

Исследование колебаний судовых стержневых конструкций с учетом сопротивления внешней среды различной плотности

*Н. А. Тарануха, О. В. Журбин, И. Н. Журбина*¹

Данная работа посвящена вопросам, связанным с решением задач динамики колеблющихся судовых конструкций. Рассмотрены присоединенные массы жидкости. Значительное внимание уделено учету сопротивления внешней и внутренней среды. Рассмотрено математическое моделирование колебаний на основе метода модуль-элементов. Важное место в работе уделено экспериментально-численному моделированию задач по определению сопротивления внешней и внутренней среды. В частности, здесь рассмотрено определение коэффициентов сопротивления для судовых систем, колеблющихся в воздухе, в воде, в дизельном топливе и в машинном масле.

Investigation of fluctuations of beam construction ship with resistance of external liquid of various density. *Nikolay A. Taranukha, Oleg V. Zhurbin, Irina N. Zhurbina, Komsomolsk-on-Amur State Technical University.*

The given work is devoted to questions connected to the decision of tasks of dynamics of fluctuating ship constructions. The added mass of a liquid are considered. The significant attention is given to the account of resistance of external and internal environment. The mathematical modeling of fluctuations is considered on the basis of a method of module-elements. The important place in work is given to experimental and numerical modeling of tasks by definition of resistance of external and internal environment. Definition of coefficients of resistance for the ship constructions fluctuating in air, in water, in diesel fuel and in lubricating oil is considered.

Введение

В составе корабля имеются конструкции, которые колеблются в жидкой среде различной плотности. Это и заборная вода, и дизельное топливо, и техническое масло. При этом среда оказывает на конструкции сопротивление неупругого характера. По природе своего возникновения и механизму воздействия [11] следует различать два вида неупругого сопротивления среды: неупругое сопротивление внутренней среды (внутри материала) и неупругое сопротивление внешней среды (например, сопротивления неупругого основания или окружающей вязкой жидкости).

¹ Тарануха Николай Алексеевич – зав. кафедрой кораблестроения, доктор технических наук, профессор; Журбин Олег Владимирович – доцент кафедры кораблестроения, кандидат технических наук; Журбина Ирина Николаевна – аспирант Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета.

О внутреннем и внешнем сопротивлении конструкционных материалов и жидкой среды

Одной из важнейших причин затухания свободных колебаний реальных конструкций является рассеяние энергии внутри материала (внутреннее трение в материале). Это внутреннее трение имеет в основном термическую природу [14]. Температурные изменения, вызванные деформацией поликристаллического металлического образца, меняются от зерна к зерну в зависимости от их кристаллографической ориентации, и происходит некоторое рассеяние энергии вследствие теплового потока между отдельными кристаллами. Если вызвать последовательные циклы нагрузки и разгрузки, то соответствующие диаграммы испытаний обнаружат петли гистерезиса, площади которых измеряют энергию, рассеянную за цикл.

Проблема колебаний значительно упрощается, если силы демпфирования пропорциональны скорости [14]. По этой причине силы сопротивления сложной природы для целей анализа очень часто заменяются эквивалентным вязким сопротивлением. Это эквивалентное сопротивление определяется из требования, чтобы оно вызывало то же рассеяние энергии за один цикл, что и действительная сила сопротивления. Этим способом, например, может быть исследовано затухание, вызываемое внутренним трением.

Достоверные оценки влияния внутреннего трения [2] важны при решении множества разнообразных задач, особенно для систем, при эксплуатации которых возможны резонансные режимы. Сначала экспериментально, а затем и теоретически было установлено, что внутреннее трение в материале может послужить причиной возникновения опасных колебаний, непосредственно угрожающих прочности конструкции [2].

Благодаря внутреннему трению происходит быстрое затухание свободных колебаний конструкций [8], резкое ограничение роста амплитуд вынужденных колебаний при резонансах, сильное снижение напряжений от импульсов и ударов в конструкциях с большим числом степеней свободы и выравнивание динамических напряжений в местах их концентрации. Вследствие этого внутреннее трение является одной из важнейших динамических характеристик материала и конструкции. Чем больше внутреннее трение в конструкции, тем при прочих равных условиях она выгоднее для восприятия динамических воздействий [8].

Общепринятая мера внутреннего трения определяется из энергетических соображений и представляет отношение

$$\psi = \frac{\Delta W}{W}, \quad (1)$$

где: ΔW – необратимо поглощенная телом за один цикл часть энергии циклических деформаций; W – потенциальная энергия тела, отвечающая амплитуде деформаций за тот же цикл (рис. 1а).

При этом предполагается, что потери на внешние сопротивления отсутствуют.

Величину ψ называют коэффициентом поглощения.

В динамические расчеты коэффициент ψ входит вместе с множителем $1/2\pi$, характеризующим цикличность процесса. Поэтому в теории удобнее оперировать с величиной:

$$\gamma = \frac{\psi}{2\pi}, \quad (2)$$

называемой коэффициентом внутреннего трения. Ее можно называть также коэффициентом неупругого сопротивления.

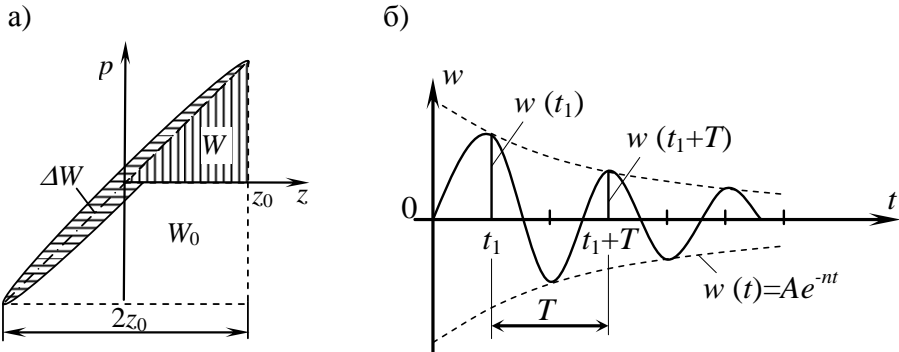


Рис. 1. Диаграмма работ (петля гистерезиса) (а) и график затухающего колебательно-го процесса (б)

Очень часто коэффициент поглощения ψ определяют по развертке свободных затухающих колебаний образца (рис. 1б) изучаемого материала через логарифмический декремент затухания:

$$\ln D = \ln \frac{w(t_1)}{w(t_1 + T)}. \quad (3)$$

Между ψ , $\ln D$ и γ существуют отношения:

$$\psi = 2 \ln D = 2\pi\gamma. \quad (4)$$

Для интереса и более глубокого понимания доли внутреннего поглощения энергии в материале укажем в табл. 1 численные значения коэффициента поглощения ψ_σ , приведенные в работе [7], а также численные значения коэффициента γ_σ для некоторых материалов и конструкций, с учетом результатов из работ [1, 3] и выражения (2).

Наряду с внутренним сопротивлением в процессе колебания на конструкцию часто действует внешнее сопротивление среды, например, для судна это сопротивление забортной воды или жидких нефтепродуктов в отсеках танкеров и топливных цистернах судов других типов.

Таблица 1

Значения коэффициентов поглощения энергии ψ и внутреннего сопротивления γ для некоторых материалов и конструкций

	Материал, конструкция	ψ_{σ} [7]	γ_{σ} [1, 3]
Материалы	Алюминий	0.02–0.04	0.003–0.006
	Бетон	0.26	0.041
	Дуб	0.11	0.017
	Железобетон	0.25	0.040
	Латунь	0.01	0.002
	Медь	0.33	0.053
	Никель	0.03	0.005
	Резина	0.20–1.20	0.032–0.190
	Сосна	0.07	0.011
	Сталь	0.01–0.03	0.002–0.005
	Стеклопластик	0.20–0.40	0.032–0.064
	Чугун серый	0.23	0.036
	Конструкции	Кирпичная кладка	0.25
Конструкция деревянная		0.30–0.35	0.048–0.056
Конструкция железобетонная		0.50	0.060–0.090
Конструкция стальная		0.16–0.18	0.025–0.028
Конструкция из стеклопластика		0.60–0.80	0.095–0.127
Стальные мосты		0.04–0.31	0.006–0.050
Судовые днищевые перекрытия		0.40–0.60	0.064–0.095
Судовые стальные мачты		0.20–0.45	0.032–0.072

В этом случае со стороны внешней среды на колеблющуюся систему начинают действовать силы сопротивления $S_{сопр}$, величина которых, как принято считать, пропорциональна скорости v движения тела в неупругой среде:

$$S_{сопр} = \beta \cdot v, \quad (5)$$

где β – коэффициент пропорциональности, есть коэффициент неупругого сопротивления внешней среды.

Считается, что этот коэффициент зависит от свойств внешней среды и может быть определен только экспериментально. Решать задачу по учету внутреннего и внешнего сопротивления в динамике простых и сложных колеблющихся систем будем на основе метода модуль-элементов (ММЭ).

Понятие о методе модуль-элементов

Метод модуль-элементов (ММЭ) [4, 5, 10, 11, 12] является одним из конечно-элементных методов и предназначен для исследования сложных тонкостенных конструкций и оболочек произвольной формы. Примерами таких оболочек могут служить судовой корпус или фюзеляж самолета. Расчет таких оболочек в настоящее время возможен только на основе численных методов, одним из которых является метод модуль-элементов.

Применительно к случаю рассмотрения сложной тонкостенной оболочки типа судовой корпуса вполне можно ограничиться расчленением ее на

сложные пространственные блоки, исходя, главным образом, из конструктивных соображений. Такой подход позволяет резко (на один – два порядка) сократить количество основных неизвестных задачи.

Метод модуль-элементов, прошедший практическую проверку в целой серии расчетов прочности корпусов реальных судов и сопоставленный с расчетами по другим методам, показал высокую эффективность, как по трудоемкости расчетов, так и по подробности и точности получаемых результатов [4, 5, 10, 11, 12, 13].

В качестве расчетной модели судового корпуса принимается произвольно нагруженная с произвольными граничными условиями непряматическая тонкостенная складчатая оболочка, подкреплённая продольно-поперечным набором и имеющая произвольные очертания в поперечных сечениях. Указанная оболочка рядом поперечных сечений может быть расчленена на пространственные МЭ (рис. 2), взаимодействующие друг с другом в узловых точках.

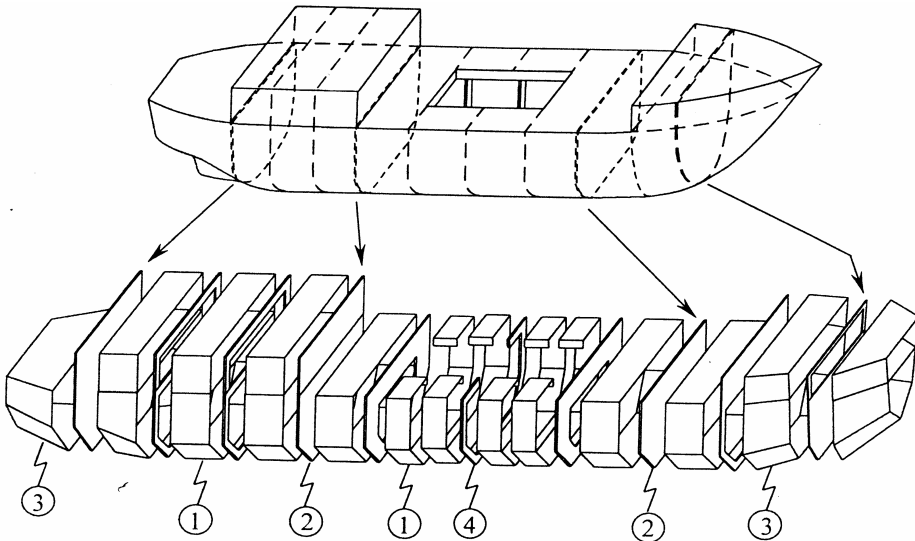


Рис. 2. Схема разбиения корпуса судна на модуль-элементы. Типы модуль-элементов: 1 – призматический; 2 – плоскостной; 3 – непряматический; 4 – рамный

При этом образуются модуль-элементы четырех типов: призматический МЭ, непряматический МЭ, плоскостной МЭ и рамный МЭ. Призматические и непряматические модуль-элементы применяются при моделировании соответственно цилиндрической вставки и оконечностей судна. Плоскостные модуль-элементы моделируют поперечные переборки, а рамные модуль-элементы предназначены для моделирования шпангоутных рам.

С помощью ММЭ успешно решаются задачи статической прочности, устойчивости и колебаний сложных конструкций, в том числе и с учетом сопротивления внутренней и внешней среды.

Учет внутреннего и внешнего сопротивления в постановке метода модуль-элементов

Наличие неупругих сил сопротивления приводит к тому, что происходит рассеивание (диссипация, потеря) в окружающее пространство части общей механической энергии колеблющейся системы.

Эта рассеивающаяся часть энергии системы может быть описана с помощью так называемой диссипативной функции (функции рассеивания) R . Понятие о диссипативной функции было введено Рэлеем в его классическом труде «Теория звука» (1878 г.).

Функция рассеивания R по структуре похожа на кинетическую энергию $T = m \cdot v^2 / 2$, однако отличается от нее другими положительными коэффициентами – коэффициентами рассеивания β_i (вместо коэффициентов инерции m_i).

Для системы с одной степенью свободы, обладающей коэффициентом рассеивания β и движущейся со скоростью v , функция рассеивания определяется непосредственно через выражение скорости зависимостью:

$$R = \beta \cdot v^2 / 2, \quad (6)$$

где β – коэффициент рассеивания, это то же самое, что упомянутый ранее коэффициент сопротивления среды, который определяется экспериментально (см. формулу (5)).

Однако с учетом того, что сопротивляющаяся неупругая среда может быть внешней и внутренней, т. е. с учетом гипотез Фохта и Сорокина, формула (6) должна быть записана следующим образом:

$$R = R^{внеш} + R^{внут} = \frac{1}{2} \beta v^2 + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{\omega} E v^2. \quad (7)$$

Если для колеблющейся системы область взаимодействия с внешней средой полностью совпадает с областью внутренней среды, то тогда функцию рассеивания (7) можно представить так:

$$R = \frac{1}{2} \left(\beta + \frac{\gamma}{\omega} E \right) v^2. \quad (8)$$

Однако такое совпадение внутренней и внешней областей у колеблющейся системы наблюдается не всегда. Например, такое несовпадение имеет место при колебаниях упругого тела, частично погруженного в вязкую жидкость (или частично взаимодействующего с неупругим твердым основанием).

Для системы с n степенями свободы функция рассеивания должна быть записана следующим образом:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i v_i^2, \quad (9)$$

где v_i – обобщенная скорость движения колеблющейся системы в направлении i -го обобщенного перемещения (разрешенного i -ой степенью свободы);

β_i – обобщенный коэффициент рассеивания (коэффициент сопротивления) колеблющейся системы, соответствующий i -му обобщенному перемещению.

Коэффициенты β_i определяются экспериментально.

С учетом наличия внешнего и внутреннего неупругого сопротивления функция рассеивания будет иметь вид:

$$R = R^{\text{внеш}} + R^{\text{внут}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \beta_i v_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \frac{\gamma_j}{\omega_j} E v_j^2, \quad (10)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, n$ – номера обобщенных перемещений, при осуществлении которых возникает внешнее сопротивление; $j = 1, 2, 3, \dots, m$ – номера обобщенных перемещений, при осуществлении которых возникает внутреннее сопротивление.

Если область внешнего сопротивления полностью совпадает с областью внутреннего сопротивления, то функцию рассеивания можно записать следующим образом:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\beta_i + \frac{\gamma_i}{\omega_i} E) v_i^2. \quad (11)$$

Запись R через обобщенные координаты приводит к тому, что функция рассеивания R является однородной положительной квадратичной функцией [15] скоростей обобщенных координат \dot{q}_i , т. е.:

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (12)$$

где b_{ij} – некоторые постоянные коэффициенты, имеющие смысл обобщенных коэффициентов сопротивления, записанных в обобщенных координатах.

Для определенности укажем здесь, что некоторые конкретные коэффициенты сопротивления можно, например, определить по формулам:

$$b_{ij}^{\text{внеш}} = b_{ij} = \int_s \beta(s) \chi_i(s) \chi_j(s) ds, \text{ при } i, j = 1, 2, 3, \dots, N; \quad (13)$$

$$b_{ij}^{\text{внут}} = \int_s \frac{E}{\omega_j} \gamma(s) \chi_i(s) \chi_j(s) ds, \text{ при } i, j = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (14)$$

где $\chi_i(s)$ и $\chi_j(s)$ – заданные координатные функции, принятые в ММЭ.

Более подробные рекомендации для выбора и построения различных координатных функций (которые могут быть достаточно сложными) приведены в работе [4].

Для случая установившегося гармонического движения применительно к ММЭ уравнение равновесия имеет вид [11]:

$$[M + M_{np}] \cdot (-\omega^2 \{Q\} e^{i\omega t}) + [B^{\text{внеш}} + B^{\text{внут}}] \cdot i\omega \{Q\} e^{i\omega t} + [K] \{Q\} e^{i\omega t} = \{P\} e^{i\omega t}. \quad (15)$$

После несложных преобразований получаем окончательный вид:

$$([K] - \omega^2[M + M_{np}] + i\omega[B^{внеш} + B^{внут}])\{Q\} = \{P\}, \quad (16)$$

где $[K]$ – матрица жесткости всей конструкции (оболочки); $[M]$ – матрица масс всей конструкции; $[M_{np}]$ – матрица присоединенных масс окружающей среды; $[B^{внеш}]$ – матрица сопротивления всей внешней среды; $[B^{внут}]$ – матрица сопротивления всей внутренней среды; $\{Q\}$ – матрица-вектор неизвестных обобщенных перемещений всей конструкции; $\{P\}$ – матрица-вектор внешних нагрузок; ω – частота вынужденных колебаний.

Решение этого уравнения (этой системы алгебраических уравнений) при заданных внешних нагрузках $\{P\}$ и их частотах вынужденных колебаний ω позволяет в принципе определить перемещения колеблющейся системы $\{Q\}$.

Экспериментальное моделирование задачи по определению коэффициентов сопротивления внутренней и внешней среды

В качестве внешних сред, которые являются основными для судовых конструкций в процессе эксплуатации и которые оказывают наибольшее сопротивление, были выбраны: воздух, вода, дизельное топливо, машинное масло.

Воздух – среда, выбранная для сравнения. Если предположить, что воздушная среда не оказывает существенного сопротивления колеблющейся системе, в этом случае параметры сопротивления можно считать соответствующими сопротивлению внутренней среды колеблющейся системы.

Вода – основная внешняя среда для всех объектов морской и речной техники.

Дизельное топливо – среда, с которой взаимодействуют конструкции топливных танков большинства судов и танкеров, перевозящих легкие нефтепродукты.

Машинное масло – среда, с которой взаимодействуют конструкции масляных танков обычных судов и танкеров, перевозящих тяжелые нефтепродукты.

В таких же условиях часто работают тонкостенные резервуары, предназначенные для хранения жидких продуктов.

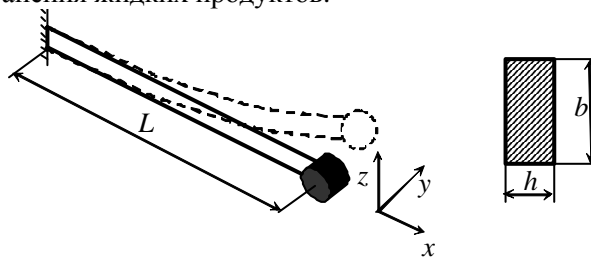


Рис. 3. Расчетная схема балки-консоли

Рассмотрим колебания консольной балки (рис. 3).

Параметры балки и материала следующие: $L = 0,335$ м, $b = 0,012$ м, $h = 0,0023$ м, $\rho = 7800$ кг/м³, $M_{зр} = 0,421$ кг, $E = 2,0 \cdot 10^{11}$ Н/м.

Левый торец балки жестко зашпелен, правый – свободен и имеет сосредоточенную массу в виде груза.

Для определения коэффициента β поступим следующим образом:

а) экспериментально определим амплитуды двух соседних колебаний $w_{эксн}(t_1)$ и $w_{эксн}(t_1+T)$. При этом одновременно можно определить и экспериментальный период колебаний $T_{эксн}$;

б) далее определяем экспериментальный декремент затухания $D_{эксн}$;

в) определяем экспериментальный коэффициент сопротивления $\beta_{эксн}$ по формуле:

$$\beta_{эксн} = 2m_{эксн} \frac{\ln D_{эксн}}{T_{эксн}} = 2m_{эксн} \cdot n_{эксн}. \quad (17)$$

При этом масса $m_{эксн}$ с учетом массы упругой связи $m_{упр.св.}$ для рассматриваемого случая определяется по формуле:

$$m_{эксн} = m + m_{упр.св.}, \quad (18)$$

где m – концевая (основная) масса колеблющейся системы. В рассматриваемом случае $m_{упр.св.} = 0,072 \frac{H}{M} \cdot сек^2$, $m = 0,421 \frac{H}{M} \cdot сек^2$.

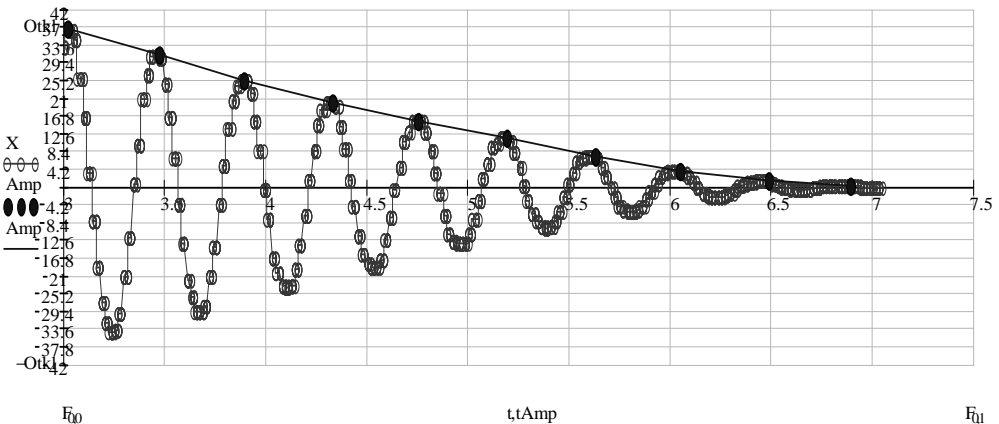


Рис. 4. График затухающих колебаний системы в воздухе

На рис. 4 изображен экспериментально полученный график затухающих колебаний.

В результате экспериментов в воздухе, воде, дизельном топливе и машинном масле были получены коэффициенты затухания и сопротивления ($n_{эксн}$, $\beta_{эксн}$, $\gamma\sigma$), приведенные в табл. 2.

Графически полученные результаты представлены на рис. 5.

Таблица 2

Экспериментальные коэффициенты затухания ($n_{\text{экс}}$) и сопротивления ($\beta_{\text{экс}}$, γ_{σ}), полученные при колебаниях стальной консольной балки в четырех внешних средах

Среда	Тип	Коэф. затухания $n_{\text{экс}}, \frac{1}{\text{сек}}$	Коэф. сопротивления ММЭ $\beta_{\text{экс}}, \frac{H}{M} \cdot \text{сек}$	Коэф. сопротивления γ_{σ}
Воздух	Суммарные	0,042	0,041	0,004
	Внутренние	0,042	0,041	0,004
	Внешние	≈ 0	≈ 0	≈ 0
Вода	Суммарные	0,239	0,236	0,031
	Внутренние	0,042	0,041	0,004
	Внешние	0,197	0,194	0,027
Дизельное топливо	Суммарные	0,347	0,342	0,046
	Внутренние	0,042	0,041	0,004
	Внешние	0,305	0,301	0,042
Машинное масло	Суммарные	0,660	0,651	0,089
	Внутренние	0,042	0,041	0,004
	Внешние	0,618	0,609	0,085

1

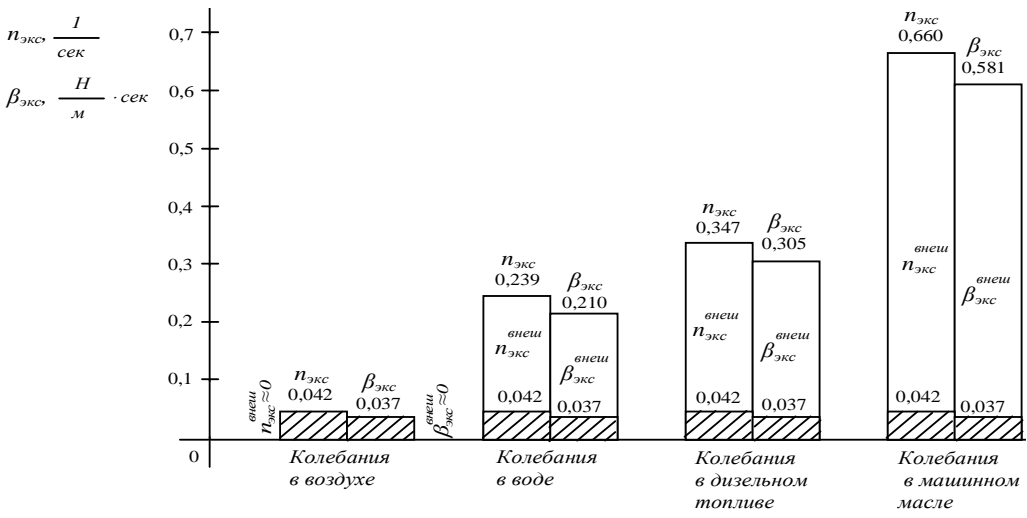


Рис. 5. Диаграмма экспериментальных коэффициентов затухания ($n_{\text{экс}}^{\text{внут}}$, $n_{\text{экс}}^{\text{внеш}}$) и сопротивления ($\beta_{\text{экс}}^{\text{внут}}$, $\beta_{\text{экс}}^{\text{внеш}}$), полученных при колебаниях стальной консольной балки в четырех внешних средах

Численное значение коэффициента сопротивления γ_{σ} , полученного из эксперимента, совпадает с табличным (см. табл. 1). Это, в свою очередь, подтверждает правильность экспериментальных данных и корректность проведенного эксперимента. Однако в ходе экспериментальных исследований,

кроме коэффициентов внутреннего сопротивления, были получены коэффициенты внешнего сопротивления, то есть коэффициенты сопротивления окружающей внешней среды (воды, дизельного топлива и машинного масла).

Сравнительные эксперименты и расчеты стальной балки консольного типа

Авторами настоящей статьи были выполнены экспериментальные исследования стальной балки, находящейся в различных условиях сопротивления от внешней среды. Результаты экспериментов сравнивались с результатами расчетов по различным методикам.

Таблица 3
Сравнительная таблица частот свободных колебаний консольной балки без учета сопротивления и с учетом сопротивления

	Без учета сопротивления	С учетом сопротивления внутренней среды	С учетом сопротивления внутренней среды и воды	С учетом сопротивления внутренней среды и дизельного топлива	С учетом сопротивления внутренней среды и машинного масла
Метод определения частоты	Частота λ_1 , Гц				
Эксперимент	–	3,32	2,54	2,39	2,36
Расчет по методике Е. С. Сорокина [8]	2,80	2,80 $\downarrow = 3,2 \cdot 10^{-4}$	—	—	—
Расчет по методике И. А. Биргера [6]	3,17	3,17 $\downarrow = 6,3 \cdot 10^{-6}$	—	—	—
МКЭ [16]	3,35	3,35 $\downarrow = 5,84 \cdot 10^{-5}$	—	—	—
ММЭ [авторы]	3,44	3,44 $\downarrow = 8,21 \cdot 10^{-5}$	2,64 $\downarrow = 0,80$	2,46 $\downarrow = 0,98$	2,43 $\downarrow = 1,01$

Сравнительные расчеты проводились по справочнику И. А. Биргера [6, т. 3, с. 302], Е. С. Сорокина [8], а также с помощью численных методов МКЭ и ММЭ. Для учета внутреннего сопротивления материала конструкции в [6, 8] использовалась зависимость (19).

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 + \gamma^2 / 4}}, \quad (19)$$

где λ_0 – собственная частота колебаний без сопротивления; $\gamma = 0,004$ – коэффициенты внутреннего сопротивления для стальных конструкций [9].

Результаты сведены в табл. 3. Необходимо отметить, что (формула 19) справедлива только для учета внутреннего сопротивления и не позволяет учитывать сопротивление внешних сред, таких как вода либо другая жидкость.

При решении задачи методом конечных элементов (МКЭ) балка разбивалась на шесть элементов. Каждый узел имел две степени свободы, поперечное смещение и угол поворота, т. е. всего 12 степеней свободы. В методе модуль-элементов (ММЭ) использовались шесть модуль элементов. Координатные функции [4] учитывали поперечные смещения узлов и моменты.

В табл. 3 стрелочками ↓ указана величина уменьшения частоты колебаний с сопротивлением в сравнении с частотой колебаний без сопротивления. Внутреннее сопротивление для стальной балки оказывает незначительное влияние на изменение частоты колебания, эта поправка порядка 10^{-5} Гц. Однако даже такое незначительное влияние приводит к затуханию колебаний. При учете сопротивления внешней среды эта поправка уже существенна.

Выводы

Подтверждена правильность экспериментальных данных и корректность проведенных экспериментов.

В ходе экспериментальных исследований, кроме коэффициентов внутреннего сопротивления, были получены коэффициенты внешнего сопротивления, то есть коэффициенты сопротивления окружающей внешней среды (воды, дизельного топлива и машинного масла).

Сравнительные расчеты показали достоверность расчетов по ММЭ и подтвердили возможность решать такие задачи с помощью ММЭ.

Сопротивление внутренней среды оказывает незначительное влияние на изменение частоты колебания. Однако даже такое незначительное влияние приводит к затухающему процессу колебания, а в резонансной зоне может привести к существенным последствиям.

Сопротивление внешней среды вносит существенную поправку в частоту колебания и для полноты понимания колебательного процесса ее необходимо учитывать.

Литература

1. Антоненко С. В. Вибрация судов: учебное пособие. – Владивосток: изд-во ДВГТУ, 2007. – 148 с.
2. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 196 с.
3. Постнов В. А., Калинин В. С., Ростовцев Д. М. Вибрация корабля. – Л.: Судостроение, 1983. – 248 с.
4. Постнов В. А., Тарануха Н. А. Метод модуль-элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1990. – 320 с.
5. Постнов В. А., Тарануха Н. А. Оценка напряженно-деформированного состояния корпуса судна методом модуль-элементов. – Судостроение, 1983. – № 5. – С. 5–8.

6. Прочность, устойчивость, колебания: справочник. – Том 3 / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968.
7. Сборовский А. К., Никольский Ю. А., Попов В. Д. Вибрация судов с корпусами из стеклопластиков. – Л.: Судостроение, 1967. – 191 с.
8. Сорокин Е. С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. – М.: изд-во литер. по строительству, архитектуре и строит. механике, 1960.
9. Сорокин Е. С. Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкций на колебания // Исследования по динамике сооружений. – М.: Госстройиздат, 1951.
10. Тарануха Н. А., Лейзерович Г. С. Динамика «неправильных» оболочек. – Владивосток: Дальнаука, 2005. – 423 с.
11. Тарануха Н. А., Журбин О. В. Математическое моделирование колебаний сложных оболочек. Гидроупругая постановка с учетом сопротивления. – Владивосток: Дальнаука, 2008. – 253 с.
12. Тарануха Н. А. Метод модуль-элементов в расчетах прочности тонкостенных конструкций // Труды ЛКИ: Механика и прочность судовых конструкций. – 1980. – С. 113–117.
13. Тарануха Н. А., Лейзерович Г. С. Новые решения в динамике «неправильных» оболочек. – Владивосток: Дальнаука, 2007. – 203 с.
14. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. – М.: Наука, 1967. – 444 с.
15. Яблонский А. А., Нореико С. С. Курс теории колебаний. – М.: Высшая школа, 1966. – 255 с.
16. MacNeal-Schwendler Corporation (MSC) Software NASTRAN (NASA Structural Analysis): <http://www.mscsoftware.com/Products/CAE-Tools/MSC-Nastran.aspx>