</sup>] – определяется тензор напряжений:  $\overset{<}{\sigma} = (\overset{\wedge}{\varepsilon} \cdot \overset{\wedge}{\kappa} + \overset{\wedge}{\omega} \cdot \overset{\wedge}{\eta}) \times \overset{\vee}{\lambda}$  [кг·м<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>], где:  $\overset{\wedge}{\kappa}$  [Н/м<sup>3</sup>] – модуль упругой деформации;  $\overset{\wedge}{\eta}$  [Н·с/м<sup>3</sup>] – тензор скоростной вязкости;  $\overset{\vee}{\lambda}$  [м] – масштабный коэффициент, характеризующий дистанцию между взаимодействующими частицами жидкости.

Тензоры напряжений  $\overset{<}{\sigma}$  [Н·м], локальных скоростей  $\overset{\wedge}{\omega}$  [м<sup>3</sup>/с] и деформаций  $\overset{\wedge}{\varepsilon}$  [м<sup>3</sup>] могут быть нулевыми или вырожденными, что исключает вычисление обратных матриц, и смена базисов выполняется только в операциях произведения с тензорами формы:  $\overset{\wedge}{v} \cdot \overset{<}{r} = \overset{<}{v}$  [с<sup>-1</sup>] – без влияния на отсчет времени в знаменателе.

## Заключение

При шивке континуально-корпускулярных этапов, в качестве оптимального может стать метод итерационного согласования кинематических и реологических характеристик физического поля в явных численных схемах, сводимых к режиму последовательного установления нестационарных вычислительных процессов, проистекающих по математическим моделям для *вязких, упругих и сжимаемых жидкостей*.

В прикладных задачах во внутренние потоки подвижных частиц может вовлекаться скалярное распределение температур, растекающееся между свободными частицами по отрицательным градиентам; или связанное скоростью звука изменение плотности упругого газа в функции от дивергенции скорости и градиента давления, в том числе с эмпирическими уточнениями по закону Бернулли или совмещением с внутренней тепловой энергией, что синтезирует расширенное решение прикладной задачи аэрогидромеханики.

$$\overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{<}{v} = \overset{<}{r} \cdot \overset{\vee}{f} \cdot t \quad [\text{кг}/\text{м}^3/\text{с}]$$

массовых сил  $\overset{\rightarrow}{f} = \overset{\rightarrow}{w} \cdot \overset{\rightarrow}{m} = \overset{\rightarrow}{w} \cdot \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{r}$  [Н, кг·м/с<sup>2</sup>], где компенсирующее ускорение фиксирует видимое приращение скоростей:  $\overset{\rightarrow}{w} = (\overset{+}{\rightarrow}{v} - \overset{o}{\rightarrow}{v}) / t$  [м/с] в абсолютной системе от-

<sup>22</sup> Невырожденные тензоры формы  $\overset{\wedge}{r}$  [м<sup>3</sup>] и массы  $\overset{\wedge}{m}$  [кг] могут содержать предвычисленную обратную матрицу внутри компьютерного числового объекта.

<sup>23</sup> Аддитивный закон механики может оперировать вырожденным тензором локальной скорости  $\overset{\wedge}{v}$  [м<sup>3</sup>/с].

счета, зависящее как от смещения центра масс расчетной частицы жидкости  $\vec{v}^+$ , так и от ее деформации  $\hat{r}^+$ .

После перестроения геометрии потоков с переопределением массовых сил и поверхностных напряжений, новый цикл повторяет обновление кинематических параметров по предыстории смещений и деформаций активных поляризованных корпускул – числовых ячеек в смежных узлах исходной сеточной области.

Упругость – сила  $\rightarrow$  смещение – сжатие ячейки

Вязкость – сила  $\rightarrow$  излучение – скорость диффузии

Инерция – сила  $\rightarrow$  сдвиг потока – ускорение корпускул

## 4. Диполи, вихреисточники (поляризованные корпускулы)

В ожидаемых результатах:

1. Window-Place – интерактивная контекстная графика в среде OpenGL, позволяющая в каждом окне создавать графические фрагменты со стековыми наложениями, с виртуально связанными процедурами визуализации и управления вычислительными процессами. ...

2. Пакет процедур «Tensor» для трехмерных векторных и объёмных гео-метрических преобразований и построения пространственных вычислительных моделей. ...

3. Графическая среда, обеспечивающая динамическую визуализацию ре-зультатов в трехмерном пространстве независимо от параллельно исполняющегося вычислительного эксперимента, для чего задействуются интервальные тайме-ры для активации графических окон, и один общий таймер для регулируемой приостановки расчетов с поддержанием активности периферийных устройств компьютера.

4. Вычислительные модели плоских и пространственных диполей для интегрирования пространственных возмущающих воздействий, и вихреисточников для фиксации границ и поверхностей разрыва потоков, обтекающих твердое тело в его равномерном и однонаправленном поступательном движении в жидкости. Оценка корректности решения той же задачи для ускоренных, вращательных движений тела, и – обтекание тела в завихрённом внешнем потоке...

+++ собственно наблюдения и адекватные выводы по взаимодействию групп активных корпускул в их свободном (взаимозависимом) движении ...

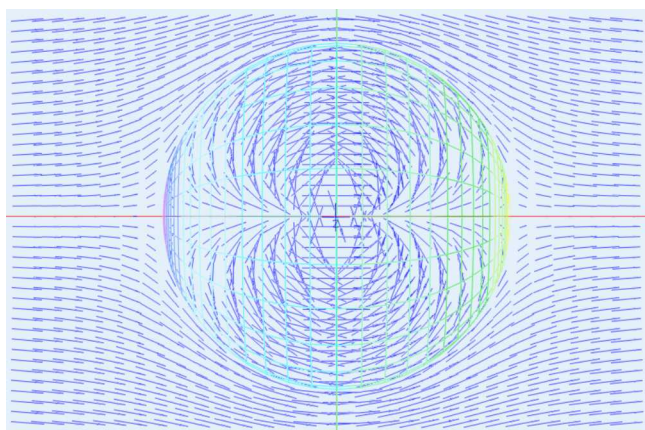
### Двумерное поле и трехмерное пространство внутри и вокруг диполя

Формула Николая Егоровича Жуковского (5 [17] января 1847, Орехово-Владимирской обл. – 17 марта 1921, Москва):

$$f(z) = \vec{V}_\infty \cdot z + \frac{\vec{M}}{z} \quad -$$

комплексный потенциал – функция градиента скорости,  $V_\infty$  – скорость окружающего потока,  $M$  – дипольный момент движущегося объема поляризованной корпускулы. Функция обращается в ноль в критических точках обтекаемой окружности, что доопределяет величину дипольного момента во взаимосвязи со скоростью набегающего потока:

$$\vec{V}_\infty = \frac{\vec{M}}{z_0^2}$$



**Рис. 6.** Результирующие векторы поля скоростей по срезу трехмерного пространства в вертикальной плоскости:  $\{X, Y\}$ , при  $Z=0$  для полных и вызванных скоростей течений под влиянием точечного дипольного момента.

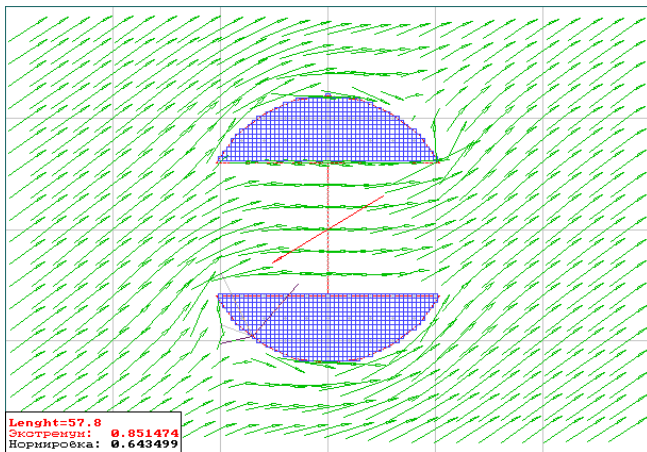
и, как следствие, поле скорости течения под влиянием плоского диполя обретает строго формализованную зависимость:

$$\vec{V}(z) = \vec{V}_\infty - \frac{\vec{M}}{z^2},$$

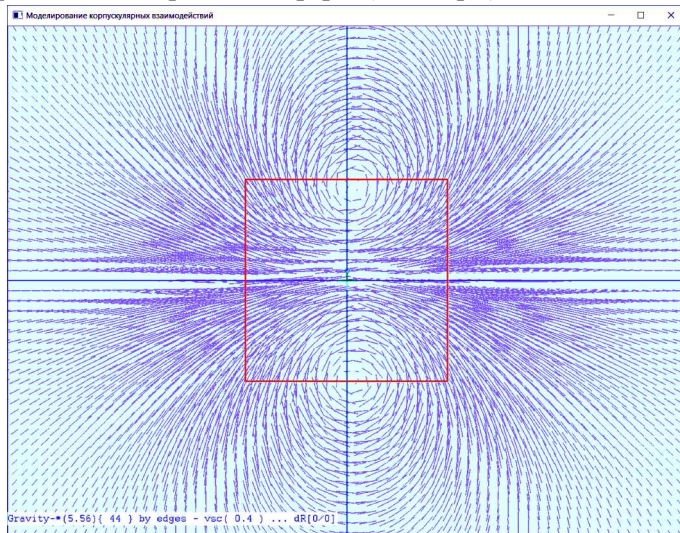
где величина  $z^2$  в комплексной плоскости задает направление и доопределяет оценку величины вызванной диполем скорости течения.

Сингулярность величины скорости для внутридипольных течений не подтверждается экспериментальными исследованиями замкнутых течений внутри сферы (вихревого кольца), где по измерениям и визуальным наблюдениям адекватная картина линий получается при асимптотическом сведении к нулю градиента скорости на

оси диполя путём сращивания с простейшей параболической функцией (рис. 9), ограничивающей величину вызванной скорости в центре диполя двукратным превышением по отношению к скорости на поверхности сферы (цилиндра).



**Рис. 7.** Пример численного моделирования плоской задачи об обтекании косым потоком двух тел произвольной формы, где величины и скорости течений в произвольных точках окружающего пространства вычисляются простым интегрированием воздействия объемных диполей и поверхностных вихреисточников.



**Рис. 8.** Поле вызванных скоростей для сорока четырех «хаотично» разбросанных точечных поляризованных корпускул (рис. 6) внутри квадратного контура, – с наглядным перестроением множества точечных диполей к единому/объединенному тороидальному вихрю с объединенным центром вращения вблизи боковых границ.

Моделирование обтекания произвольного тела идеальной жидкостью в однородном поступательном потоке, таким образом, сводится интегрированию по объему образующих его диполей, с последующим уточнением расчетов по распределенным на поверхности тела вихреисточникам, в целом компенсирующим частичный разрыв объема диполя

на поверхности тела. Вычислительная модель справедлива, в том числе, для суперпозиции из нескольких тел, обтекаемых идеальной жидкостью одновременно.

Важной особенностью трехмерного моделирования свободно движущихся диполей и связанных на поверхностях разрывов вихреисточников является разделение по степеням угасания вызванной скорости при увеличении дистанции между корпускулами  $r$ :  $v=f(r^{-3})$  – для объемных диполей;  $v=f(r^{-2})$  – для вихревых линий;  $v=f(r^{-1})$  – для источников и вихрей, распределенных по поверхностям разрывных течений или элементарным площадкам твердых тел, которые при пересчете на силы притяжения, возникающие при увеличении давления за счет снижения вызванной скорости с расстоянием, создают идентичную зависимость от квадрата расстояния до обособленного движущегося тела.

### Асимптотические аппроксимации дальнего и ближнего взаимодействия

В случае двумерных полей скоростей течения, или в случае рассмотрения сил притяжения в трехмерном пространстве, справедливо допущение об угасании взаимодействия поляризованных корпускул с увеличением расстояния от дипольной сферы в квадратичной зависимости:  $f(x) \sim x^{-2}$ .

```
Real one_2 ( Real r ) { return r<1 ? 2-r*r : 1.0/(r*r); } // 2^2
```

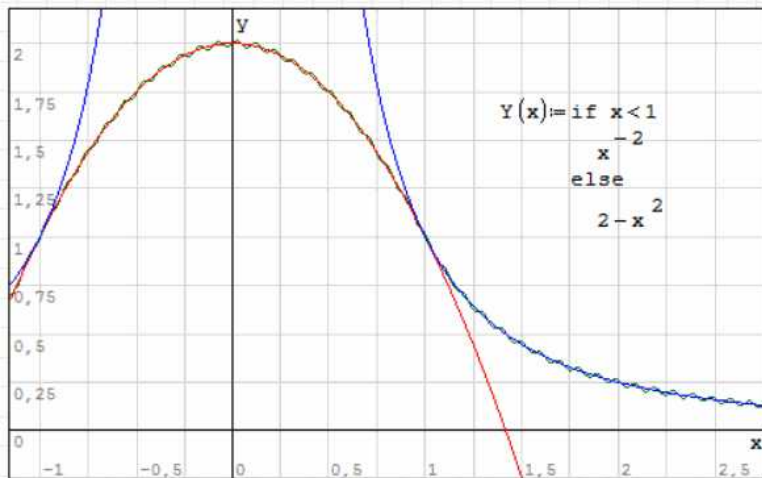


Рис. 9. Функция величины скорости в двумерном физическом поле или величин сил притяжения в трехмерном пространстве: если  $x > 1,0$  то  $f(x) = x^{-2}$ , иначе  $g(x) = 2,0 - x^2$ , с выровненным потоком в центре диполя.

Без особой необходимости не будет вводиться в рассмотрение математическая модель с сингулярностью по скорости в центре диполя. Ограничиваемся касательным соприкосновением квадратичных функций с получением лишь удвоенной скорости, образующей постоянный поток в ближайшей окрестности к центру дипольной сферы:  $g(x) = (2 - x^2)$ .

Сращивание гладких функций происходит в точке  $y(1) = 1$ , где значения производных для обеих функций получится как:

$$f'(x) = -2 \cdot x^{-3};$$

$$g'(x) = -2 \cdot x,$$

что выравнивает величины производных в точке сопряжения на предустановленных расчетных значениях:  $f'(x) = g'(x) = -2,0$ , при максимальной скорости выровненного потока в окрестностях центра диполя:  $g(0) = 2,0$ , с нулевым градиентом потокового фронта:  $g'(0) = 0,0$ .

В трехмерном пространстве скорости наведенных течений угасают с увеличением расстояния от объемного диполя в кубической зависимости:  $f(x) \sim x^{-2}$ . Гладкое сращивание скоростей течений на поверхности объемной сферы также выполняется с использованием кубической зависимости, с выравниваем потока в центре диполя до второй пространственной производной:  $g(x) = (2 - x^3)$ .

Сращивание гладких функций происходит в точке  $y(1) = 1$ , где значения производных для обеих функций:  $f'(x) = -3 \cdot x^{-4}$ ;  $g'(x) = -3 \cdot x^2$ , что выравнивает величины производных в точке сопряжения на предустановленных расчетных значениях:  $f'(x=1) = g'(x=1) = -3,0$ , при максимальной скорости выровненного потока в центре диполя:  $g(0) = 2,0$  с нулевым градиентом:  $g'(0) = 0,0$ .

```
Real one_3 ( Real r ) { return r<1 ? 2-r*r*r : 1.0/(r*r*r); } // 3^3
```

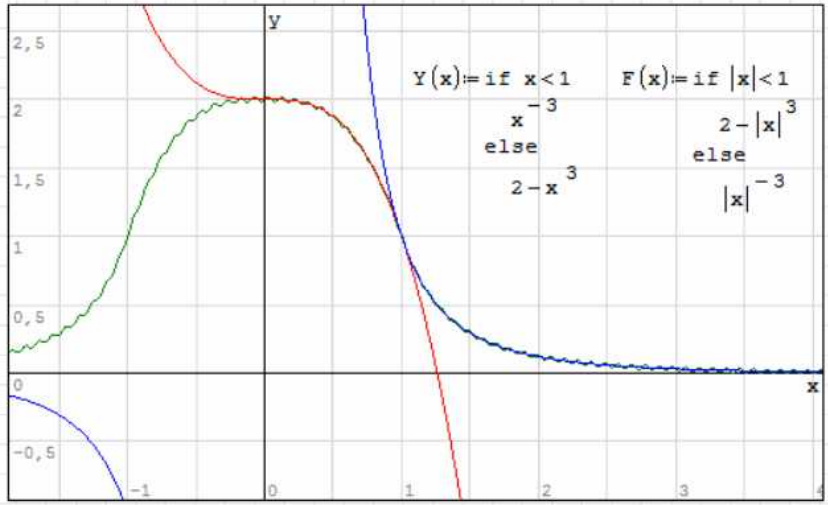


Рис. 10. Функция величины наведенной скорости в трехмерном пространстве: если  $x > 1,0$  то  $f(x) = x^{-3}$ , иначе  $g(x) = 2,0 - x^3$ , с выровненным до нулевой кривизны фронта потока в центре диполя со скоростью:  $g(0) = 2,0$ .

### Вариант полного торможения потока в точке в центре диполя

Срачиваемое построение с квадратичным затухающим на дальних радиусах:

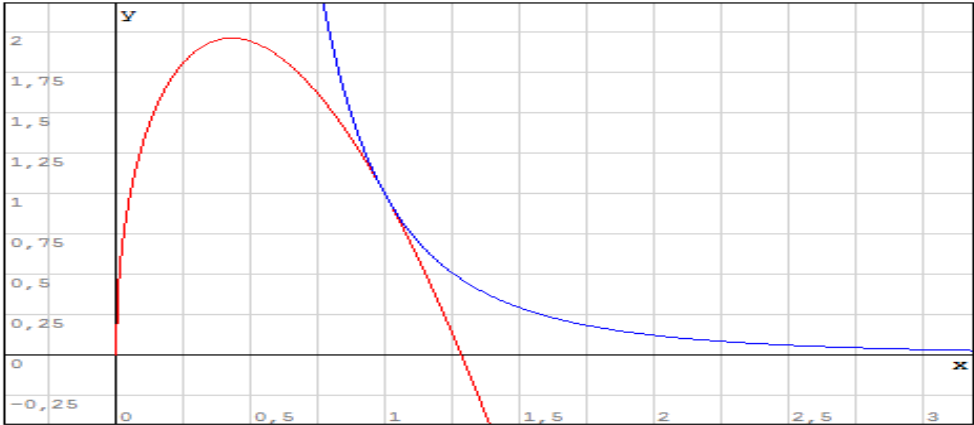
$$f(x) = x^{-2},$$

с полным гашением потока в центре диполя:

$$g(x) = (3,5 - 2,5 \cdot x) \cdot x^{0,5}.$$

Максимум внутреннего потока

$$g(0,475) = 1,594.$$



```
inline Real one_2(Real r) { return r<1?sqrt(r)*(3.5-2.5*r):1.0/(r*r); }
```

Кубическое угасание на дальних радиусах:

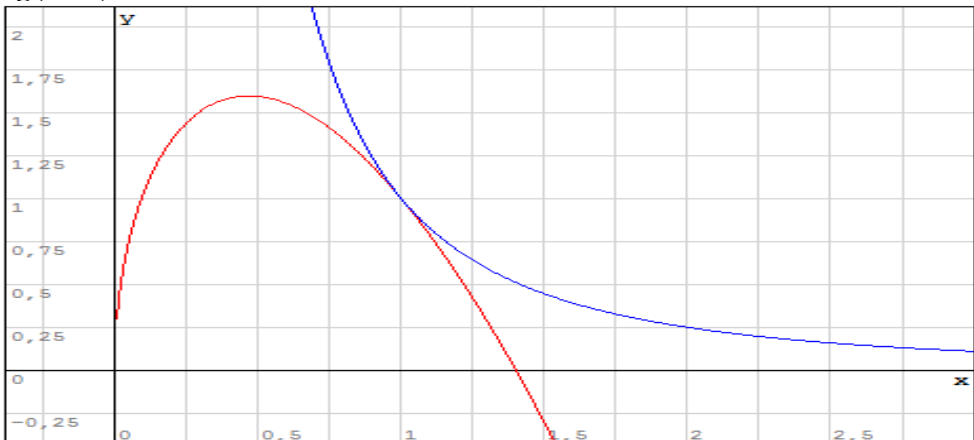
$$f(x) = x^{-3}$$

с аналогичным квадратичным сбросом потока в центре диполя:

$$g(x) = (4,5 - 3,5 \cdot x) \cdot x^{0,5}.$$

Максимум внутреннего потока приходится на:

$$g(0,43) = 1,964.$$



```
inline Real one_3(Real r) { return r<1?sqrt(r)*(4.5-3.5*r):1.0/(r*r*r); }
```

## Аналитическая теория (двух/трехмерные модели)

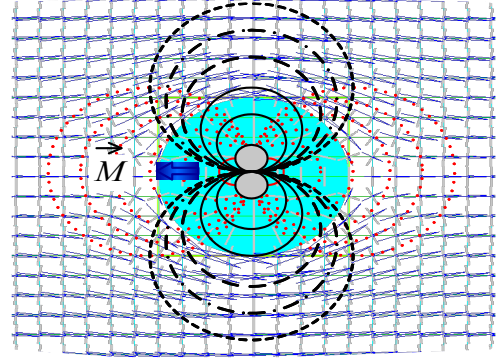
Моделирование потока вблизи цилиндра выполняется путем простого вычисления градиента от комплексного потенциала – функции скорости<sup>24</sup>:

$$\vec{v}(\vec{r}) = v_\infty - \frac{M}{2 \cdot \pi \cdot \vec{r}^2}$$

где:  $M = 2 \pi \cdot r_0^2 \cdot v_\infty = v_\infty \cdot 2 S$ ,

векторное поле скорости строится в чисто геометрических определениях:

$$\vec{v}(\vec{r}) = v_\infty \cdot \left( 1 - \frac{r_0^2}{\vec{r}^2} \right)$$



Заметим здесь, что в комплексной плоскости функция  $\vec{r}^2$  означает квадрат модуля  $|r|^2$  с удвоением аргумента – угла ориентации относительно реальной оси  $x$  из  $\vec{r} = x + iy$ .

Операция деления формализуется симметричным поворотом вектора относительно реальной оси, делённым на квадрат модуля – длины вектора  $\vec{r}^{-1} = \bar{\vec{r}}/|r|^2$

По аналогии с отображениями в комплексной плоскости, трехмерные потоки в аналогичном варианте рассматриваются в сферических координатах, для чего вводится замена потоков через плоские контуры – телесными сегментами.

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{r} \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{Q}{2\pi} \ln z - \text{потенциал источника.}$$

3-D аналога для потенциала вихря не существует.

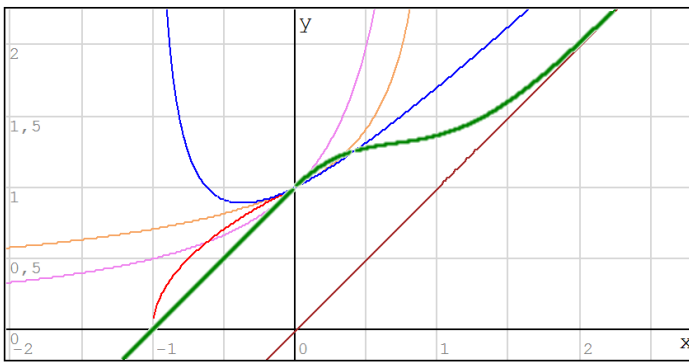
$$\varphi = -\frac{\vec{M}}{4\pi} \cdot \langle \vec{r}^{-2} \rangle \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z} - \text{потенциал диполя} + \text{векторная функция тока.}$$

$$M = 2 \pi \cdot r_0^3 \cdot v_\infty = 1.5 \cdot \Omega \cdot v_\infty \quad \Leftrightarrow \quad M = 2 \cdot \pi \cdot r_0^2 \cdot v_\infty = 2 \cdot S \cdot v_\infty \quad \text{[2D ???]}$$

В таком определении момента диполя используется весь объём жидкости, вовлекаемый в движение сферы/цилиндра вместе с присоединенными массами, при этом дипольный момент будет в точности соответствовать скорости свободного движения в произведении с объемом частицы и коэффициентом присоединенных масс для шарика или цилиндра в 2D.

Что в векторной форме записывается относительно вектора – радиуса дипольного момента:  $M = r_0$  и  $V=r$ :

<sup>24</sup>На практике к подобным аналитическим формулам необходимо относиться как к прямым построениям математических моделей с допущениями о гармоничности (=о существовании потенциала) во взаимодействии различных поляризованных (или ионизированных) частиц, что лишь означает действие сил по прямым геодезическим – кратчайшим пространственным дистанциям.



$$\begin{cases}
 x+(x+1)^{-0,5} \\
 \text{if } x < 0 \quad \sqrt{1+x} \quad \text{else } x+(1+x)^{-0,5} \\
 \text{if } x < 0 \quad 1+x \quad \text{else } \exp\{-x^2\}+x \\
 (1-x)^{-1} \\
 (1-x)^{-0,5} \\
 x
 \end{cases}$$

**Рис. 11.** Жирной зеленой линией показано линейное смещение экваториального шага линий тока внутри диполя, с быстрым угасанием по функции Гауссова источника вне дипольной сферы. Вариант медленного квадратичного угасания вне диполя отмечен синей линией, при соответствующем сращивании с красным квадратным радикалом, отличающимся быстрым отдалением линий тока от центра диполя. Для обоих вариантов показаны ниспадающие обратные функции для сингулярного:  $r \in [-\infty..0]$  – случая построения внутренних потоков эфира под дипольной сферой.

```

//
//  функции скалярного и векторного воздействий для одиночного диполя
//
inline Real one_2( Real r ){ return r<1 ? 2-r*r : 1.0/(r*r); } // 2^2
inline Real one_3( Real r ){ return r<1 ? 2-r*r*r : 1.0/(r*r*r); } // 3^3
inline Vector dipole( _Vector M, // дипольный радиус первого критического узла
                    _Vector V ) // вектор из удаленной точки к центру частицы
{ Real W=norm(V);
  return ( 0.5*( V*(M*V) ) - V*(M%V) )*one_3( sqrt( W/norm(M) ) )/W;
}
inline Vector dipole_flow( _Vector M, _Vector V )
{ Real W,R=one_3( sqrt( (W=norm(V))/norm(M) ) );
  return ( V*( 1.0-R )*( M%V ) + V*( 1.0+0.5*R )*( M*V ) ) / W;
}
dipole(r_0, r): v^d = [ r x ( r_0 x r ) / 2 - r x ( r_0 . r ) ] . f ( r_0 / r )^3 / |r|^2 – вызванные скорости;
dipole_flow(r_0, r):
v = [ [ 1 - f ( r_0 / r )^3 ] . r x ( r_0 . r ) + [ 1 + f ( r_0 / r )^3 / 2 ] . r x ( r_0 x r ) ] / |r|^2 – полный вектор.
Для интегрирования линии тока25 начальная точка задается в нормальной плоскости
к ориентации диполя: r += ( r < 0 ? 1 : exp( -r*r ) ), при r ∈ [ -1..∞ ].

```

<sup>25</sup>Траектория – путь пройденный частицей за определенный промежуток времени. Линия тока – мгновенная векторная линия с касательными по направлению скорости. В установившемся движении линия тока совпадает с траекторией частицы жидкости.

## Поляризованные корпускулы под действием взаимного притяжения

Варианты движения упругих шариков «solid» и активных корпускул «edge», находящихся под действием полного комплекса сил взаимодействия между частицами, гравитации и реакций окружающей среды в гидромеханике.

В варианте внутриядерного взаимодействия используется гладкая функция с нейтральной точкой на единичном

$$\vec{V} - = \vec{r} \cdot (|r|^{-5} - |r|^{-3}) \cdot \delta t,$$

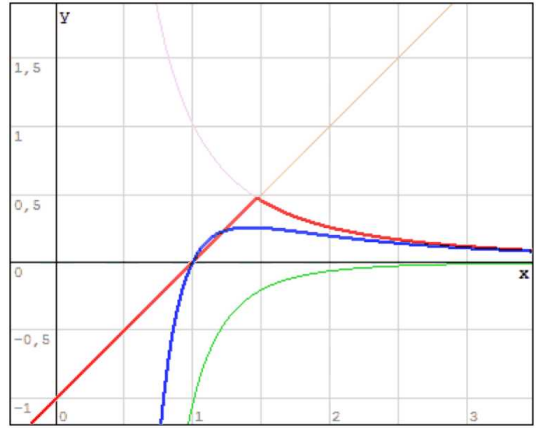
где вместо привычных коэффициентов используются степени для дальнего влияния с притяжением частиц по квадрату расстояния между ними, и условно четвертой степени для ближнего – сильного внутриядерного взаимодействия.

Во втором варианте рассматривается взаимодействие цельных упругих шариков с тем же квадратичным законом притяжения, который прекращает свое действие на дискретном расстоянии от взаимодействующих тел и заменяется обратной линейной функцией силового взаимодействия, которая также имеет точку нулевой компенсации на единичном радиусе:

$$\begin{aligned} \vec{V} + &= \vec{r} \cdot \delta t \cdot |r|^{-3}; \\ \vec{V} - &= \vec{r} \cdot \delta t \cdot \frac{1 - |r|}{|r|}. \end{aligned}$$

Точка сопряжения вычисляется вещественным корнем при сопоставлении этих уравнений движения, сводимых к полиному третьей степени:  $r^3 - r^2 - 1 = 0$ , что численно разрешается как:

$$\begin{aligned} r_0 &= 1,4655712319, \\ r_{(2,3)} &= \{-0,232786 + i0,792552; -0,232786 - i0,792552\} \end{aligned}$$



**Рис. 12.** Пусть компенсация слабых сил притяжения и интенсивного отталкивания происходит строго на единичном отсчете дистанции между корпускулами, вне зависимости от показателей степени взаимного действия.

## Моделирование в кинематике, динамике и механике движения ...

Гидромеханическая модель строится на явной взаимосвязи и практической обоснованности всех законов взаимодействия, кинематических процессов и физических явлений в однородной неразрывной среде. Важным феноменологическим объектом гидромеханики представляется описание независимой частицы, которая захватывает и сохраняет внутри себя часть вещества – тем самым уподобляясь некой свободной частице или особо поляризованной корпускуле.

Базовым элементарным кинематическим объектом выступает математическое описание пространственных диполей, двояко образуемых либо предельным сближением стока с источником, либо схлопыванием вихревого кольца – условного геометрического объекта второго порядка. Формирование макрообъектов из множества таких диполей, соответственно, будет укладываться внутри поверхности разрыва для встречного потока с помощью источников, и для касательной составляющей течения с помощью вихревого сдвига.

Многообразие форм и динамика процессов гидромеханической модели обуславливается ключевыми свойствами такого элементарного диполя, а именно: фиксированной скоростью его движения относительно окружающей сплошной среды; а также ничем не ограничиваемым временем существования в условиях идеальной или невязкой жидкости. Участвующая в свободном движении частица – диполь может состоять из той же жидкости, что и окружающая среда, либо обладать какой-либо иной внутренней плотностью и вязко-упругостью из времени зарождения поляризованной и крайне активной корпускулы. В настоящем исследовании такие внутренне-исторические свойства полагаются независимыми или особо не влияющими на динамику внешних проявлений при активном взаимодействии множества одинаковых частиц.

В построении вычислительных экспериментов пространственная частица-диполь моделируется с помощью алгоритмической функции дипольного момента, величина которого равна полному количеству движения внутренней и присоединенной массы жидкости. Длительное время жизни одиночного диполя обуславливается свойствами идеальной жидкости, что позволит локальные внутридипольные течения оценивать подобно инерционной массе твердой частицы, с дополнением из приведённой в движение присоединенной массы окружающей жидкости.

В динамике независимого позиционирования (без внутренних перестроений) дипольных частиц будет отвечать инерционная масса, а за изменение ориентации соответствующие моменты инерции по трём пространственным осям.

По определению, дипольный момент фиксирует количество независимого движения во вне и внутри *элементарного подвижного гидромеханического объекта*:

$$\vec{M} = 2\pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot v_{\infty} = \rho \cdot 1,5 \cdot \Omega \cdot \vec{v}_{\infty} \text{ [кг}\cdot\text{м/с]}$$

Собственно величина дипольного момента будет считаться постоянной и одинаковой для всех поляризованных частиц, то есть сохранение количества движения будет характеристикой сохранения внутренней энергии одиночного диполя.

??? Можно полагать, что изменчивость внешнего или наведённого потока будет влиять на приращение собственной скорости или инерционное ускорение такой независимой частицы лишь в случае различия плотности захваченной диполем жидкости с плотностью среды окружающего потока. При одинаковой плотности диполь становится плотью окружающей среды, вовлеченной в стационарную кинематику внутри локального базиса, то есть существующим независимо от деформационной механики совокупного потока жидкости.

Тем не менее, для получения такого локально стационарного режима движения частиц-диполей, которое практически невозможно предугадать в начальных условиях вычислительного эксперимента, рассмотрим варианты условно свободного движения частиц под внешним воздействием:

1 – *кинематический*. Нормированный (единичный) и безинерционный диполь ориентируется строго навстречу потоку вызванных скоростей от всего роя окружающих диполей, а разность скоростей используется для получения смещения частиц и маршрута их движения во времени.

2 – *динамический*. Здесь полагается, что тот же нормированный диполь обладает инерционной массой, равной действующему дипольному моменту. Тогда вектор разности дипольного момента и набегающей скорости будет определять не полный вектор скорости, а некоторое ускорение – малое приращение скорости, действующее на частицу с учетом её инерционной массы. В этом случае возникает инерционное рассогласование, как по величине поступательной скорости, так и по направлению и ориентации диполя, с должным учетом вращательного момента инерции для исходной массы частицы в форме шарика.

3 – *механический*. ... полный вариант ...

Объём шара:  $\Omega = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3$  (+0,5 – *учитывается присоединенная масса*), площадь его поверхности:  $S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ .

На поверхности сферы:  $v_r = 0$ ;  $v_\theta = 1,5 \cdot v \cdot \sin \theta$ .

Коэффициент давления на сфере:  $p = 1 - (v/v_\theta)^2 = 1 - 2,25 \cdot \sin^2 \theta$ .

Кинетическая энергия потока жидкости в окрестности сферы:

$$+K_e = \frac{\rho \cdot v_\infty^2}{2} \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot r_0^3 = \frac{\rho \cdot v_\infty^2}{2} \cdot \frac{\Omega}{2}$$

определяет присоединенную массу в половину её объема. Для плоского диска:  $\lambda_{11} = 8/3 \cdot \rho \cdot r^3$ , что на 27,3% больше, чем у сферы:  $\lambda_{11} = 2/3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot r^3$  с таким же радиусом. Инерционные реакции при поперечном вращении диска:  $\lambda_{66} = 16/45 \cdot \rho \cdot r^5$ .

Поворот по любой оси диполя связан с моментом инерции шара:

$$I = 2/5 \cdot m \cdot \pi \cdot r^2 = 8/15 \cdot \pi \cdot r^5 = \pi \cdot D^5 / 60, \text{ где: } m - \text{масса; } r - \text{радиус; } D - \text{диаметр.}$$

То же для сферы (присоединенной массы):

$$I = 2/3 \cdot m \cdot \pi \cdot r^2 \approx 4/9 \cdot \pi \cdot r^5 \approx \pi \cdot D^5 / 72.$$

«»

## Динамика корпускулы под действием массовых сил и поверхностных напряжений

Первым явным преимуществом вычислительных методов является возможность использования сложных вычислительных объектов, определяя законы механики в вектор-

ной и тензорной формах. Рассмотрим простейшую задачу о движении материальной точки, так как даже в ней просматриваются новизна подходов вычислительной математики.

Второй закон Ньютона:

$$m \overset{\rightarrow}{w}(t) = \overset{\rightarrow}{F}(\overset{\rightarrow}{r}, \overset{\rightarrow}{v}, t)$$

где  $w, v, r$  и  $t$  – соответственно ускорение, скорость, пространственное местоположение и время,  $m$  – масса тела,  $\overset{\rightarrow}{F}$  – равнодействующая всех массовых и поверхностных сил, оказывающих воздействие на движущееся тело.

Рассматривая движение тела под действием массовых сил, – сил гравитации, – можно определить основной метод вычислительной математики – метод разделения по физическим процессам.

Полное уравнение движение определяется в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

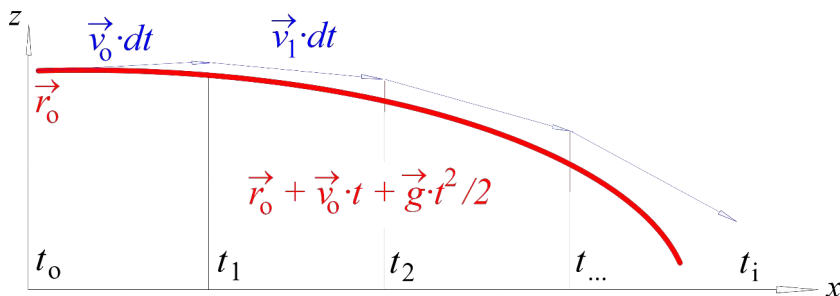
$$\ddot{\vec{r}}(t) = \ddot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{r}} \cdot \delta t + \frac{1}{2} \ddot{\vec{r}} \cdot \delta t^2 = \ddot{\vec{r}}_0 + \frac{d\vec{r}}{dt} \delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \delta t^2$$

которое имеет единственное и тривиальное решение в виде простого уравнения второго порядка с двумя начальными условиями по местоположению и скорости, и физической константой – ускорение свободного падения –  $g$ :

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{g} t^2,$$

определяющими начальную скорость, как постоянное линейное приращение координат, и постоянно действующее ускорение свободного падения в виде векторной константы для суммы всех внешних сил:  $\overset{\rightarrow}{F}(\overset{\rightarrow}{r}, \overset{\rightarrow}{v}, t) = m \cdot \vec{g}$ .

Рис. 13.



Точное аналитическое решение для движения тела в поле действия гравитационных сил (нижняя кривая), и аналог его численной аппроксимации (верхняя ломаная), выполненной по схеме Эйлера.

Строгое определение прямого численного моделирования сводится к интегрированию законов движения, имеющих второй дифференциальный порядок по времени, с помощью разделенных во времени разностей (дифференциалов) первого порядка, задающих последовательное приращение скорости в функции от внешних сил, а изменение координат – в функции от текущей скорости движения тела, соответственно.

$$\overset{\leftarrow}{v}(t) = \overset{\leftarrow}{v}(t) + \overset{\leftarrow}{a} \cdot \delta t;$$

$$\overset{\rightarrow}{r}(t) = \overset{\rightarrow}{r}(t) + \overset{\rightarrow}{v} \cdot \delta t.$$

В одномерном случае контрольный расчет внешних сил и ускорений производится в исходных узлах расчетной сетки, а результирующее значение скорости для расчетов пространственных смещений будет (*или может*) приводиться к середине расчетного интервала.

$$\begin{cases} \vec{v}({}^+t) += \vec{a}(t) \cdot \delta t \\ \vec{r}({}^+t) += \frac{\vec{v}(t) + \vec{v}({}^+t)}{2} \cdot \delta t \end{cases} \quad \text{центровка шаблона по схеме хорд.}$$

Формальное приведение решения к «схеме хорд» показывает, что физически обоснованное моделирование получается в случае прямого учета предыстории свободного движения материальной точки (частицы), в данном случае выразившееся в необходимости осреднения скорости за расчетный интервал времени.

```

// Силловые реакции и приращение скорости при взаимодействии частиц
//
void One_Inter_Step_of_Point( Real dT, bool MFiz )
{
// Учет силового взаимодействия свободных частиц между собой
for( int j=0; j<nPoints; j++ )
{ for( int k=0; k<nPoints; k++ )if( k!=j )
{ Vector r = Ro[k]-Ro[j];
Real s = abs( r );
if( MFiz )Vo[j] -= r * ( ( 1.0/s/s - 1.0 )/s/s/s*dT/M_PI ); else
if( s>1.4655712319 )Vo[j] += r * ( 1.0/s/s/s*dT/M_PI );
else Vo[j] -= r * ( 1.0-s )/s*dT/M_PI;
} }
}
// Блок расчета кинематики частицы под действием внешних сил и трения
Point One_Flight_Step_of_Point( int iPart, Real dT ) // 1 шаг для iPart
{ Point &R=Ro[iPart];
Vector &V=Vo[iPart];
//
// Если высота вне атмосферы, то всего лишь учитывается радиус земли
if( R.Y>Re/300.0 ) // до 22 км над поверхностью Земли?
V.y -= ( dT*g )/( 1+sqr( R.Y/Re ) ); // -- для космического полета
else
{ if( moving_Model ) // nPoints<=3 )//|| nPoints>=27 )
{
//! Прямое действие массовых гравитационных сил
if( R.Y<0.0 ) V.y += g*dT; // на выход над поверхностью
else V.y -= g*dT; // и расчет новой скорости движения тела
//
// Расчет гидростатических сил для плотности воздуха (сила всплытия)
V.y += g*dT * ro*( ( 4.0/3.0 ) * M_PI*Rm*Rm*Rm )/M;
//
// Проверка на касание поверхности Земли,
// с отскоком и небольшим торможением-проникновением
if( R.Y<=0 && V.y<=0 )V.y=-0.92*V.y; // R.y=0;
if( R.X>wall && V.x>0 || R.X<-wall && V.x<0 )V.x=-0.92*V.x;
if( R.Z>wall && V.z>0 || R.Z<-wall && V.z<0 )V.z=-0.92*V.z;
}
// Для учета сопротивления движению со стороны воздуха потребуется определить
// все инерционные и геометрические параметры, т.к. внешние силы будут
// приложены к внешней поверхности тела
Real v=abs( V ); // величина скорости для учета сопротивления воздуха
if( v>0.0 )V -= V/v // величина скорости здесь только уменьшается
* ks // коэффициент сопротивления
* ro // плотность воздуха
* ( v*v / 2.0 ) // и квадрат скорости
* M_PI * Rm*Rm // площадь поперечного сечения
* dT / M; // инерционное приращение
}
// Для расчетов новых координат тела уже не требуется учета действия внешних сил.
R += V*dT; // приращение пространственных координат
return R;
}

```

## **5. Координатные системы, числовые объекты и алгоритмы вычислительного эксперимента в гидромеханике**

Из необходимости адаптивного повсеместного и непрерывного управления вычислительным экспериментом со сквозным контролем текущего состояния всех числовых объектов и операций, устанавливаются функциональные или контекстные требования к специализированной среде программирования для проектирования, построения и реализации прямых вычислительных экспериментов в континуально-корпускулярных физических средах:

- элементарные пространственно-временные объекты и базовые физические явления записываются тензорными величинами в размерном виде, что допускает визуальный контроль и применение гибридных схем с инженерными эмпириками и математическими асимптотиками;

- вычислительные операции инвариантно определяются в проекциях глобальной системы координат, и ассоциируются обратными аппроксимациям в локальных базисах, геометрически связанных произведениями числовых объектов – крупных частиц – конечных объемов жидкости.

Объектно-ориентированная среда прикладного программирования связывает числовые объекты арифметико-логическими операциями:

- 1) логические или эмпирические алгоритмы формализуют законы прикладной гидромеханики, способы формирования и методы анализа текущего состояния сплошной среды в условиях интенсивной трансформации числовых объектов;

- 2) сложение применяется к числовым объектам в едином геометрическом базисе при строгом соответствии физических размерностей, в рамках predetermined законов гидромеханики (пп.1);

- 3) произведение исполняется с векторами и тензорами в дуальных координатных базисах, что исключает повышение ранга в одночленных произведениях, если это не покрывается синтезом алгоритмов (пп.1) или анализом числовых объектов (пп.2).

Создается концепция построения специализированного функционального (контекстно-зависимого) языка программирования, в котором алгоритмические последовательности управляют числовыми объектами, формализующими реологические свойства и законы движения в континуально-корпускулярном представлении механики сплошных сред:

- скалярные или инвариантные величины, например время  $t$ , участвуют в операциях произведения или представляются производными от любых числовых объектов;

- векторные величины участвуют в операциях сложения только с соразмерными векторами, или в операциях произведения с тензорами для изменения координатных базисов;

- тензорные величины синтезируют числовые объекты или характеризуют состояние крупных частиц жидкости, представляя геометрические деформации в качестве физических явлений и процессов гидромеханики в функции скалярного времени.

Взаимосвязанные тензорные объекты и реентерабельные алгоритмические операции формируют основные законы гидромеханики, а их виртуальный контроль и текущий

анализ состояния числовых объектов с возможностью конструирования гибридных функциональных связей, должны обеспечиваться активным задействованием контекстно-зависимых управляющих грамматик специализированного функционального языка программирования, адаптированного для проектирования, постановки и реализации прикладных вычислительных экспериментов в гидромеханике.

## Вычислительная среда пространственных сеточных ячеек – виртуальных корпускул

Как варианты ранее сформулированных исходных законов гидромеханики для внутренней энергии:  $\overset{\wedge}{m} = \overset{\vee}{\rho} \cdot \overset{\wedge}{r}$  [кг] и поверхностных напряжений:  $\overset{\wedge}{f}$  [Н·м<sup>2</sup>] – в окрестности расчетных сеточных узлов и центров масс жидких корпускул, задаваемых в строгом пространственно-временном контексте множества локальных базисов в универсальной абсолютной системе координат:

$$\overset{\wedge}{\rho} = \overset{\wedge}{m} \cdot \overset{\wedge}{r} \quad [\text{м}^3/\text{кг}]; \quad \overset{\wedge}{f} = \overset{\wedge}{f} \cdot \overset{\vee}{r} \quad [\text{кг}/\text{с}^2, \text{Н}/\text{м}].$$

Придавая тензору локальных скоростей физический смысл изменения поля скорости в окрестности крупной частицы жидкости во времени, получается обобщенный тензор для связи внутренней энергии и поверхностных напряжений:

$$\overset{\wedge}{f} = \overset{\vee}{v} \cdot \overset{\wedge}{\rho} / t, \quad [\text{кг}/\text{с}^2, \text{Н}/\text{м}] \quad (12)''$$

По аналогии, при необходимости использования традиционных зависимостей гидромеханики, с согласованием физических размерностей доопределяются тензоры напряжений для выделения вязкостных и упругих свойств сплошной среды, также в ближайшей окрестности элементарной жидкой корпускулы:

$$\overset{\wedge}{f}_H = \overset{\vee}{v}_H \cdot \overset{\wedge}{\eta} / \lambda, \quad [\text{Н}/\text{м}]; \quad \overset{\vee}{\eta} \quad [\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^3]; \quad (13)''$$

$$\overset{\wedge}{f}_T = \overset{\vee}{v}_T \cdot \overset{\wedge}{\kappa} \cdot t / \lambda \quad [\text{Н}/\text{м}]; \quad \overset{\vee}{\kappa} \quad [\text{Н}/\text{м}^3], \quad (14)''$$

где:  $\lambda$  [м] - отстояние (*масштаб*) между смежными взаимодействующими корпускулами.

Для сохранения традиционных физических размерностей в определение тензоров напряжений добавлен делитель на характерный линейный размер:  $\lambda$  [м] – переводящий коэффициенты к величине силы; в законе Гука деформация вычисляется по локальной скорости за интервал времени  $t$ .

Вычислительная модель на основе тензорной математики всегда содержит реологические свойства жидкости: сжимаемость, вязкость и упругость, при этом соотношение интенсивностей получающихся напряжений определяет признаки возникновения критических режимов течения с образованием струй, вихревых слоев и кавитационных разрывов. Под действием тензора внутренних напряжений, частица жидкости получает приращение скорости внутреннего (замкнутого) движения, традиционно представляемого с помощью трех динамических состояний:

$$\overset{<}{f} = \overset{\wedge}{v}_o \cdot \overset{\vee}{\varepsilon} \cdot t + \overset{\wedge}{v}_H \cdot \overset{\vee}{\mu} / \lambda + \overset{\wedge}{v}_\Gamma \cdot \overset{\vee}{\kappa} \cdot t / \lambda = \overset{<}{f}_o + \overset{<}{f}_H + \overset{<}{f}_\Gamma, \quad [\text{Н/м}] \quad (36)$$

где тензоры:  $\overset{<}{f}_o$  – давление;  $\varepsilon$  – коэффициенты сжатия.

Получающийся характеристический полином может использоваться в оценках состояния жидкости, где реологические параметры проявляются в виде главных инвариантов тензора конвективных скоростей:

- $\overset{<}{v}_o: \mathbf{I} \neq 0$  – сжимаемость  $\rightarrow$  *кавитационный разрыв плотности*;
- $\overset{<}{v}_H: \mathbf{II} \neq 0$  – поворот  $\rightarrow$  *образование свободной струи или турбулентного вихря*;
- $\overset{<}{v}_\Gamma: \mathbf{III} \neq 0$  – деформация, чистая – если другие инварианты тензоров равны нулю.

Так, если расчетная ячейка с присоединенным вихрем обращает в нуль детерминант внутреннего поля конвективных скоростей в смежной точке – в точке центра масс свободной сопряженной частицы жидкости, что предопределяет зарождение свободного турбулентного вихря внутри крупной частицы жидкости. Такой гибридный алгоритм можно использовать за пределами аппроксимационного разрешения на относительно грубых сетках, либо для уточнения решения, когда сеточная область в зоне вихреобразования должна сгущаться.

## Построение сеточных областей и корпускулярных расчетных схем

Разделение этапов вычислений по совокупным физическим процессам дает возможность сквозного контроля и гибридного перестроения математических зависимостей по текущим оценкам состояния моделируемой сплошной среды, с учетом интенсивности физического взаимодействия смежных корпускул – как виртуальных числовых объектов.

Каноническое представление законов гидромеханики позволяет строго и однозначно связывать числовые объекты с арифметико-логическими операциями и сложными геометрическими алгоритмами, в том числе с использованием быстрых интерполяций для нерегуляризованных сеточных пространств.

Последовательное пространственное интегрирование первого порядка задействует сеточные и корпускулярные подходы, формализуемые с помощью тензора инерционной массы:  $\overset{>}{m} = m_k^i [\text{кг}]$  – в качестве числового объекта для фиксации предыстории – инерции в движении и локальной деформации моделируемых частиц жидкости, что образует алгоритмическую последовательность сбалансированного прогноза и коррекции движения по криволинейным траекториям для частиц жидкости с динамически изменяющейся внутренней энергией.

На первом континуальном этапе вычислительного эксперимента расчетная область может заполняться ячейками на ортогональных ребрах по смежным пространственным

узлам:  $\overset{\wedge}{r} = (\overset{\rightarrow}{x} \perp \overset{\rightarrow}{y} \perp \overset{\rightarrow}{z})$ , что низводит вычисление локальных скоростей и смещений до простого аффинного масштабирования по шагу сетки:  $\delta x, \delta y, \delta z$ , однако, с возможной утратой алгоритмического единообразия гидродинамических моделей на нерегуляризованных расчетных узлах.

## О построении тензорных числовых объектов и моделирующих алгоритмов

Вычислительное пространство строится на неподвижных нерегуляризованных узлах: **Point**, в индексированном множестве сеточных ячеек для трехмерной интерполяции с опорой на Евклидовы базисы: **Base**, внутри и в окрестности которых строится математика согласования физических законов с использованием свободных векторов: **Vector**.

Объектно-ориентированное программирование на алгоритмических языках C++ или D позволяет перенести на этап компиляции исходных текстов программ основной контроль корректности математических операций, если они применяются к однозначно определенным по физическим характеристикам числовым объектам, в том числе содержащим предварительно рассчитанные обратные матрицы, детерминанты или собственные значения и векторы, используемые в формировании конкретных математических моделей.

Основные вычислительные объекты определяются из условия быстрого и независимого исполнения вычислительных операций<sup>26</sup> и, по необходимости, с возможностью быстрой перестройки вычислений для применения гибридных алгоритмов в зависимости от текущих условий существования физического явления в локальной подобласти:

```
typedef double Real; // скалярная величина в глобальном пространстве и времени
typedef double real; // локальные или разностные отсчеты в пространстве и времени
struct Vector; // свободный разностный вектор в локальном масштабе
struct Point; // точка дальних мировых отсчетов в масштабе абсолютной СК
struct Edge; // вектор локальных отсчетов с привязкой в абсолютном базисе
struct Matrix; // базовый объект для быстрого доступа к матрицам Tensor[3x3]
struct Tensor; // собственно тензорный класс без ссылок и контекстных связей
struct Base; // координаты местоположения и связный базис Евклидовой СК
struct Cell; // числовая ячейка со смежными контекстными связями
struct Space; // пространство узловых элементов сеточной области в целом
struct Volume; // множество свободных – подвижных и деформируемых ячеек
```

В случае автоматического преобразования сложных числовых объектов **Vector** или **Tensor** к локальной величине **real**<sup>27</sup> будут получаться длина вектора и детерминант матрицы тензора, при этом всякие другие преобразования компилятор сможет помечать ошибочными. Разность величин типа **Point** может дать только величину **Vector**, в то время как сложение объектов типа **Vector** с величинами **Vector** или **Point** приводит к аналогичным геометрическим объектам **Vector** или **Point** (и никаким другим).

Современные компьютеры обладают практически неограниченными объемами оперативной памяти и существенно малой скоростью арифметико-логических операций при использовании больших вычислительных массивов. Для технического обеспечения сквозного распараллеливания операций основные массивы данных **Space** и **Volume** могут дублироваться и сохраняться для текущего, предыдущего и последующего срезов во

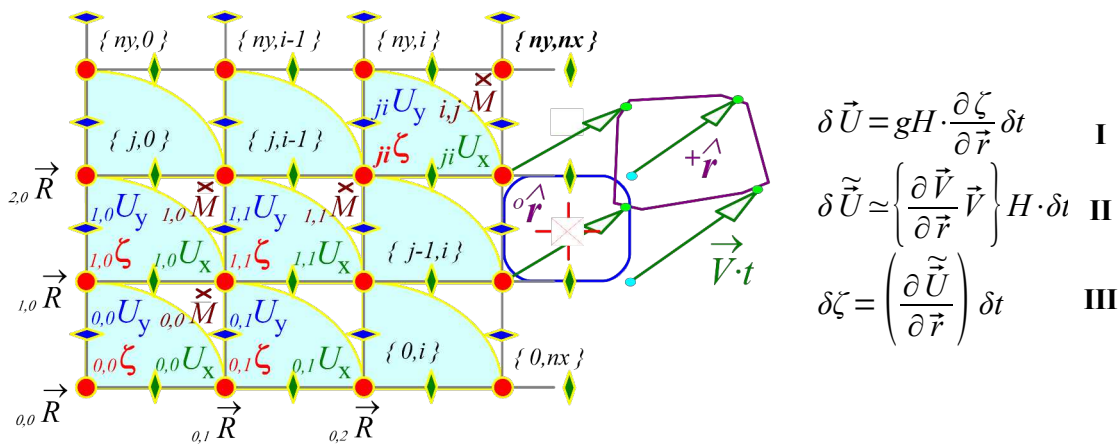
<sup>26</sup> «Тензор» – Программа построения числовых объектов и функций трехмерной тензорной математики для вычислительных экспериментов в гидромеханике. СПбГУ Роспатент № 2013619727.

<sup>27</sup> `operator const Real&() { return sqrt(x*x+y*y+z*z); }` // пример для **Vector**  
// **Real** и **real** пока не разделяются (хотя, со временем стоит их развести).

времени, что позволит синхронизировать параллельные вычисления в случае не полного разделения этапов эксперимента по независимым физическим процессам, или при необходимости создания какие либо циклов для активного или релаксационного согласования параметров вычислительной среды в сложных и плохо обусловленных математических моделях.

**1. Вычислительная задача.** Длинноволновая вычислительная модель представляется замечательным образцом обобщенной инженерной задачи для всестороннего изучения и освоения интерактивных графических комплексов при реализации совместных вычислительных экспериментов в гидромеханике океана и атмосферы, в которых распараллеливание алгоритмов по моделированию в масштабах всего Земного шара, должно сочетаться с необходимостью параллельной обработки множества синхронных сценариев для прогнозного и уточняющего моделирования гидрофизических и гидродинамических процессов вблизи морского побережья, на акваториях рейдов и гаваней морских портов.

Исходная математическая модель в канонической форме (Рис. 14, выражения I и III) представляется системой дифференциальных уравнений первого порядка<sup>28</sup>, для которых возможно применение явных численных схем с разделением этапов решения по независимым физическим процессам. В алгоритмическом плане это означает возможность распараллеливания вычислительных операций вплоть до каждой отдельно взятой сеточной ячейки – частицы жидкости, и, соответственно, доступность сквозного контроля физического состояния моделируемой среды с целью динамического выбора адекватной математической, асимптотической или эвристической модели течения.



**Рис. 14.** Вычислительная схема континуально-корпускулярного представления длинноволновой модели динамики океана:  $U$  – вектор полного потока;  $H$  – глубина моря;  $\zeta$  – отклонение уровня от равновесного положения;  $V$  – скорость смещения частицы относительно неподвижной сетки;  $R$  – вектор местоположения и  $r$  – тензор формы частицы; I – уравнение движения (*внешнее воздействие*); II – деформация крупной частицы жидкости (*конвективность – интерполяция к исходным узлам*); III – условие неразрывности (*захват энергии движения*).

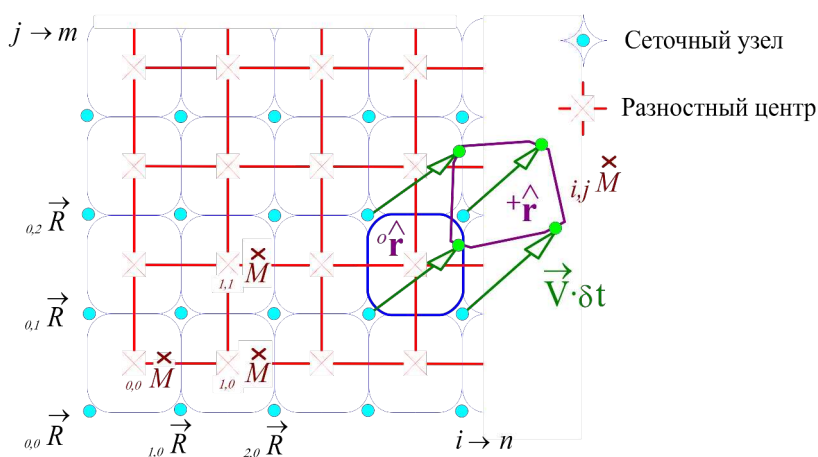
Интерполяционный этап II отвечает за большие смещения и деформации частиц жидкости (Рис. 14), и обычно не включается в длинноволновые вычислительные экспери-

<sup>28</sup> «Ani» – Прямые вычислительные эксперименты для моделирования цунами, штормовых нагонов, экстремальных течений и приливного режима в открытом океане и вблизи побережья. Храмушин В. Н. СахГУ. – Роспатент № 2010615848

менты. Вычислительная модель вполне может учитывать реальную высоту волны – для моделирования планового наката на пологом побережье, для чего должен усиливаться контроль сохранности частиц жидкости – корпускул на наклонной поверхности, наполняющих русла рек и растекающихся по пологим пляжам, др. В любом случае, явные численные схемы не востребуют специальных регулярных расчетных сеток, и не приводят к необходимости задействования гигантских массивов оперативной памяти для порождения числовых матриц с заведомо плохой обусловленностью в подобластях с большими градиентами физических полей.

## Сеточные пространства и свободно взаимодействующие частицы

Использование криволинейных координатных сеток позволяет создавать гладкие пространственные распределения параметров физических полей, что дает некоторое преимущество перед ортогональными нерегуляризованными сеточными построениями. Однако, на сопряженном этапе вычислительного эксперимента ортогональные построения позволяют минимизировать интерполяционные перерасчеты между узлами и центрами масс числовых ячеек, используя сложные дробления сеточных узлов и ячеек только в подобластях с большими пространственно-временными градиентами расчётных величин. Исследовательские вычислительные эксперименты в гидромеханике на основе метода крупных частиц [3] традиционно строились с использованием прямоугольных ортогональных сеток.



**Рис. 15.** Прямоугольная регуляризованная сеточная область.

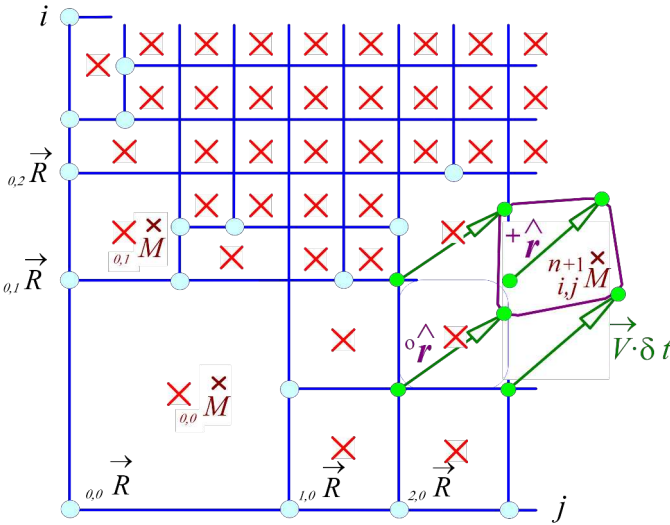
Важным преимуществом прямоугольных расчетных сеток (Рис. 15) является то обстоятельство, что, по крайней мере, на одном из этапов гидродинамических расчетов, форма элементарных частиц жидкости будет представляться ортогональными или даже диагональными тензорами II-го ранга, что значительно упростит форму представления законов механики, и исключит недостаточную обусловленность вычислительных операций из-за сильных начальных деформаций сеточных ячеек.

Исходя из аппроксимационных критериев, может определяться минимальный шаг расчетной сетки в каждой локальной подобласти, что усложняет лишь рекурсивные функции автоматической переадресации пространственных координат расчетных ячеек с переинтерполяцией физических полей по дискретным узлам нерегуляризованных мат-

ричных массивов, и особо не перегружает вычислительные ресурсы на лагранжевых этапах со свободными частицами жидкости:

$$\{ R_l \} = {}_{ijk}^n R_l,$$

как определение индексируемой регулярной сеточной области  $\{ i, j, k \}$ , где нижние левые индексы задают пространственное местоположение:  $\{ X, Y, Z \} = \{ i \cdot x, j \cdot y, k \cdot z \}$ ; а верхний левый индекс соответствует текущему циклу вычислительного эксперимента в отсчетах физического (моделируемого) времени  $T = n \cdot t$ .



**Рис. 16.** Прямоугольная ортогональная нерегуляризованная сеточная область. Кружочками отмечены разорванные узлы, в которых требуется дополняющая интерполяция или граничная экстраполяция расчетных физических величин

В объектно-ориентированном языке программирования C++ на уровне синтаксического разбора операторов возможно применение виртуальной перегрузки операций доступа к конкретным числовым объектам в сложной сеточной области, что может использоваться для адаптивных нерегуляризованных сеток (Рис. 16) с пропусками узлов  $ijR$  и цельными ячейками – частицами:  $ijM$ .

Отчасти такие алгоритмы усложняют выбор и увеличивают время доступа к конкретным числовым объектам, в то же время создается возможность оптимизации и значительного ускорения общего цикла вычислений и, что не менее важно, сохранения унификации вычислительных моделей механики сплошных сред, вплоть до простого алгоритмического перестроения внутренних и внешних граничных условий с помощью сглаживающих или экстраполяционных алгоритмов, в зависимости от аппроксимационных возможностей и доступности смежных числовых объектов.

Эйлеровы сеточные узлы  $ijR$  располагаются на гранях нерегулярных расчетных ячеек (Рис. 16), и потому в областях загрубления расчетной области их количество становится избыточным.

При такой организации расчетной области местоположение крупных частиц жидкости  $ijM$  не обременяется смежными ортогональными связями для непосредственного применения разностного дифференцирования, что формально предопределяет возможность

задействования этапа моделирования по Лагранжу, где формально независимые частицы участвуют в свободном и ускоренном движении по криволинейным траекториям в зависимости от их внутренней энергии (живых сил), аккумулированной в форме условной тензорной массы  ${}_{ij}M$  (плотности).

Пример: **Возмущение свободной поверхности под гравитационным притяжением**


Взаимовлияние частиц по воздействию гравитационного притяжения

Гравитационная массовая сила  $\vec{f}$  [кг·м/с<sup>2</sup>] сосредотачивается в центре масс расчетной частицы-ячейки жидкости по однонаправленному вектору распределенного ускорения свободного падения  $\vec{g}$  [м/с<sup>2</sup>] в глобальной координатной системе.

Будем полагать, что предыстория движения, по определению, формализуется условным тензором плотности  $\rho$  [кг/м<sup>3</sup>] во внутренней (локальной) системе отсчета, при этом несжимаемость жидкости фиксируется III-инвариантом или условием сохранения массы:  $\det(\rho) = \rho$  [кг/м<sup>3</sup>] – в отношении к плотности жидкости.

Вектор гравитационных сил в отношении одной частицы жидкости является массовым и задается произведением:  $\vec{f} = \vec{g} \cdot \rho \cdot \vec{r} = \vec{g} \cdot m$  [кг·м/с<sup>2</sup>], однако, импульсное приращение скорости в той же внешней системе координат за расчетный шаг времени  $t$ :  $\vec{v} = m \cdot \vec{f} \cdot t$  [м/с] связывается с трансформированной обратной матрицей массы  $m$  [кг<sup>-1</sup>], в которой сохраняются некое накопление инерционной предыстории по девиации потока внутри крупной частицы жидкости.

На гранях расчетных ячеек, как на частицах жидкости возникают поверхностные давления и сдвиговые напряжения, отчасти компенсирующие действие массовых и гравитационных сил, и приводящие условно свободные частицы в движение по вектору неравновесного действия.

 состоящее из гидростатической и гидродинамической

В построении регуляризованной расчетной области возможно два варианта представления геометрических ячеек – частиц жидкости  $r$  [м<sup>3</sup>] во внешней (абсолютной) система координат:

1) Формирование расчетной сеточной области возможно с использованием равнообъемных ячеек, что в случае условно равной глубины моря не нарушит регулярности и связанной индексированности узлов и центров масс частиц жидкости.

2) Фиксированная сеточная область с равным шагом расчетных узлов условно может сопоставляться с большой глубиной, где условный размах колебаний уровня существенно меньше глубины моря, т.е., горизонтальные деформации и смещения ячеек жидкости пренебрежимо малы.

## 1. Исходные тезисы и суждения о построении

### вычислительного эксперимента (*ἐκλεκτικός* предисловия)

«Прикладная вычислительная математика» формирует особое видение теоретических основ в постановке и решении прикладных задач аналитической механики и гидромеханики, с возможностью сквозной физической интерпретации вычислительных процессов, востребуемых в обосновании корректности и эффективности численных схем в процессе проектирования и реализации прямых вычислительных экспериментов при компьютерном моделировании естественных физических явлений и процессов *механики неразрывных сред*.

Основу академического курса составляет формализованный аппарат тензорной математики, единообразно отображающий пространственные объекты и операции с ними, включая представление законов механики в сильно деформирующейся и подвижной сплошной среде с помощью числовых объектов и методов – алгоритмов дискретных цифровых вычислительных систем. Разделение вычислительного эксперимента по независимым физическим процессам с интегрированием движения и внутренней механики крупных частиц жидкости с помощью разделенных разностей не выше первого порядка, в практической реализации позволяет ориентироваться на использование явных численных схем с канонической записью законов гидромеханики, что, в свою очередь, обеспечивает распараллеливание вычислительных процессов до уровня индивидуальной обработки узлов и ячеек сеточной области трехмерного пространства.

Практические примеры построения вычислительных моделей, визуализация физических процессов и специальных алгоритмов для геометрических преобразований, опираются на математический аппарат однородных координат в трехмерном пространстве, который имеет независимую аппаратную поддержку в составе стандартного графического пакета OpenGL. Сквозная визуализация сложных пространственных процессов на графическом терминале безусловно необходима для понимания особенностей вычислительного эксперимента, что особо актуально в особых зонах трансформации реологических свойств жидкости, и служит возможности оптимального выбора и задействования гибридных расчетных схем и алгоритмов с применением асимптотических и эмпирических зависимостей для достижения практического инженерного результата.

В результате академического курса студенты должны уметь самостоятельно выполнять постановку и реализацию численных решений прикладных задач механики и физики; объективно оценивать возможности для интерпретации и последующего обоснования результатов прямых вычислительных экспериментов при моделировании пространственных явлений физической теории поля и гидромеханики реальных жидкостей; с умением выбора стандартных математических пакетов и оптимальных алгоритмов для постановки, визуализации и обоснованного подтверждения качества проведения прямых вычислительных экспериментов для научных исследований и в интересах технологических изысканий в промышленных разработках.

В приложениях приведены аналитические материалы, поясняющие связь тензорной математики с традиционными моделями гидромеханики, в том числе используемые в теоретическом построении тензорного анализа для физической теории поля и прикладной механики сплошных сред. Обновляемые материалы настоящих исследований планируются к представлению в интернет по адресу: ShipDesign.ru.

## Историческое обобщение основных понятий и математических моделей гидромеханики

Векторное исчисление составляет математическую основу современной геометрии, гидромеханики и электромагнетизма, всех явлений и процессов в океане и атмосфере, в законах теоретической гидромеханики и механики сплошных сред. Векторное описание пространственных объектов и методы геометрического представления непрерывных процессов берут свое начало из работ механиков XVII века Рене Декарта [8] («Рассуждение о методах ...», 1637 г.) и Исаака Ньютона [14] («Математические начала натуральной философии», 1686 г.), определивших понятия механики жидкостей и флюидов, создавших векторное исчисление и законы движения в абсолютных координатных системах классической механики.

Тензорное исчисление создавалось в прикладной гидромеханике с целью инвариантного анализа локальных деформаций при моделировании реологических процессов внутри малых континуумов жидкости – в окрестности независимых виртуальных числовых объектов. В «Механике деформируемых сред» Арнольда Зоммерфельда, изданной в Лейпциге в 1949 г. [9], весьма полно определяются свойства тензоров деформации, конвективных скоростей, и возникающих под их воздействием упругих и вязких напряжений в жидкости. Столь эффективный инструментарий для формулирования пространственных законов движения совместно с фиксацией реологического состояния сплошной среды в малой окрестности подвижных и деформируемых корпускул, популяризировался в работах: Н. А. Кильчевский, 1954 г. – «Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике» [10]; Н. Е. Кочин, 1965 г. – «Векторное исчисление и начала тензорного исчисления» [11] и др. Полный курс тензорного исчисления и тензорного анализа излагается в фундаментальных зарубежных трудах: Мак-Коннел, 1963 г. – «Введение в тензорный анализ» [13]; и И. С. Сокольников, 1971 г. – в «Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред» [17]. В книге итальянских ученых: Дж. Астариты и Дж. Маруччи – «Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей» [2], изданной на русском языке в 1978 г., сводятся воедино всевозможные тензорные формализации прикладной математики, относящиеся к задачам гидромеханики и теории упругости; к другим разделам механики реальных сплошных сред и неньютоновских жидкостей.

Современная математическая систематизация пространственных моделей физической теории поля и законов механики сплошных сред излагается в тензорной форме в учебном пособии А. Ш. Готман<sup>29</sup> – «Тензорное исчисление» [6], и в лекциях М. Э. Эглит<sup>30</sup> по «Механике сплошных сред» [22], изданных, соответственно: в 2007 г. – в Новосибирской государственной академии водного транспорта; и в 2008 г. – в Московском государственном университете

Само по себе тензорное исчисление изначально строилось для конкретизации линейных конечно-разностных формализаций ньютоновских дифференциалов в трехмерном пространстве, и представляется каноническим обобщением традиционных численных схем [20] для построения вычислительных задач физической теории поля.

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана в 1998 г. в академическом издании по «Прикладной механике сплошных сред», под редакцией В. В. Селиванова [16], аналитический аппарат тензорного исчисления задействует в

<sup>29</sup> Ада Шоломовна Готман, профессор кафедры математики Новосибирской государственной академии водного транспорта.

<sup>30</sup> Маргарита Эрнестовна Эглит, профессор кафедры гидромеханики механико-математического факультета Московского государственного университета.

рассмотрении численных моделей с разделением на этапы по независимым физическим процессам Лагранже-Эйлера подхода – в реализации прямых вычислительных экспериментов в механике сплошных сред.

## Мир компьютерных моделей механики сплошных сред

Компьютерные модели отображаются в прикладной математике для неразрывных физических полей с помощью дискретных числовых массивов, что не вполне соответствует аналитическим решениям по законам гидромеханики в форме систем дифференциальных уравнений в частных производных в едином координатном пространстве. Для дискретных цифровых массивов характерны конечноразностные числовые объекты и сложные арифметико-логические операции с ними, которые служат основой для построения особого и вполне независимого математического инструментария, позволяющего использовать канонические записи законов механики для смежных или виртуальных частиц жидкости в наиболее естественном физическом представлении.

Успешными пионерскими разработками стали математические исследования и прямые вычислительные эксперименты в Лос-Аламосской лаборатории (США) [3] по моделированию нестационарных процессов в аэрогидромеханике, открывшие целое научное направление вычислительной математики с использованием свободных лагранжевых частиц при моделировании течений реальных жидкостей и газов со сложными граничными условиями и свободными поверхностями. Фундаментальные достижения Френсиса Харлоу<sup>31</sup> опубликованы в 1955 году под техническим определением: PIC (Particle in Cell) [19] – «Метод частиц в ячейках». Метод PIC изначально ориентирован на использование огромных вычислительных ресурсов, так как уравнения гидромеханики в форме Лагранжа сводятся к неявным численным схемам, решаемым с использованием матричной алгебры для согласования неопределенных параметров движения и внутреннего состояния для всех расчетных ячеек и условно свободных частиц – корпускул в потоке жидкости. Для достижения сплошности моделируемого течения (гладкости физического поля), такие виртуальные корпускулы должны присутствовать в достаточно большом количестве внутри каждой из анализируемых пространственных ячеек, и особо в зонах с сильными разрежениями, что обуславливает потребность в избыточных высокопроизводительных компьютерных ресурсах.

Яркой публикацией об оптимизированных методах вычислительной гидромеханики стала книга *О. М. Белоцерковского и Ю. М. Давыдова: «Метод крупных частиц в газовой динамике (Вычислительный эксперимент)»* [3], изданная в 1982 году, и содержащая наиболее выразительное и точное описание вычислительного эксперимента в гидромеханике с использованием обобщенного Лагранже-Эйлера подхода – «Метода крупных частиц». В этой же работе проведен основополагающий анализ и обоснование физической сути дифференциальных приближений первого и второго порядка, используемых в традиционных вычислительных моделях гидромеханики при простой конечно-разностной аппроксимации систем дифференциальных уравнений в частных производных.

В 1985 году (Iowa State University, USA) вышел двухтомник *Дейла Андерсона, Джона Таннехилла и Ричарда Плетчера: «Вычислительная гидромеханика и теплообмен»* [1], в котором обобщены и систематизированы многие вычислительные модели прикладной гидромеханики, поставлены проблемы практической реализации вычислительных экспериментов для различных реологических моделей сплошной среды и особых состояний потоков реальных жидкостей. В русском переводе этой книги появляется примиряющий

<sup>31</sup> Francis Harvey Harlow – член Американского физического общества, сотрудник Los Alamos National Laboratory (New Mexico), создатель численных моделей гидромеханики: Particle-In-Cell (PIC), Fluid-In-Cell (FLIC) и Marker-and-Cell (MAC)

термин: «Метод конечного объема», который определяет технологии близкие по сути к тензорным построениям вычислительных экспериментов в континуально-корпускулярной постановке, но, к сожалению, справедливых только в отношении постановочной части численных моделей гидромеханики, где в целом, в отличие от метода крупных частиц, наследуется безальтернативность разностных аппроксимаций систем дифференциальных уравнений в частных производных в единой абсолютной системе координат, что востребует неустойчивые численные аппроксимации второго порядка.

**Настоящее исследование** опирается на фундаментальные идеи и физические принципы численного моделирования известного метода «Крупных частиц» [3], где тензорные формализации уравнений аэрогидромеханики изначально строятся простым свертыванием громоздких разностных схем для систем дифференциальных уравнений гидромеханики в частных производных, и поверяются возможностью независимого континуального и корпускулярного математического представления с линейными аппроксимациями законов гидромеханики на разделенных этапах вычислений Лагранже-Эйлера (*континуально-корпускулярного*) подхода [20].

## Исходные положения и концепция построения трехмерной тензорной математики

Исходное изложение континуально-корпускулярного подхода основано на теоретических построениях «Трехмерной тензорной математики<sup>32</sup> вычислительных экспериментов в гидромеханике» [21], по изданию 2005 г. Дальневосточного отделения Российской академии наук, посвященного синтезу числовых объектов и методов моделирования пространственных физических явлений и нестационарных процессов в механике сплошных сред с использованием цифровых дискретных компьютеров.

Историческим прототипом тензорной математики представляется исчисление флюксий Исаака Ньютона, в котором вполне корректно записываются 2-х и 3-х мерные разностные аппроксимации неразрывных и гладких физических полей с помощью *пространственных сеточных узлов и смежных числовых ячеек – тензоров II ранга*, или просто: *тензоров* – определяющих возможность прямых и обратных геометрических аппроксимаций для неразрывных физических полей с помощью эффективных компьютерных алгоритмов, в свою очередь обеспечивающих прямое численное моделирование физических законов гидромеханики в строгой связке с контролем локальной реологии и условий существования течений жидкости.

**Тензорные числовые объекты** – пространственные композиции (симплексы<sup>33</sup>) единичных базисных ортов, определяющих прямую и обратную интерполяционную связь физических полей в подвижной локальной и абсолютной системах координат с помощью линейных аппроксимаций с целью моделирования законов механики, включая обязательность контроля реологических условий существования сплошной среды внутри и в ближайшей окрестности малых векторных триад – виртуальных конечноразностных корпускул жидкости.

Физическое представление, экспериментальное построение и естественная интерпретация *тензора II ранга* ближе всего соответствует историческому понятию *аффинора*, введенного в использование Людвигом Прандтлем в 1932 году в книге «Гидро- и аэромеханика» [15], где тензором называлась симметричная часть *аффинора*, отвечающая за чи-

<sup>32</sup> Математика – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира.

<sup>33</sup> Симплекс – минимальное количество базисных векторов, определяющих линейные аппроксимации в ближайшей окрестности пространственной точки. Трехмерный базис образуется единичными ортами трех некопланарных векторов.

стую деформацию, а выделяемая антисимметричная часть *аффинора* определялась в качестве особого *вектора вращения*. Такое математическое разложение стоит в основах в основах современного тензорного анализа для унифицированного рассмотрения дифференциальных моделей движения в единой абсолютной системе координат.

Вычислительные модели тензорной математики строятся на линейных пространственно-временных аппроксимациях, воссоздающих уравнения движения с помощью двойной аппроксимации первого порядка на разнесенных по физическим процессам этапам вычислительного эксперимента, в свою очередь синтезирующих континуально-корпускулярные решения на неподвижной сетке абсолютной системы координат в произведениях с моделями состояния и локальных свойств потоков жидкости в собственных базисах крупных частиц жидкости.

Получающаяся локализация физических явлений и канонизация математических моделей до тензорных аппроксимационных зависимостей необходимы, в том числе, для построения прямых вычислительных экспериментов с нестационарными, разрывными и многосвязными процессами, допускающими применение чисто инженерных приемов по гибриднему включению асимптотических или эмпирических расчетных моделей, что как правило не охватывается упрощенными математическими аналогами современного интегро-дифференциального<sup>34</sup> исчисления.

В настоящей работе не ставится задач по выявлению новых проблем и углубленному развитию традиционных методов тензорного анализа; элементарные арифметические операции и линейные геометрические аппроксимации *тензорной математики* вполне достаточны для синтеза строго определенных операций с тензорами пространственных деформаций и конвективных скоростей, связанных с моделями упругих и вязких напряжений в виртуальных числовых корпускулах, задаваемых в форме простейших числовых структур – векторных и тензорных объектов для фиксации внутреннего состояния и динамической трансформации реологических параметров моделируемой сплошной среды.

В разностной или тензорной записи конкретизируются свойства элементарных физических явлений и алгоритмически выстраиваются основные кинематические процессы, в том числе адаптированные для отдельной графической визуализации расчетных этапов с промежуточными результатами вычислений, что служит возможности управляемого контроля расчетов со сквозной физической интерпретацией текущего состояния вычислительных объектов и операций, и может применяться в повсеместном логическом контроле с целью своевременного применения гибридных или эмпирических усовершенствований математических и физических законов в подобластях с вырождающимися критериями численного моделирования.

Разделение вычислительного эксперимента на независимые этапы моделирования с использованием континуального анализа физических полей, и последующего синтеза обновленных реологических параметров виртуальных корпускул – крупных частиц жидкости, служит необходимым условием для применения явных численных схем первого порядка, что, в свою очередь, создает возможность сквозного распараллеливания компьютерных вычислений до уровня отдельных сеточных узлов и числовых ячеек. Столь глубокий параллелизм вычислений особо актуален при создании многопроцессорных вычислительных систем, опирающихся на чисто математическую независимость локальных операций в пределах смежных узлов-ячеек, распадающихся вплоть до отдельного связывания виртуальных корпускул с собственными ядрами арифметико-логического устройства, – что делает цифровой компьютер сопоставимым по эффективности с аналоговым моделирующим устройством.

---

<sup>34</sup> Числовые структуры цифровых компьютеров способствуют разностным аппроксимациям для анизотропных континуально-корпускулярных физических полей.

На практике вычислительная математика и гидромеханика реальных жидкостей являют новое воплощение гармонии самим существованием континуально-корпускулярного метода (Лагранже-Эйлера подхода) для разделенного численного моделирования явлений и законов природы – «не терпящей пустоты». Это воссоздает целостное представление о физике моделируемых гидродинамических процессов на дискретных сеточных аппроксимациях современных цифровых вычислительных систем.

Численные схемы метода крупных частиц (*конечного объема*), возрождают средневековое видение механистического мира с примирением дискуссий о дуальности свойств окружающих флюидов сплошной среды по Рене Декарту, производимых в непрерывном взаимодействии смежных деформируемых корпускул по Исааку Ньютону, что обсуждалось более 300 лет назад [12] и формализовалось Робертом Гуком в открытиях фундаментальных законов механики для упругих континуумов и вязких жидкостей.

## Проектирование и поверка алгоритмов вычислительного эксперимента в гидромеханике

Непротиворечивое авторское изложение проектных решений при создании сложных вычислительных экспериментов может стать вполне состоятельным, если внешне разнородные понятия в описание моделируемых природных явлений удастся ввести специальные определения или особые сущности, достаточные для взаимно-однозначного позиционирования или связывания всех смысловых или содержательных противоречий. В терминах троичной логики (*трилектики*<sup>35</sup>) предложения естественного языка оперируют независимыми (диалектически разделенными) сущностями, как «подлежащее» и «сказуемое», существующими в глобальном контексте изложения, и сопрягаемые в единое целевой суждение «определениями», «дополнениями» и контекстно-независимыми «обстоятельствами».



**Рис. 17.** Логическое пространство проектной задачи о построении вычислительного эксперимента в гидромеханике

В проекте программного построения гидромеханического вычислительного эксперимента (рис. 1) аналогичные понятия выступают в качестве виртуального «объекта – явления» с сопряженными «операциями – действиями», алгоритмически связываемые гео-

<sup>35</sup> «...мудрый подход – китайская трилектика срединного пути, когда в логике научного поиска существуют как оппозиции, так и третьи позиции, оценивающие обстоятельства искомого выбора ...»

метрическими «трансформациями – операциями» и физическими «законами – функциями», существующими в обстоятельствах контекстно-зависимой среды исполнительных «процедур» с множеством неявных «функциональных зависимостей».

**Проектные и поверочные этапы** в разработке прикладных вычислительных комплексов в гидромеханике могут опираться на логическую независимость элементарных числовых объектов и операций с ними в составе больших массивов числовых структур, вовлекаемых в явные численные алгоритмы и контекстно-связанные – рекурсивные функции для построения исходных физических полей, образующих замкнутые последовательности собственно численного моделирования нестационарных процессов во времени с синхронной визуализацией результатов на параллельно активизируемых устройствах графического отображения.

Исходное изречение: «*язык – способ мышления*» – в трехмерном логическом пространстве (рис. 1) соотносится с описанием физических явлений и процессов по аналогии с подлежащими и сказуемыми в предложениях естественных языков. По трем независимым – ортогональным направлениям фиксируются логические фазы для комплексного охвата прикладной вычислительной задачи в троичной градации: «*Явление – X*» (*объект-определение-действие*) – детальное описание физических законов и реологических свойств сплошной среды; «*Проект – Y*» (*идея-закон-материя*) – согласование исходной задачи и ожидаемых результатов в избранной языковой среде; «*Развитие – Z*» (*исход-процесс-результат*) – этапы трансформации моделируемых процессов аэрогидромеханики, задействуемые в реализации вычислительного эксперимента и с целью автоматической проверки получаемых результатов.

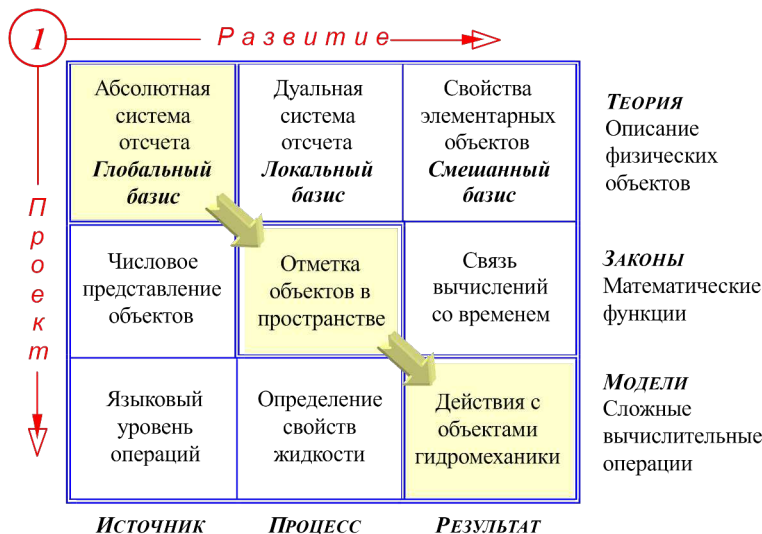
По граням логического куба отображается симплекс независимых областей научных знаний, определяющих искомое основание для построения системы связанных алгоритмических процедур в контекстно-зависимом окружении массивов сложных структур данных:

Три плоскости  $\textcircled{3} \perp Z$  – «**Язык алгоритмических вычислений**» (*проект и явление*) – формируют три этапа вычислительного эксперимента в логических градациях от подготовки исходных данных: «начало»; через центральный алгоритм решения инженерной задачи: «процесс»; к сложнейшему этапу интерактивного графического анализа и текущей трансформации физических полей: «результат». В этих плоскостях позиционируются «проектные» решения от исходной идеи, через естественные законы к материальным континуально-корпускулярным объектам гидромеханики, оцениваемые в понятиях контекстных представлений числовых объектов, их функциональных трансформаций и алгоритмических операций – действий по реализации конкретных этапов прямого вычислительного эксперимента.

Плоскость  $\textcircled{2} \perp Y$  – «**Математические принципы**» (*явление и его развитие*) – естественным образом представляют ход реализации и задействованные процессы в едином комплексе этапов вычислительного эксперимента по условному направлению: «Развитие» – со строгим позиционированием алгоритмов в функциональной среде вычислительных объектов и операций, моделирующих конкретное физическое «Явление». Элементы троичной матрицы: «Математические принципы» в плоскости «Явление» – «Развитие», подобно подлежащему и сказуемому в естественном языке объединяют элементы программирования в математические и геометрические правила и методы вовлечения числовых объектов в подготовку, исполнение и последующее представление результатов численного моделирования.

В плоскости  $\textcircled{1} \perp X$  – «**Законы и правила механики**» (*проект – развитие*) – обособляются математические алгоритмы и законы гидромеханики, систематизируемые гибкими средствами функционального программирования на взаимно независимых троичных основаниях – матрицах: «Математических моделей» и «Языков программирования» (рис. 1), чем достигается оптимальное сопряжение математических формализаций и чи-

сто алгоритмических вычислительных процедур. Взаимно независимой задачей проектных изысканий – целью логического синтеза становится: ① – «Явление» – детальное описание физических законов движения и реологического состояния сплошной среды. Достижение корректного вычислительного эксперимента строится с опорой на ортогональные направления проектных исследований: «Проект» – согласование исходной задачи и ожидаемых результатов в избранной языковой среде; «Развитие» – этапы трансформации моделируемых процессов аэрогидромеханики, как при реализации поисковой, так и повелительной задачи.



**Рис. 18.** Плановая троичная матрица взаимосвязей проектных элементов при построении вычислительных алгоритмов в контексте пространственно-временных преобразований базовых математических моделей гидромеханики.

Выделенная на рис. 2 логическая плоскость по нормали к оси «явление-Х»: ① – представляется плановой матрицей построения вычислительного эксперимента, синтезируемого из трёх подуровней аппаратной и языковой поддержки различных методов программирования, определяемых из принципа логической систематизации множества алгоритмов по направлениям: ① → «развитие-*Z*»; объединяемых в унифицированной функциональной среде: ① → «проект-*Y*», ориентированных на возможность повсеместного внутреннего контроля с непрерывным согласованием реологических параметров моделируемых жидкостей, в том числе с автоматизированной адаптацией разнородных математических моделей и численных схем при обязательном контроле исполнимости базовых законов механики сплошной сред.

В направлении логического анализа: «сверху-вниз» – по аналогии с естественным языком, определяются члены описательных предложений в качестве числовых объектов (*подлежащих*) и связанных с ними математических операций (*сказуемых*), формируемых из теоретического задела в данной области знаний<sup>36</sup>; тогда на обратном этапе – на этапе реализации программного комплекса, в качестве естественных частей речи будут конструироваться новые предопределенные действия (*глаголы*) над числовыми структурами данных (*существительными*), что соответствует проектному синтезу законов гидромеханики вкупе с описанием реологического состояния моделируемой жидкости.

<sup>36</sup> Встречное проектирование допускается компиляторами декларативных языков в виде объектно-ориентированных структур и операций в среде макропроцессорных и виртуальных суррогатов функционального программирования, активно задействуемых в интерактивных системах трехмерной графической визуализации.

Аналогичное встречное (*виртуальное*) проектирование вычислительных алгоритмов вполне возможно с ориентацией на инструментарий современных языков объектно-ориентированного программирования, задействующего декларативное объявление сложных числовых объектов и функциональное построение весьма сложных машинно-зависимых последовательностей арифметико-логических операций, в том числе рекурсивно адаптирующихся к динамически складывающимся условиям исполнения конкретных прикладных математических моделей. Функциональные дополнения (*искусственный интеллект*) будут отображаться на этапах динамической сборки исполняемых нереентерабельных модулей, участвующих в автоматическом или интерактивном управлении вычислительным экспериментом с динамическим перестроением гибридных численных схем, в том числе при обнаружении критических зон по условиям устойчивости в локальных подобластях; или по значимым для расчетов пространственным аппроксимационным критериям, так же как и по условиям динамического контроля реологического состояния элементарных частиц моделируемой сплошной среды.

## Графическая визуализация и контроль моделируемых явлений и процессов

Современные гибридные вычислительные системы способны задействовать порядка миллиона процессорных ядер, что формально приближает вычислительные эксперименты к технической возможности по развертыванию собственных вычислительных узлов индивидуально для каждой крупной частицы сплошной среды, и что сводится к идеологии построения счетно-решающих комплексов на базе аналоговых и гибридных моделирующих устройств. Предельная эффективность при сквозном распараллеливании вычислений может ограничиваться лишь временем функционального выбора и исполнения алгоритмов для самых сложных числовых объектов, пространственно расположенных где-нибудь в зонах с аппроксимационными нарушениями или на границах разрывов сплошной среды.

**Универсальное построение сложных числовых объектов**, характеризующих текущее состояние крупных частиц жидкости, в общем случае должно обеспечивать эффективное задействование адекватных моделирующих алгоритмов, или математических асимптотик при плохой обусловленности физических решений в локальных подобластях. Полноценные вычислительные эксперименты в аэрогидромеханике должны обладать автоматическим контролем и визуализацией всех физических полей для поддержания возможности интерактивного управления моделируемыми процессами, и, что самое важное – обеспечивать приемлемые для технических нужд области существования решения – аппроксимационной гладкости, включающие всевозможные вихревые новообразования, кавитационные или гравитационные поверхности разрывов, в том числе вычисляемых с помощью подмены точных решений асимптотическими или эмпирическими аналитиками.

Алгоритмическая логика объектно-ориентированных языков высокого уровня, типа: “C++” и “D”, – при компиляции и генерации высокоэффективного машинного кода, востребуют избыточные объемы оперативной памяти, а также значительное увеличение вычислительных ресурсов, вовлекаемых в нереентерабельные процедуры с глобальными массивами данных для организации непрерывного и повсеместного контроля внутреннего состояния моделируемых потоков и частиц жидкости, что необходимо в процессах функционального переназначения адекватных алгоритмов и вычислительных моделей гидромеханики с неизменным согласованием всех геометрических и пространственно-временных критериев физической аппроксимации.

Многотысячные массивы процессорных ядер в современных графических вычислительных комплексах (GPU)<sup>37</sup> словно специально создаются именно для реализации прямых вычислительных экспериментов на основе трехмерной тензорной математики, где программисту даются вполне достаточные объемы быстрой статической памяти в близком адресном арифметико-логических устройств, где располагаются числовые структуры для динамического уточнения состояния и прогноза механики жидкости по предыстории вычислительных процессов, опирающихся на унифицированные шаблоны для выбора моделирующих функций трехмерной гидромеханики на основе крупных частиц жидкости. В ограниченном адресном пространстве графических процессорных блоков GPU возможно сохранение собственных характеристик тензорных объектов с их логическими предикатами для параллельной визуализации моделируемых физических полей, для чего предназначено обособленное устройство под управлением аппаратно-независимых средств на базе языка OpenGL, направляющих полноценные трехмерные изображения на графические консоли практически независимо от основных этапов вычислительного эксперимента.

В современной вычислительной практике не представляется возможным оформление заказов на встраивание специализированных алгоритмов гидромеханики в аппаратную архитектуру и микропроцессорные схемы новейших суперкомпьютеров. Тем не менее, ориентация на повсеместное согласование алгоритмов с архитектурными особенностями вычислительных систем, представляется необходимым условием реализации наиболее эффективных информационно-вычислительных комплексов. Показательным историческим примером эффективного согласования аппаратных и программных возможностей является контекстная графическая среда OpenGL, в составе которой имеется полный набор операций трехмерной визуализации с использованием математического аппарата «однородных координат» – своеобразной тензорной геометрии для проективной визуализации с векторами местоположения внутри обранных матриц размерностью  $[4 \times 4]$ .

В архитектуре современных вычислительных комплексов реализована возможность параллельного проведения графической визуализации больших числовых полей без особого влияния на основные вычислительные процессы, на этом же множестве процессорных ядер возможно распараллеливание явных численных схем для фоновой интерполяции на нерегуляризованных сеточных узлах и в динамических центрах подвижных корпускул, что, по сути, и служит определению и исполнению законов гидромеханики в прямых вычислительных экспериментах.

## **Формирование этапов прямого вычислительного эксперимента на основе явных численных схем**

Современные многопроцессорные вычислительные системы вполне закономерно следуют лингвистическим изысканиям [20] и теоретическим поискам в области эффективности декларативных и функциональных языков программирования, доступным в практике проектирования и построения сложных инженерных вычислительных систем – прямых вычислительных экспериментов для решения тяжелых прикладных задач гидромеханики. Если ориентироваться на формальные подходы, в которых собственно моделирование физических явлений и сопутствующие процессы управляются последовательными математическими операциями – законами механики в контексте декларативных алгоритмов, тогда реологический контроль и управление состоянием; динамическая интер-

---

<sup>37</sup> Graphics Processing Unit – многопроцессорное устройство визуализации трехмерных геометрических объектов и физических процессов, обеспечивающее параллельную обработку больших числовых массивов (в 2014 г. это – 8 Гб памяти DDR5 и 3072 вычислительных ядра на платах *Nvidia Grid K2 – Kepler*).

претация и визуализация всех числовых структур и массивов – ячеек сплошной среды и физических полей – будут наследовать достоинства прямого функционального (рекурсивного) доступа к параметрам трансформации геометрических базисов, и управляемого воздействия на критерии состояния элементарных вычислительных объектов, что требуется для динамического выбора адекватных математических моделей и вычислительных операций механики сплошных сред.

Множество независимых процессоров с общей оперативной памятью, характерное для современных графических комплексов (GPU), допускает сквозное распараллеливание вычислений с разрешением независимого выбора моделирующих алгоритмов вплоть до каждого числового объекта. Среди «революционных» новаций современного параллельного программирования стало возвращение прямого доступа к быстрым вычислительным операциям на уровень прикладных разработок<sup>38</sup>, что формально служит возрождению созидательного диалога между инженерами разработчиками арифметико-логических устройств и прикладными программистами – математиками.

Трехмерная тензорная математика ориентирована на создание прямых вычислительных экспериментов при моделировании сложных явлений физической теории поля и нестационарных процессов в задачах прикладной гидромеханики, что на практике ориентировано на последовательное отображение архитектуры цифрового вычислительного комплекса в геометрическом построении нерегуляризованных сеточных пространств для явных численных схем последовательного интегрирования первого порядка в сопряженных этапах континуально-корпускулярного вычислительного эксперимента:

1. Континуально-корпускулярное разделение вычислительного эксперимента в гидромеханике строится в связанном сеточном пространстве дискретных физических величин, изначально определяемых в размерной форме единой абсолютной системе координат с использованием скалярных, векторных и тензорных характеристик состояния и законов трансформации подвижной и деформируемой сплошной среды;

2. В операциях тензорного произведения, с участием внешних (массовых) сил и внутренних (поверхностных) напряжений, за расчетный интервал времени перестраивается внутреннее состояние каждой расчетной ячейки по образу независимого существования крупной частицы жидкости – виртуального числового объекта, аккумулирующего внутреннюю энергию и влияющего на кинематические реакции в интерполяционном перестроении обновляемых физических полей в исходных расчетных узлах;

3. При весьма сложных физических законах гидромеханики включается дополнительный третий этап вычислений для контроля и корректировки внутреннего состояния частиц жидкости, где выполняется согласование законов сохранения массы и количества движения свободных частиц жидкости с помощью интерполяции физических полей в узлах и центрах масс расчетных ячеек сеточной области; для центровки сопутствующих вычислений на двух главных этапах вычислительного эксперимента по скалярному аргументу – времени.

В проектировании этапов вычислительного эксперимента, при построении взаимосвязанных и взаимозависимых вычислительных блоков, должны соблюдаться особые правила алгоритмического конструирования геометрических и естественно-физических операций с предопределенным физическим содержанием, что формально приводит к существенному ограничению допустимого множества арифметических действий в трехмерной тензорной математике, в отличие от многовариантности используемых операций из традиционных разделов тензорного исчисления с элементами аналитической геометрии и линейной алгебры.

---

<sup>38</sup> В GPU регистры и локальная память арифметико-логического устройства не участвуют в неявном сегментировании или фоновом кэшировании, что важно для сохранения эффективности вычислений на процессорах с усложненной логикой.

## Общее заключение

Теоретические исследования и решения прикладных задач относятся, в первую очередь, к созданию морских вычислительных экспериментов, активно изучавшихся в стенах Ленинградской академической школы корабельной гидромеханики, теории и мореходности корабля ...

Настоящее исследование посвящено поискам обобщенных функциональных и алгоритмических методов построения прямых вычислительных экспериментов с явными численными схемами для моделирования в гидроаэромеханике, позволяющими в тензорной форме контролировать состояние трехмерных вычислительных объектов и процессов для повсеместной локальной адаптации решений к реальным законам движения или эмпирическим и асимптотическим зависимостям при оценке внутреннего состояния сплошной среды.

Аппарат трехмерной тензорной математики естественным образом встраивается в конечно-разностные операции метода крупных частиц (конечного объема) жидкости для строгого и однозначного представления физических законов в ближайшей окрестности элементарной частицы сплошной среды. Вычислительные модели ограничиваются линейными аппроксимациями для прямого континуального этапа моделирования взаимодействия смежных ячеек сплошной среды, которые при обратном пространственном дифференцировании отмечаются корпускулярными связями с присоединенными вращательными спинами и аккумулярованными дипольными моментами, замыкающими вычислительные процессы в соответствии с заданными физическими законами механики сплошных сред.

Разделение этапов вычислительного эксперимента по условно независимым физическим процессам становится естественным, что необходимо для сквозного распараллеливания вычислительных потоков с возможностью динамического выбора адекватных законов гидромеханики в зависимости от состояния тензорных инвариантов для реологического состояния сплошной среды и аппроксимационных особенностей трансформаций и взаимодействия числовых объектов в функциональной среде компьютерных операций.

.....

Объектно-ориентированная среда прикладного программирования связывает числовые объекты арифметико-логическими операциями:

1) логические или эмпирические алгоритмы формализуют законы прикладной гидромеханики, способы формирования и методы анализа текущего состояния сплошной среды в условиях интенсивной трансформации числовых объектов;

2) сложение применяется к числовым объектам в едином геометрическом базисе при строгом соответствии физических размерностей, в рамках predetermined законов гидромеханики (пп. 1);

3) произведение выполняется с векторами и тензорами в дуальных координатных базисах, что исключает повышение ранга в одночленных произведениях, если это не покрывается синтезом алгоритмов (пп. 1) или анализом числовых объектов (пп. 2).

Алгоритмические последовательности управляют числовыми объектами, формализующими реологические свойства и законы движения в континуально-корпускулярном представлении механики сплошных сред:

1) скалярные или инвариантные величины, например время  $t$ , участвуют в операциях произведения или представляются производными от любых числовых объектов;

2) векторные величины участвуют в операциях сложения только с соизмеримыми векторами, или в операциях произведения с тензорами для изменения координатных базисов;

3) тензорные величины синтезируют числовые объекты или характеризуют состояние крупных частиц жидкости, представляя геометрические деформации в качестве физических явлений и процессов гидромеханики в функции скалярного времени.

С использованием тензорных объектов формулируются основные законы гидромеханики, а их виртуальное конструирование и текущий анализ состояния образуют этапы прямого численного моделирования.

## Литература

1. *Андерсен Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, 1990. Том 1,2. 726 с.
2. *Астарита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. – М.: Мир, 1978. – 309 с.
3. *Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М.* Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. – М.: Наука, 1982. 370 с.
4. *Богданов А. В., Дегтярев А. Б., Храмушин В. Н.* Трехмерная тензорная математика вычислительных экспериментов в гидромеханике // Вычислительные технологии в естественных науках. Методы суперкомпьютерного моделирования. Серия «Механика, управление, информатика». Часть 3. Сборник трудов ИКИ РАН 17–19 ноября 2015 г. Россия, Таруса, Под ред. Р. Р. Назирова, Л. Н. Щура, стр. 34-48.
5. *Войткунский Я. И., Фадеев М. И., Федяевский К. К.* Гидромеханика. – Л.: Судостроение. 1982. – 456 с.
6. *Готман А. Ш.* Тензорное исчисление. – Новосибирск: Новосибирская государственная академия водного транспорта, 2007. – 129 с.
7. *Дегтярев А. Б., Храмушин В. Н.* Проектирование и построение вычислительных экспериментов в гидромеханике с использованием явных численных схем и алгоритмов тензорной математики / Математическое моделирование. М.: – 2014, том 26, № 11, стр. 4-17.
8. *Декарт Рене.* Рассуждение о методе с приложениями. Диоптрика, метеоры, геометрия. – Л.: изд-во АН СССР, 1953. – 657 с.
9. *Зоммерфельд А.* Механика деформируемых сред. – М.: Издательство иностранной литературы. 1954. – 491 с.
10. *Кильчевский Н. А.* Элементы тензорного исчисления и его приложения к механике. – М.: Гостехиздат. 1954. 1 – 67 с.
11. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. – М.: Наука, 1965. – 424 с.
12. *Льоцци Марио.* История Физики, – М.: Мир, 1970, – 464 с.
13. *Мак-Коннел А. Дж.* Введение в тензорный анализ, 1963. – М.: Наука. – 411 с.
14. *Ньютон Исаак.* Математические начала натуральной философии / Собрание трудов академика А.Н. Крылова. Том VII. Перевод с латинского. – М.-Л.: изд-во АН СССР, 1936. Репринтное воспроизведение: М.: Наука, 1989, – 712 с.
15. *Прандтль Л., Титъенс О.* Гидро- и аэромеханика. Т. 1. Равновесие. Движение жидкостей без трения. 1932. – 222 с., Т. 2. Движение жидкостей с трением и технические приложения. М. Л.: Гостехиздат, 1935. – 312 с.
16. *Селиванов В. В., Бабкин А. В.* Прикладная механика сплошных сред. Т.1. Основы механики сплошных сред. – М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 1998. – 368 с.
17. *Сокольников И. С.* Тензорный анализ. Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред. – М.: Наука. 1971, – 376 с.

18. *Филлин А.Н.* Прикладная механика твердого деформируемого тела. Т.1. - М.: Наука, 1975, 832 с.
19. *Харлоу Ф.* Численный метод частиц в ячейках для гидродинамики // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967, стр. 316-342.
20. *Храмушин В. Н.* О постановке вычислительного эксперимента в гидромеханике. Препринт. – Юж.-Сах.: ИМГиГ, 1988. – 41 с.
21. *Храмушин В. Н.* Трехмерная тензорная математика вычислительных экспериментов в гидромеханике. – Владивосток: ДВО РАН, 2005. – 212 с.
22. *Эглит М. Э.* Лекции по основам механики сплошных сред. – М.: Издательство Московского университета, 2008. – 318 с.
23. *Bogdanov A. V. and Khramushin V. N.* Tensor Arithmetic, Geometry and Mathematical Principles of Fluid Mechanics in the Implementation of Direct Computational Experiments // The European Physical Journal Conferences 02/2016; 108(02013): 6 p. DOI: 10.1051/epjconf/201610802013.
24. *Degtyarev A.B. and Khramushin V.N.* Coordinate Systems, Numerical Objects and Algorithmic Operations of Computational Experiments in Fluid Mechanics // The European Physical Journal Conferences 02/2016 108(02018): 6 p. DOI: 10.1051/epjconf/201610802018.
25. Программа построения числовых объектов и функций трехмерной тензорной математики для вычислительных экспериментов в гидромеханике (Tensor) СПбГУ, Роспатент № 2013619727

## Приложение А. Основные утверждения исчисления флюксий

*Все же, что не выводится из явлений, должно называться гипотезою, гипотезам же метафизическим, физическим, механическим, скрытым свойствам, не место в экспериментальной философии.*

*Исаак Ньютон*

Современная история физико-математических наук берет свое начало от фундаментальных исследований и многочисленных опытов классической механики Исаака Ньютона, обладавшего изрядным трудолюбием и изобретательностью. Его аналитические обоснования механики, геометрический и вычислительный аппарат в форме дифференциальных разностей (*флюксий*), успешно используются и сегодня для решения самых разнообразных технических задач.

Исчисление флюксий Исаака Ньютона<sup>39</sup> – исторически первый и наиболее наглядный пример геометрического представления дифференциального исчисления в виде специальных вычислительных моделей – конечных разностей первого порядка:

$$\dot{\Phi} \cdot t = \Phi(T+t) - \Phi(T).$$

$\Phi(T)$  – флюента (лат. *fluens* – поток, течение) – непрерывно изменяющиеся пространственные координаты движущейся точки (*функция времени*);

$\dot{\Phi}$  – флюксия (лат. *fluxio* – изменяющееся течение, истечение) – скорость изменения координат движущейся точки во времени (*скорость движения; математическая производная*);

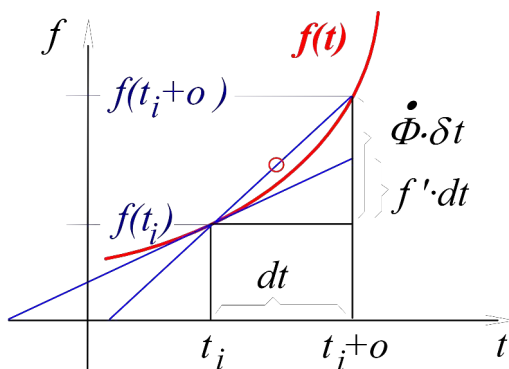
$\dot{\Phi} \cdot t$  – момент – полное приращение функции за малый (расчетный) интервал времени ( $\Delta\Phi$ ,  $df$  – *дифференциал – приращение функции; – конечные разности*).

Представляя флюксии (производные) в виде разделенных разностей:

$$\dot{\Phi} = \frac{\Phi(T+\delta t) - \Phi(T)}{\delta t},$$

можно отметить, что если интервал аргумента стремится к нулю  $\delta t \rightarrow 0$ , то численное решение сводится к определению производной:  $f' = \frac{df}{dt}$ .

Поиск флюксий по Ньютону определяется в контексте поэлементного добавления моментов ко всем, зависящим от времени функциям.



<sup>39</sup> Метод флюксий и бесконечных рядов (1670 – 71).

Пусть, например:  $\Phi(x,y,z,t) = x^2 + yz$ . При добавлении малых приращений аргумента – времени  $t$ , ожидается изменение исходной функции на величину ее флюксии  $\dot{\Phi}$  в произведении с тем же моментом времени  $t$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} \cdot t + \Phi(T) &= \Phi(T+t) = (x + \dot{x} \cdot t)^2 + (y + \dot{y} \cdot t) \cdot (z + \dot{z} \cdot t) = \\ &= x^2 + 2x\dot{x} \cdot t + (\dot{x} \cdot t)^2 + yz + y\dot{z} \cdot t + z\dot{y} \cdot t + \dot{y} \cdot \dot{z} \cdot t^2 \end{aligned}$$

Вычитая исходные флюенты  $\Phi(T)$  и компенсируя моменты  $t$  делением, записываем искомое выражение для флюксии – производной по времени:

$$\dot{\Phi} = \frac{\Phi(T+t) - \Phi(T)}{t} = 2x\dot{x} + y\dot{z} + z\dot{y} + (\underline{\dot{x}^2} + \dot{y}\dot{z}) \cdot t,$$

получаем традиционное выражение для производной от сложной функции, в том числе включающее весьма значимые дополнительные слагаемые в произведении с малым параметром  $t$ .

Обратная задача, как, например, нахождение маршрута движения по заданной скорости, естественным образом приводит к построению алгоритма численного интегрирования.

Дифференциально-разностное исчисление флюксий не накладывает ограничений ни на класс математических функций, ни на размерность пространства, в котором ведется исследование реальных физических процессов.

Впоследствии Ньютон осуждал процедуру отбрасывания слагаемых, содержащих моменты, за ее нестрогость, говоря, что: «*в математике недопустимо пренебрегать даже самыми малыми величинами*». Тем не менее, развивая анализ дифференциальных приближений в задачах механики, Ньютон приходит к построению полиномиальных рядов, способных определять неэлементарные функции, что и поныне имеет самое прямое отношение к решению прикладных вычислительных задач.

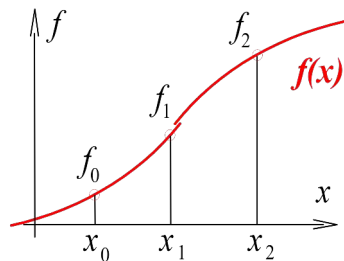
### Разделённые разности

Повышая порядок флюксии за счет вовлечения новых точек в разностное дифференцирование, Исаак Ньютон получил очень красивое и более чем оригинальное представление для интерполирующей функции, ставшей прототипом и основой для современных разложений в бесконечные ряды, полиномиальных аппроксимаций, и др.

Первый порядок аппроксимации с помощью разделенной разности:

$$f(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0);$$

Второй порядок разностной интерполяции выполняется на трех узловых точках (учет кривизны):



$$f(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\left(\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right) - \left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right)}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1).$$

Проверим:  $f(x_0) = f_0$  – т. к. множители при первой и второй разностях обращаются в ноль;

$f(x_1) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) = f_0 + f_1 - f_0 = f_1$  – член второго порядка обращается в ноль;

$$\begin{aligned} f(x_2) &= f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + \frac{\left(\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right) - \left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right)}{x_2 - x_0}(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = \\ &= f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + \left\{ \left(\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}\right) - \left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right) \right\} (x_2 - x_1) = \\ &= f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x_2 - x_0) + f_2 - f_1 - \left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right)(x_2 - x_1) = \\ &= f_0 + \left(\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}\right)(x_2 - x_0 - x_2 + x_1) + f_2 - f_1 = \\ &= f_0 + (f_1 - f_0) + f_2 - f_1 = f_2 \end{aligned}$$

Интерполяционный многочлен Ньютона может быть формализован с помощью произведения разностей аргумента и разделенных разностей функции в следующем виде.

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n C_k N_k(x),$$

$$N_k(x) = \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j); \quad N_0 = 1,$$

$$C_k = f(x_0; x_1; x_2; \dots; x_k) = \frac{f(x_1; x_2; \dots; x_k) - f(x_0; x_1; \dots; x_{k-1})}{x_k - x_0}.$$

При использовании *схемы спуска*, позволяющей повторно использовать величины разделенных разностей, получается наиболее эффективный вычислительный алгоритм полиномиальной интерполяции.

Существует тождественная запись интерполяционного полинома в форме Лагранжа, которая при явном не оптимизированном использовании не дает преимуществ по скорости вычислений, однако она сводится к тривиально простой алгоритмической записи.

$$F_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k \cdot \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

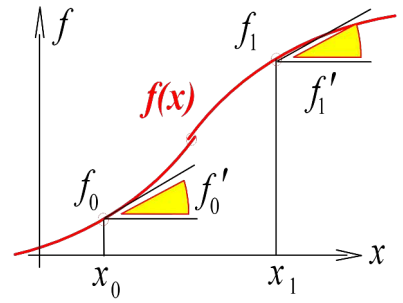
Интерполирующий многочлен второго порядка, определенный на трех произвольно расположенных аппроксимирующих узлах, представляется суммой произведений с конкретными узловыми значениями функции:

$$F_2(x) = f_0 \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + f_1 \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

### Задача № 1.

Построить математическую модель для реализации эффективного алгоритма интерполяции с наперед заданным поведением функции в узловых точках.

Необходимо построить этот полином и проверить на совпадение величин функции и ее производных в точках  $x_0$  и  $x_1$ .



$$f(x) = f_0 + f'_0 \cdot (x - x_0) + \frac{f_1 - f_0 - f'_0}{x_1 - x_0} (x - x_0)^2 +$$

$$+ \frac{f'_1 - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - \frac{f_1 - f_0 - f'_0}{x_1 - x_0}}{x_1 - x_0} (x - x_0)^2 (x - x_1)$$

После упрощения:

$$f(x) = f_0 + f'_0 \cdot (x - x_0) + \left( \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - f'_0 \right) \cdot \frac{(x - x_0)^2}{x_1 - x_0} +$$

$$+ \left( f'_0 - 2 \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + f'_1 \right) \frac{(x - x_0)^2 (x - x_1)}{(x_1 - x_0)^2}$$

Минимизируя количество операций умножения:

$$f(x) = f_0 + f'_0 \cdot (x - x_0) + \left[ \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - f'_0 + \left( f'_0 - 2 \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + f'_1 \right) \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} \right] \frac{(x - x_0)^2}{x_1 - x_0}$$

Это выражение называется многочленом Эрмита 2 степени (1878 г.).

Проверим на совпадение функции в узловых точках, и ее производных:

$f(x_0) = f_0$  – все члены с  $(x - x_0)$  сокращаются;

$$f(x_1) = f_0 + f'_0 \cdot (x_1 - x_0) + \left( \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - f'_0 \right) \cdot \frac{(x_1 - x_0)^2}{x_1 - x_0} =$$

$$= \underline{f_0} + \underline{f'_0} \cdot (x_1 - x_0) + f_1 - \underline{f_0} - \underline{f'_0} \cdot (x_1 - x_0) = f_1$$

Продифференцируем многочлен для проверки соответствия производных в его узлах:

$$f'(x) = f'_0 + 2 \cdot \left( \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - f'_0 \right) \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} +$$

$$+ 2 \cdot \left( f'_0 - 2 \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + f'_1 \right) \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_1 - x_0)^2} + \left( f'_0 - 2 \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + f'_1 \right) \frac{(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^2}$$

$f'(x_0) = f'_0$  – все члены содержащие  $(x - x_0)$  сокращаются;

$$f'(x_1) = f'_0 + 2 \cdot \left( \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - f'_0 \right) \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} + \left( f'_0 - 2 \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + f'_1 \right) \frac{(x_1 - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^2} =$$

$$= \underline{f'_0} + 2 \cdot \left( \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - \underline{f'_0} \right) + \left( \underline{f'_0} - 2 \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + f'_1 \right) = f'_1$$

### Линейная и кубическая интерполяция

Простейшая или линейная интерполирующая функция определяется главным дифференциалом, как:

$$f(x) = f_0 + f'_{01} \cdot (x - x_0) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Интерполяция по Эрмиту повышает до третьего порядка степень интерполяционного полинома на локальных участках, например с помощью независимого и предварительного расчета первых производных в узлах сетки:

$$f(x) = f_0 + f'_0 \cdot (x - x_0) + \left[ \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - f'_0 + \left( f'_0 - 2 \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + f'_1 \right) \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} \right] \frac{(x - x_0)^2}{x_1 - x_0},$$

и, после небольшой перегруппировки:

$$f(x) = f_0 + \left( f'_0 + \left[ \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} - f'_0 + \left( f'_0 - 2 \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} + f'_1 \right) \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} \right] \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \cdot (x - x_0),$$

основное интерполирующее выражение несколько упрощается, если используется сетка с фиксированным единичным шагом,  $x_1 - x_0 = 1$ :

$$f(x) = f_0 + \left\{ f'_0 + \left[ f_1 - f_0 - f'_0 + (f'_0 - 2 \cdot (f_1 - f_0) + f'_1) \cdot (x - x_0 - 1) \right] \cdot (x - x_0) \right\} \cdot (x - x_0).$$

Чтобы определить нелинейное влияние на интерполирующую функцию, можно исключить главный дифференциал из громоздкого выражения высокого порядка, а также для пушей простоты искусственно допустим условно нулевые значения исходной функции в узлах сетки.

Получается гладкая функция с отброшенным главным дифференциалом, что позволяет сделать оценки чисто гиперболических или кубических отклонений от линейной интерполяции с помощью следующего выражения:

$$f(x) = f'_0 \cdot (x - x_0) - \left[ f'_0 - (f'_0 + f'_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} \right] \cdot \frac{(x - x_0)^2}{x_1 - x_0},$$

перегруппировывая разности аргумента:

$$f(x) = \left( f'_0 - \left( f'_0 - (f'_0 + f'_1) \cdot \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} \right) \cdot \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right) \cdot (x - x_0),$$

и снова полагая постоянным шаг интерполяционной сетки, выражение упрощается:

$$f(x) = \left( f'_0 - \left( f'_0 - (f'_0 + f'_1) \cdot (x - x_0 - 1) \right) \cdot (x - x_0) \right) \cdot (x - x_0),$$

и для количественной оценки положим  $\delta x = 0,5$ :

$$f(x) = (f'_0 - (f'_0 + (f'_0 + f'_1) \cdot 0,5) \cdot 0,5) \cdot 0,5 = (f'_0 - f'_1) / 8,$$

что дает ноль при параллельности производных касательных и верную осьмушку (1/8) от градиентной горки, которая соответствует половине от половины высоты пересечения двух градиентных касательных, составляющих четвертинку (1/4) шага сетки по суммарной отсечке для удвоенной величины условно единичных производных.

Своеобразное исключение ... разностью производных градиентного роста функции, что справедливо, отчасти, для сетки с равным шагом ... .

На практике симметричная относительно базовой точки производная может быть вычислена по смежным с ней значениям функции, что формально приводит к небольшому интерполяционному сглаживанию, помогая удерживать функцию в пределах касательной по градиенту смежных величин по узлам равномерной сетки.

$$f'_0(x) = (f_1 - f_{-1}) / 2;$$

$$f'_1(x) = (f_2 - f_0) / 2,$$

где на границах необходимо использовать некий экстраполяционный подход, возможно с небольшим сглаживанием на концах сеточных функций:

$$f'_0(x) = (f_1 - f_0 - 0,4 \cdot f'_1) / 0,6;$$

$$f'_1(x) = (f_0 - f_{-1} - 0,4 \cdot f'_{-1}) / 0,6.$$

~~Почти то же самое получится при условно-автоматической экстраполяции, получающейся при сдвиге контрольной точки на один узел от края сеточного массива. ...~~

Это выражение называется многочленом Эрмита 2 степени (1878 г). Проверим на

...

Поверочное решение задач с помощью разностных аппроксимаций систем дифференциальных уравнений в частных производных необходимо для сверки прямых вычислительных экспериментов в гидромеханике, и сопоставления результатов как с известными аналитическими решениями, так и с натурными экспериментами для аналогичных модельных течений.

Цифровая вычислительная техника, *в отличие от аналоговой*, не позволяет в точности моделировать непрерывные процессы механики сплошных сред, континуальные явления здесь подменяются числовыми массивами для многократных последовательных переборов разрозненных физических величин в операциях произведения и сложения с одними и теми же смежными числовыми объектами.

В *математической физике* классифицируются три варианта систем дифференциальных уравнений в частных производных, как уравнения движения механики второго порядка по времени, задействуемые в основных прикладных задачах механики сплошных сред. В канонической форме такие уравнения становятся похожими на обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка, определяющие свойства их аналитических решений и дающие им соответствующие названия, как эллиптические, параболические и гиперболические.

$$a \cdot \Phi_{xx} + 2 \cdot b \cdot \Phi_{xy} + c \cdot \Phi_{yy} + C(x, y, \Phi, \Phi_x, \Phi_y) = 0$$

общий интеграл обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка представляется в виде следующего характеристического уравнения:

$$a \cdot dx^2 + 2 \cdot b \cdot dx \cdot dy + c \cdot dy^2 = 0.$$

Класс уравнения определяется знаком детерминанта этого обобщенного интеграла второго порядка, получаемого после двойного дифференцирования по одной из переменных:

$$a \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \cdot b \cdot \frac{dy}{dx} + c = 0,$$

отчасти условно воспринимаемого затем, как решение обыкновенного квадратного уравнения:  $D = b^2 - a \cdot c$ .

Если:  $D < 0$  – *эллиптического* типа;

$D > 0$  – *гиперболического* типа;

$D = 0$  – *параболического* типа.

Кратко рассмотрим свойства этих классов дифференциальных уравнений в частных производных, приведенных к каноническому виду в применении к простейшим двумерным задачам, *так как в трехмерных задачах такие канонические интерпретации, как правило, являются смешанными и потому существенно более сложными для какой бы то ни было интерпретации.*

1)  $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + k \cdot \Phi + C = 0$ . Система дифференциальных уравнений в частных производных **эллиптического типа** описывает кинематику «идеальной» жидкости и чаще всего применяется к решению задач о течениях невязкой и несжимаемой жидкости. В этом классе уравнений известны аналитические (*и численные*) решения только для установившихся течений жидкости, получаемые исключительно с помощью неявных численных схем. Характерной особенностью численных расчетов таких течений является то, что любое изменение условий течения, пусть даже в одной из удаленных точек, требует пересчета всего массива данных, определяющего поле течения. Данный класс численных ре-

шений до настоящего времени не имеет сколь-нибудь простых и эффективных численных реализаций, особенно, если к уравнениям добавляются вязкостные поправки (*параболичность*), или делаются попытки построить модели нестационарных течений (*гиперболичность*).

Несмотря на то, что системы дифференциальных уравнений эллиптического типа определяют только стационарные течения, и не дают возможности для изучения процессов трансформации или зарождения гидромеханических процессов, их использование относится к наиболее сложному типу физических задач, как в плане их аналитического решения, так и при их асимптотическом упрощении или прямом численном моделировании. Однако именно этот класс уравнений в полной мере определяет законы классической гидродинамики, со всеми их красивыми явлениями и поразительными для теоретической механики парадоксами. Отметим, что реализация решений для течения идеальной жидкости вполне допускает бесконечные напряжения в локальных областях со сложными граничными условиями, что не может реализоваться на практике с реальными жидкостями, всегда обладающими как вязкостью, так и сжимаемостью.

Важнейшим свойством динамики идеальной жидкости является принцип прямолинейности взаимодействия удаленных друг от друга частиц жидкости, при соблюдении закона об изменении интенсивности такого взаимодействия обратно пропорционально квадрату расстояния между ними. Это важнейшее свойство ближнего взаимодействия (*т.е. в пределах допустимости линейных аппроксимаций численных решений*), далее будет использовано при построении обобщающей тензорной теории для реализации вычислительных экспериментов гидромеханики реальной жидкости.

2)  $\Phi_{xx} + \kappa \cdot \Phi_y + C = 0$ . Система дифференциальных уравнений в частных производных **параболического типа** описывает процессы типа диффузии или распространения тепловой энергии, где скорость процесса зависит от интенсивности распределенных полей. Это класс наиболее простых динамических уравнений, для которых хорошо отработаны вычислительные задачи в применении к нестационарным процессам, в том числе протекающим в сплошных средах с анизотропными свойствами. Однако и для параболических уравнений обычно не получается наглядных и явных вычислительных схем (*даже в одномерных случаях*), но зато и не возникает непреодолимых трудностей с вычислительной устойчивостью или аппроксимационной гладкостью пространственных решений.

3)  $\Phi_{xy} + \kappa \cdot \Phi + C = 0$  или  $\Phi_{xx} - \Phi_{yy} + \kappa \cdot \Phi + C = 0$ . Системы дифференциальных уравнений в частных производных **гиперболического типа** обычно описывают процессы в упругих средах. Это наиболее изученные гидродинамические процессы, широко используемые во многих технических приложениях, связанных с излучением и регистрацией различных нестационарных и волновых процессов, в которых жидкая среда не принимает сколь-нибудь активного участия и практически не изменяет ни своих динамических, ни даже кинематических параметров (*при попытке включить в моделирование собственно течение жидкости или его конвективные составляющие, математическая модель немедленно становится полной, а ее представление в рамках гиперболических численных схем - неразрешимым*).

Благодаря математической простоте и сопутствующей наглядности, свойства волновых процессов наиболее изучены, они легко аппроксимируются как в прямых вычислительных экспериментах, так и в замысловатых аналитических обобщениях.

Это всевозможные световые, электромагнитные и акустические волны, трансформирующиеся на механических и электромагнитных резонаторах и преобразователях. Именно для таких слабоэнергетических процессов найдено множество эмпирических решений и строгих математических соотношений, которые во многих естественных науках превратились почти что в аксиомы. К примеру, принцип Гюйгенса или волновые законы рефракции, интерференции, дифракции и т.п., которые широко анализируются с помо-

щью множества наглядных аналогий, в основном опирающихся на одномерные математические аналитики.

Для гиперболических систем уравнений имеется множество теоретических решений и эмпирических зависимостей, - это уравнения, которые легко выводятся из простых предпосылок о динамике взаимодействия между расчетными частицами жидкости, заданными на обычных ячейках сеточной области. Такой способ построения вычислительных решений в гидромеханике наиболее близок к классическому определению «Метода конечного объема».

В частности, возможность предвычисления скорости движения волновых пакетов, зависящих от реологических свойств жидкой среды, позволяет выполнять геометрический анализ условий распространения волновой энергии с помощью быстро рассчитываемых картин волновых лучей и фронтов. Технические решения для волновой томографии, в акустических приближениях строятся с использованием разделения сигналов во времени, позволяя фиксировать параметры фронтальных и протяженных сигналов, с выделением амплитудно-частотных характеристик реверберации в сплошной среде и отраженных от препятствий опорных импульсов эха.

### Обобщенные варианты вычислительных моделей сплошной среды ||

1. В случае параболических уравнений теплопроводности на первом этапе строится поле градиентов тепловых полей; На втором этапе дивергенция этого векторного поля замыкает решение получением приращения температуры в функции времени.

2. В гиперболических уравнениях для волновых процессов на первом этапе определяется дифференциал по времени для векторного поля потоков в зависимости от пространственных градиентов плотности окружающей среды; На втором этапе из условий сохранения массы и энергии ведется расчет дивергенции поля скоростей для изменения исходной скалярной плотности в функции от приращения времени.

3. В эллиптических или полных уравнениях гидромеханики не происходит простых сверток векторных и скалярных полей, и новое поле потоков вычисляется по исходному векторному полю внешних массовых и тензорных поверхностных напряжений; Соответственно на втором этапе потребуется перерасчет как векторных полей массовых сил, так тензорных напряжений на границах элементарных частиц жидкости. По сути здесь, т.е. в полной задаче механики, один вычислительный этап строится условно кинематическим, чтобы на последующем определяться с механикой взаимодействия частиц жидкости – с реологией их внутренней трансформации.

## Приложение В. Представление вычислительных объектов (υπόθεση)

Распределение и управление оперативной памятью, при построении прямого вычислительного эксперимента с большими объемами данных, реализуется весьма нетривиальным машинно-зависимым комплексом алгоритмов низкого уровня.

В современном языке программирования **D** реализованы комплексные средства управления динамической памятью ЭВМ, в том числе обеспечивающие постоянное освобождение фрагментов с разорванными ссылками, и фоновое дефрагментирование всей доступной к использованию оперативной памяти. Очевидно, что без специальной аппаратной поддержки, такие средства высокоуровневого языка вовлекают системные компьютерные ресурсы не самым эффективным образом.

При использовании объектно-ориентированного языка C++ никаких стандартных средств не существует, и потому распределение и эффективность использования оперативной памяти полностью ложится на разработчика вычислительного эксперимента. Если же вычислительная среда образуется многопроцессорными системами с разделенной или локализованной оперативной памятью, так же как и в случае использования нерегуляризованных сеточных пространств, создание такого комплекса процедур на предельно низком уровне программирования становится обязательным.

```
// При распределении памяти резервируется четыре слова для хранения
// длины массива в байтах, для матриц во втором слове – количество строк
// Если длина указывается нулевой, то происходит освобождение
// существующего массива
// Если адрес нулевой - выделяется новый массив, иначе происходит
// перераспределения памяти, при котором начальный фрагмент
// сохраняется, добавленный - очищается
// Если при распределении двумерного массива в качестве длины строк
// указывается 0, то реальное распределение и памяти и управление
// типом и длиной строк производится в вызывающей программе.
// y – количество строк в матрице (фиксированном списке)
// y=0 – второй параметр не анализируется, а сама матрица удаляется
// s – длина строки в байтах
// s=0 – новые строки не выделяются, а старые не изменяются
#include <StdLib.h> // На выходе из запроса длина массива в байтах
size_t Allocate( void* A ); // или - количество строк матрицы
void *Allocate(size_t s, void *A=0); // Линейный массив в байтах
void **Allocate(size_t y, size_t s, void *A=0); // Массив массивов
```

При использовании перегруженных операторов для доступа к элементам многомерных массивов в языке C++ возможен как отладочный контроль индексации, так и автоматическое применение экстраполяционных алгоритмов или подбор инородных данных для исполнения граничных условий. При распределении или модификации числовых массивов реализовано сохранение информационного предиката длиной 128 бита (16 байт), содержащего основные характеристики матричного массива, что необходимо как для автоматизации работы со сложными числовыми структурами, так и с целью эффективного

перераспределения или полного ручного управления оперативной и отображаемой на внешних носителях памятью ЭВМ.

Необходимые условия для реализации прямых вычислительных экспериментов с глубоким контекстным связыванием алгоритмов и структур данных, как минимум создаются востребует расширение функциональных возможностей чисто алгоритмического языка и объектно-ориентированное обобщение вычислительных операций, которое осуществляется на основе мощных средств, основанных на базовых определениях и операциях языка программирования C++.

**Элементарные числовые объекты** конструируются для выполнения строго определенного и ограниченного количества операций над числовыми объектами, типа:

```
struct{ token s; int d } integer; // индексы и дискретные отсчеты
```

```
struct{ token s; double d } real; // скалярные физические величины
```

где:  $s$  – формализованный элемент или непустая ссылка, предназначенные для динамического применения конвертирующих или адаптирующих операций по ходу вычислительного эксперимента.

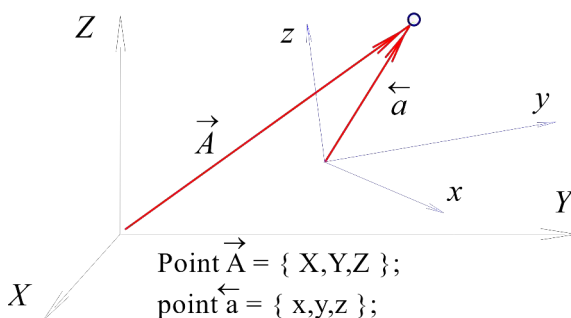
Описания физико-механических свойств течения жидкости в построениях вычислительных объектов для компилятора могут опираться на три основных варианта числовых структур – классов объектно-ориентированного языка программирования C++:

1. Скалярные числовые объекты служат также для индикаторов текущего времени и других инвариантных величин, не зависящих от системы координат и других связанных характеристик крупных частиц жидкости.

Например:

```
Event T; // абсолютное время от начала вычислительного эксперимента
```

```
real t; // шаг во времени для моделирования нестационарных процессов
```



**Рис. 19.** Программное и пространственное представление вектора точки.

2. Векторные величины определяют координатную точку, или задают некие свободные векторы (Рис. 19) в связанных пространствах:

```
typedef struct { Real X, Y, Z; } Point; // в абсолютных отсчетах
```

```
typedef struct { real x, y, z; } point; // внутри крупной частицы
```



используются для автоматических преобразований в соответствии с исходными установками в уравнениях аэрогидромеханики.

Как минимум, можно сформировать базовые значения s-предикатов, которые будут включаться во все числовые объекты в виде особой тройки двоичных бит:

- “000” –  $T$  – *скалярная величина в абсолютном базисе (как время),  
или другой безразмерный инвариант числового объекта;*  
→  
“001” –  $A$  – *вектор в глобальной системе координат (СК);*  
←  
“010” –  $a$  – *вектор в локальном базисе сеточной ячейки - корпускулы;*  
“011” –  $t$  – *размерная скалярная величина в локальной системе отсчета;*  
^  
“100” –  $r$  – *тензор формы крупной частицы жидкости в глобальной СК;*  
<  
“101” –  $v$  – *смешанный базис проекций векторов на локальную СК;*  
>  
“110” –  $m$  – *базис локальных векторов в проекциях глобальной СК;*  
v  
“111” –  $\rho$  – *определение тензорной величины в локальном базисе.*

Оставшиеся 5 или 13 бит могут задействоваться в характеристиках текущего состояния смежных частиц жидкости, например, для контроля готовности к интерполяционным пересчётам на этапах согласования конвективных свойств и условий сохранения, или, при необходимости, динамического перехода к экстраполяционным процедурам на свободных границах и в зонах вырождения численных решений.

Непрерывный контроль битовых масок-признаков особенно важен в случае глубокого распараллеливания вычислительных операций на сложных гибридных системах, разделяющих моделирование на большие пространственные блоки, между которыми должна осуществляться автоматическая конвертация числовых структур для согласования решений на смежных границах или в областях с перехлестом нерегулярных сеточных аппроксимаций, и где возможны непредсказуемые перестроения структуры физических полей аэрогидромеханики.

Важным элементом программной среды обязательно становится объект **Screen** – «экран», в котором определяются параметры сцены для визуализации пространственных объектов. С этим объектом связывается инициализация всех параметров графического экрана в контекстно-зависимой среде программирования OpenGL, а также интерфейсы управления вычислительными процессами с помощью внешних интерфейсов типа мышки, клавиатуры, или комплексов телеметрии и геопозиционирования.

```

//
//     Определение графического окна при явном объявлении нового объекта
//
struct Screen: Basis // присоединение глобального базиса
{ Screen():Basis(),inDraw(){} // конструктор с полем [-1:1,-1:1,-1:1]
  Screen( Real Size ): Basis( Size ), inDraw(){}
  void line( Vector& a, Vector& b, GLubyte *color );
  void cubic( Basis& Model, bool painting );
  void arrow( Vector& a,Vector& b,Real l,GLubyte *color );
  void axis( Real L );
//
//     и прочие прямые и обратные - графические и текстовые процедуры
//
  void Lighting(); // начальная настройка контекста OpenGL
  bool (*inDraw)(); // для мышки, чтобы зря не разгонять процессор
};

```

В приведенном примере показаны простейшие примеры методов прорисовки трехмерных графических объектов, такие как линии, стрелка и координатные оси, необходимые для общего оформления графических сцен. При инициализации класса (заголовок структуры) происходит установка пространственного куба – сцены для визуализации, а также указывается точка входа в процедуру перерисовки всего изображения, которая должна исполняться по программным прерываниям, инициированным как внутри, так и снаружи обобщенного числового объекта.

Архитектура современных рабочих станций основывается на многопроцессорности. Это способствует разделению процессов на модельные<sup>40</sup>, видовые<sup>41</sup> и функционально-растровые преобразования<sup>42</sup> и выполнению их отдельно друг от друга. Видовые и модельные преобразования не имеют отличий с математической точки зрения, они относятся к разным подсистемам графического конвейера и применяются в разное время [5].

Функционально-растровые преобразования являются самыми ресурсоемкими и долгими. Ускорение этого процесса достигается за счет введения дополнительных вычислительных мощностей, которые способствуют формированию изображений в растровой форме.

Высокопроизводительные графические процессоры реализуют параллельные программно-технические средства для формирования изображения непосредственно в ходе вычислительного эксперимента с помощью коротких метакоманд, при этом практическая визуализация выполняется без вмешательства со стороны центрального процессора даже в случае исполнения сложнейших графических функций.

## Плоский вихресточник

$$w = \frac{Q - i\Gamma}{2 \cdot \pi} \cdot \ln z, \quad Q - \text{источник}; \quad \Gamma - \text{циркуляция.}$$

<sup>40</sup> Модельные преобразования – преобразования, используемые для построения модели объекта в системе координат пользователя.

<sup>41</sup> Видовые преобразования – преобразования, используемые после модельных при выполнении отображения в поле вывода.

<sup>42</sup> Функционально-растровые преобразования – преобразование примитивов вывода в растровую форму.

Разделяя комплексный потенциал на действительную и мнимую функции, как потенциал скорости и функцию тока:

$$w_Q = \varphi + i \cdot \psi = Q \cdot (\ln r + i \cdot \alpha) / 2\pi;$$

$$w_\Gamma = \varphi + i \cdot \psi = \Gamma \cdot (-\alpha + i \cdot \ln r) / 2\pi.$$

Вещественная часть комплексного потенциала скорости определяет радиальное растекание жидкости, а мнимая – циркуляционные течения по окружности:

$$v = \frac{dw}{dz} = \frac{Q + i \cdot \Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r}.$$

### Плоский диполь.

$$w = \frac{M}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{1}{z}$$

В определении диполя векторное (комплексное) значение дипольного момента.

$$v = \frac{-M}{2 \cdot \pi \cdot z^2}$$

Обтекание круга:  $M = v_\infty \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_0^2 = \cdot v_\infty \cdot$

где – площадь круга в поперечном сечении обтекаемого цилиндра. Здесь в определении плоского дипольного момента отсутствует присоединенная масса, которая должна удваивать инерционные характеристики цилиндра в движении с ускорением.

### Диполь в пространстве

Для построения полного поля скорости от одиночного пространственного диполя можно воспользоваться выводами из теории трехмерных течений на основе потенциалов и функций тока [Войткунский, 1968], в осевой плоскости  $\{x, r^*\}$ :

$$\Phi = v_\infty x + \varphi = v_\infty x + \frac{M}{4\pi} \frac{x}{(x^2 + r^{*2})^{3/2}} - \text{пространственный потенциал};$$

$$\Psi = v_\infty \frac{r^{*2}}{2} + \psi = v_\infty \frac{r^{*2}}{2} - \frac{M}{4\pi} \frac{r^{*2}}{(x^2 + r^{*2})^{3/2}} - \text{функции поверхности тока}.$$

Из нулевой линии тока  $\Psi = 0$  – получается зависимость между скоростью окружающего потока  $v_\infty$ , дипольным моментом  $M$  и радиусом сферы  $r_0$ :

$$r_0^3 = \frac{M}{2 \cdot \pi \cdot v_\infty} \quad \text{или} \quad M = v_\infty \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_0^3 = 1,5 \cdot v_\infty \cdot \Omega \quad (\text{где } \Omega - \text{объем шарика}),$$

Полагая потенциал скоростей в сферических координатах для осевой плоскости обтекаемого шара со скалярным произведением векторов набегающего потока  $v_\infty$  и дипольного момента  $\vec{M}$ :

$$\Phi = v_\infty \cdot \left( r + \frac{r_0^3}{2 \cdot r^2} \right) \cdot \cos \theta = \left( \vec{v}_\infty \cdot \frac{\vec{M}}{|M|} \right) \cdot \left( r + \frac{r_0^3}{2 \cdot r^2} \right).$$

(где вектор направления дипольного момента).

Дифференцирование по радиусам и касательным к окружностям приводит к построению полного поля скорости в полярных координатах на осевой плоскости, секущей сферу по диаметру в направлении оси дипольного момента [Войткунский, 1968]:

$$\text{Радиальная скорость: } v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = v_\infty \cdot \left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right) \cdot \cos \theta;$$

$$\text{Орбитальная скорость: } v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -v_\infty \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{r_0^3}{r^3}\right) \cdot \sin \theta,$$

где:  $\theta$  – угол между вектором диполя с направлением на точку  $r$  в осевой плоскости сферы.

$$\text{На поверхности сферы: } v_r = 0; \quad v_\theta = 1,5 \cdot v_\infty \cdot \sin \theta.$$

$$\text{Коэффициент давления на сфере: } p = 1 - (v/v_\infty)^2 = 1 - 2,25 \cdot \sin^2 \theta.$$

Кинетическая энергия для полного потока жидкости в окрестности сферы получается интегрированием потенциала по ее поверхности [Павленко, 1988]:

$$K_e = \frac{\rho}{2} \iint_S \varphi \cdot \nabla \varphi \cdot \vec{n} \, ds,$$

где:  $\vec{n}$  – единичная нормаль элементарной площадки  $ds$  на замкнутой поверхности  $\Omega$ :

$$+K_e = \frac{\rho}{2} \frac{v_\infty^2}{3} \cdot \frac{2}{3} \pi \cdot r_0^3 = \frac{\rho}{2} \frac{v_\infty^2}{2} \cdot \frac{\Omega}{2}. \quad (11)$$

В движении шара участвует дополнительный поток присоединенной массы<sup>43</sup> жидкости, составляющей половину объема дипольной сферы. Присоединенная масса учитывается в инерционных и энергетических зависимостях, связанных с движением элементарного жидкого объекта.

<sup>43</sup>Присоединенные массы для плоского диска:  $\lambda_{11} = 8/3 \cdot \rho \cdot r^3$ , что на 27,3% больше, чем у сферы:  $\lambda_{11} = 2/3 \cdot \pi \cdot \rho \cdot r^3$  с таким же радиусом: К диску также добавляются внешние инерционные реакции при его поперечном вращении:  $\lambda_{66} = 16/45 \cdot \rho \cdot r^5$ .

## ??? временные замечания

Ocean — Engineering. В математической модели плоских трохойдальных волн существует потенциал Лапласа для всего поля течения, и, одновременно, в лагранжевом представлении траекторий малых континуумов обнаруживается реальное вихревое поле для крутого морского волнения:

$$h_w(x, z) = A \cdot e^{-kz + i\sigma x} = A \cdot e^{-2\pi(z/\tau - x/\lambda)},$$

$$V_r = \sigma r_w; \quad r_w = A \cdot e^{-kz} = e^{-2\pi z/\tau}; \quad k \cdot \lambda = 2\pi; \quad \sigma \tau = 2\pi,$$

где:  $h_w$  – ордината волнового профиля;  $A$  – амплитуда на поверхности;  $z, x$  – глубина и горизонтальное отстояние;  $k, \lambda$  – частота формы и длина волны;  $\sigma \tau = 2\pi$  – частота и период во времени;  $V_r$  – модуль скорости орбитального движения;  $r_w$  – радиус кругового движения.

Решение для волн Герстнера<sup>44</sup> получено в 1802 году, и представляется как удивительное и поныне нецененное открытие универсальности лагранже-эйлеровых свойств элементарных частиц жидкости, повсеместно используемых в инженерной гидромеханике.

В историческом обзоре классических моделей механики сплошных сред возможно упоминание Российской школы аэрогидромеханики Н. Е. Жуковского<sup>45</sup> [1949], приведшей в 1936 году к постановке проблемы «Обобщения основных уравнений аэродинамики и электродинамики», и озвученной в качестве предварительного научного сообщения Н. П. Кастериним<sup>46</sup>. В теории Кастерина рассмотрен вопрос ограниченности уравнений Эйлера и Максвелла<sup>47</sup> для описания реальных физических полей. Частичное уточнение уравнений с помощью вихревых теорем Гельмгольца до второго порядка (*по аналогии с Герстнером*), сводится к неким унифицированным и отчасти согласованным моделям математической теории поля для задач гидродинамики и электродинамики. Однако, как будет показано в главе III в тензорных функциях, уточнение с повышением порядка дифференциальных уравнений гидромеханики приводит к их переопределенности, к формальному вырождению изначальных физических свойств базисных числовых объектов.###

<sup>44</sup>Франц Иосиф Герстнер (*Franz-Joseph Ritter von Gerstner, 1756-1832*). В 1806 г основал Чешский технический институт в Праге, ставший прототипом для всех технических школ Германии. Теорию трохойдальных волн создал в 1802 г. с целью оптимального проектирования профилей морских дамб и плотин.

<sup>45</sup>Жуковский Николай Егорович (*1847-1921*) – основоположник современной гидроаэродинамики, вихревой теории крыла и движителей. Диссертация по «Кинематике жидкого тела» (1876). Активно развивал гидромеханические учения Кельвина. Впервые широко использовал функции комплексного переменного в прикладной аэрогидродинамике. В 1906 г. опубликовал «теорему Жуковского» о присоединенных вихрях и гидродинамических реакциях. «Функция Жуковского»:  $z = \zeta + l_1^2/\zeta$ , моделирует поле течения для обширного семейства теоретических профилей крыла.

<sup>46</sup>Кастерин Николай Петрович (*1869-1947*) – профессор Московского университета. Теория Кастерина посвящена рассмотрению с единых позиций математических полей гидроаэродинамики, электромагнетизма и строения атома.

<sup>47</sup>Максвелл Джеймс Клерк (*Maxwell James Clerk, 1831-1879*) – английский физик, член Лондонского королевского общества (1860), создатель классической теории электромагнитных полей, основанной на свойствах жидкого и упругого эфира.