

## **Моделирование волн на конечной глубине при помощи волновой теории Стокса**

*Е. Е. Симаков<sup>1</sup>*

*Сахалинский государственный университет, Южно-Сахалинск*

Анализ некоторых аспектов проблемы описания поверхностных волн ориентирован на формулирование реалистичной модели на основе волновой теории Стокса. Показаны основные соотношения, необходимые для усовершенствования существующих методов моделирования, рассматриваются особенности создания модели на поверхности слабовязкой жидкости, сформулирована соответствующая краевая задача для отыскания решения с учетом вязкости и декремента затухания волны.

**Ключевые слова:** волна Стокса, дрейф Стокса, моделирование волн, волны на глубокой воде

### **Simulation of waves on finite depth with Stokes wave the.**

*Egor E. Simakov. Postgraduate student of information technologies department of the Sakhalin State University. e-mail: s-im1a@yandex.ru*

In the article attempt to create a mathematical model of wave propagation in the ocean. Propose to formulate the idea of creating an algorithm to construct a realistic model, based on the Stokes wave theory, and find basic relations necessary for modeling ocean processes. In order to improve the existing methods of modeling for waves on the surface of low-viscosity fluid, formulated the corresponding boundary problem and attempt to find the solution with the viscosity and the damping rate of the wave.

**Keywords:** wave Stokes, drift Stokes, waves simulation, waves in deep water

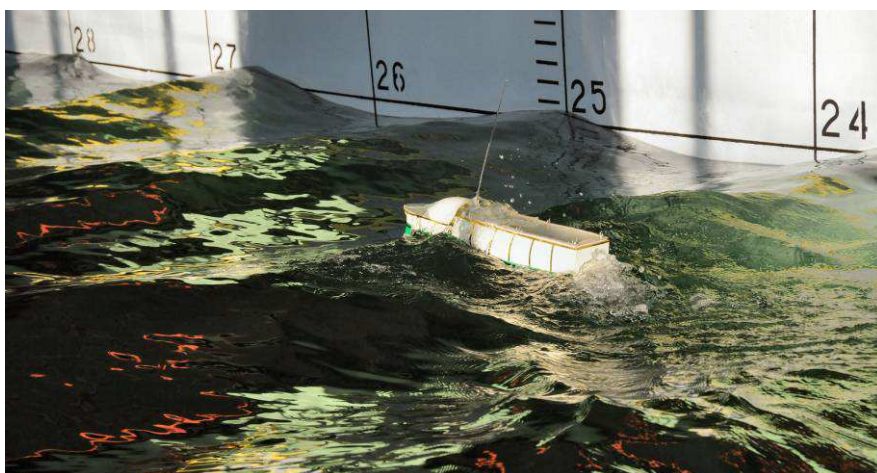
### ***Введение***

Для решения множества прикладных задач в областях морских инженерных изысканий, мореплавания, обеспечения безопасности и многих других необходимо создать реальную модель океанической поверхности. Примерами могут служить следующие задачи: обнаружение морских целей, моделирование движения объектов по поверхности моря, проектирование и техническая эксплуатация морских судов. Эти задачи решаются с использованием существующих программных комплексов, основанных на различных теориях. Однако не всегда таким образом удается получить хорошие результаты. Из-за некоторых допущений, иногда достаточно грубых, возникают значительные ошибки при создании модели.

На основе существующих волновых теорий рассматривается математическая модель, наиболее приближенная к реальным волновым характеристикам (рис. 1), учитывающая особенности моделирования океанической поверхности на основании трохлоидальной теории Герстнера и теории, разработанной Стоксом и Релеем.

---

<sup>1</sup> *Симаков Егор Евгеньевич, Сахалинский государственный университет. s-im1a@yandex.ru*



**Рис. 1.** Мореходные испытания модели рыболовного судна на регулярном волнении в опытовом бассейне Комсомольского-на-Амуре технического университета

3

### Основные понятия

Волна Стокса относится к нелинейным, периодическим волнам на поверхности невязкой жидкости конечной глубины. Такое моделирование предложено в середине XIX века сэром Джорджем Стоксом. Волновая теория Стокса имеет практическое применение в случае волн на глубокой воде и воде средней глубины. На мелководье лучшее приближение дает кноидальная волновая теория.

Дрейф Стокса – разница в конечных положениях после некоторого предопределенного периода времени (обычно этот период равен периоду волны), как производной от выражения в координатах Лагранжа и Эйлера. Конечное положение в лагранжевых координатах получается из конкретных частиц жидкости в течение интервала времени. Соответствующее конечное положение в эйлеровых координатах получается путем интегрирования скорости потока в фиксированном положении, равной начальной позиции в лагранжевом описании за тот же промежуток времени. Дрейф Стокса может возникнуть в случаях колебательного потока, являющегося неоднородным в пространстве. При волновом движении в гидродинамике используется понятие скорости дрейфа Стокса – средняя скорость при движении конкретной частицы жидкости вместе с потоком. В общем случае скорость дрейфа Стокса – это разница между средней лагранжевой скоростью перемещения частиц потока жидкости и средней скоростью потока Эйлера в фиксированных пространственных координатных отсчетах.

Движение частиц жидкости определяется аргументом  $x = \xi(a, t)$  в координатах Эйлера по формуле

$$\xi = \frac{\partial \xi}{\partial t} = u(\xi, t), \quad (1)$$



где  $\partial \xi / \partial t$  – частная производная  $\xi(\alpha, t)$  по  $t$ ,  $\xi(\alpha, t)$  – лагранжева позиция вектора частиц жидкости,  $u(x, t)$  – эйлерова скорость,  $x$  – вектор в системе координат Эйлера,  $\alpha$  – позиция вектора в лагранжевой системе координат,  $t$  – время в секундах.

Часто лагранжева координата  $\alpha$  выбирается так, чтобы совпадать с эйлеровой координатой  $x$  в начальный момент времени  $t=t_0$ :  $\xi(\alpha, t_0) = \alpha$ .

Обозначив среднее значение некоторой величины переменной с чертой сверху, получим выражения для определения среднего вектора скорости Эйлера и Лагранжа

$$\overline{u_L} = \overline{\xi(\alpha, t)} = \overline{\left( \frac{\partial \xi(\alpha, t)}{\partial t} \right)} = \overline{u(\xi(\alpha, t), t)} \quad (2)$$

$$\text{Таким образом, скорость дрейфа Стокса равна: } \overline{u_S} = \overline{u_L} - \overline{u_E} \quad (3)$$

Во многих ситуациях, отображение некоторой эйлеровой позиции  $x$  в соответствующую лагранжеву позицию  $\alpha$  является проблемой. Так как частица жидкости  $\alpha$  движется по пути множества различных эйлеровых позиций  $x$ , то невозможно сопоставить  $\alpha$  уникальному  $x$ .

### ***Подход к решению задачи нелинейных волн***

Одна из основных проблем при создании модели гравитационных волн заключается в том, что граничные условия, которые используются для определения положения свободной поверхности, заранее неизвестны и, следовательно, являются частью искомого решения. Благодаря использованию волновой теории Стокса можно выразить граничные условия в виде некоторого заранее известного выражения за счет увеличения числа потенциальных потоков в ряде Тейлора для среднего уровня поверхности. В дальнейшем решение нелинейной волновой задачи находится с помощью теории возмущений, также известной как расширение Стокса, относительно малого параметра (чаще всего крутизны волны). Неизвестные члены разложения могут быть найдены последовательно. При решении многих прикладных задач требуется найти лишь небольшое количество членов. Это обеспечит достаточную точность решения.

Существует некоторая особенность применения данного способа. Дело в том, что нелинейные волны обладают следующим свойством: фазовая скорость волны зависит от ее высоты. Использование теории возмущений приводит к возникновению в ходе решения ложных «вековых членов», противоречащих периодическому поведению волны. Эта проблема может быть решена с помощью расширяющегося дисперсионного соотношения в теории возмущений – методом, ныне известным как метод Линдштедт-Пуанкаре.

### ***Волны Стокса третьего порядка на глубокой воде***

Для создания модели волнения на глубокой воде введем следующие обозначения:  $\eta$  – высота свободной поверхности,  $\Phi$  – потенциал скорости,  $C$



– фазовая скорость (или быстрота),  $\theta$  – волновая фаза. Согласно теории Стокса, волнение может быть описано при помощи следующих соотношений (рис. 2):

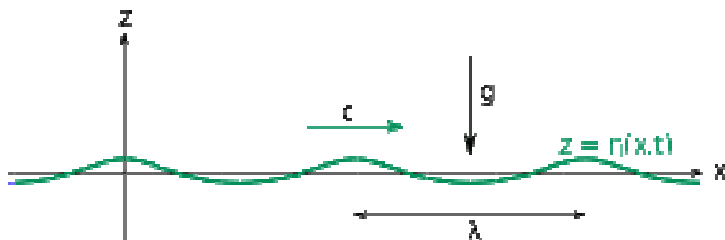


Рис. 2. Волна Стокса третьего порядка на глубокой воде (крутизна волны 0.3)

$$\eta(x, t) = a(\cos \theta + \frac{1}{2}ka \cos 2\theta + \frac{3}{8}(ka)^2 \cos 3\theta) + O((ka)^4)$$

$$\Phi(x, z, t) = \frac{\omega}{k} e^{kz} \sin \theta + O((ka)^4)$$

$$c = \frac{\omega}{k} = (1 + \frac{1}{2}(ka)^2) \sqrt{\frac{g}{k}} + O((ka)^4) \quad (4)$$

$$\theta(x, t) = kx - \omega t,$$

3

где  $x$  – горизонтальная координата,  $z$  – вертикальная координата, с положительным  $z$  – направлением вверх (противоположно направлению силы притяжения Земли) и  $z=0$  соответствует средней высоте поверхности,  $t$  – время,  $a$  – амплитуда волны первого порядка,  $\omega = 2\pi/T$  – круговая частота,  $k = 2\pi/\lambda$  – угловой волновой коэффициент, где  $\lambda$  – длина волны,  $T$  – период,  $g$  – сила тяжести.

Параметр разложения  $ka$  известен как крутизна волны. Фазовая скорость увеличивается с ростом нелинейности крутизны. Высота волны  $H$  представляет собой разницу между высотой гребня и впадины

$$H = 2a(1 + \frac{3}{8}k^2a^2)$$

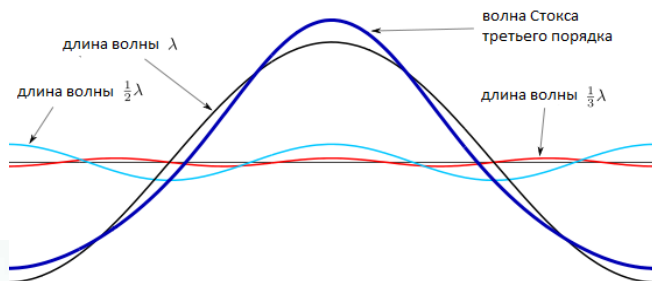


Рис. 3. Гармоническое волнение океанической поверхности (крутизна волны 0.3)

Отметим, что члены второго и третьего порядка в потенциал скоростей  $\Phi$  равны нулю. Только в случае четвертого порядка проявляются от-



клонения от так называемой волновой теории Эйри. До третьего порядка орбитальное поле скорости  $u = \nabla\Phi$  состоит из кругового движения вектора скорости в каждой позиции  $(x, z)$ . В результате поверхность глубоководных волн хорошо аппроксимируется трохоидами (рис. 3).

Стокс отмечал, что, хотя (согласно описаниям Эйлера) орбитальные поля скоростей третьего порядка состоят из круговых движений в каждой точке, «лагранжевы пути» частиц жидкости не являются закрытыми кругами. Это связано с уменьшением амплитуды скорости при увеличении глубины. Подобное движение частиц жидкости известно как дрейф Стокса.

### Дрейф Стокса для волн на глубокой воде

Условимся считать, что волны малой амплитуды, а также колебания свободной поверхности происходят относительно среднего уровня ( $z=0$ ). Волны распространяются под действием силы тяжести, с постоянным ускорением вектора силы тяжести (направлен вниз в отрицательном направлении оси  $z$ ). Жидкость считается невязкой и несжимаемой, с постоянной плотностью массы. Поток жидкости является безвихревым. На бесконечной глубине жидкость покоится (рис. 4).

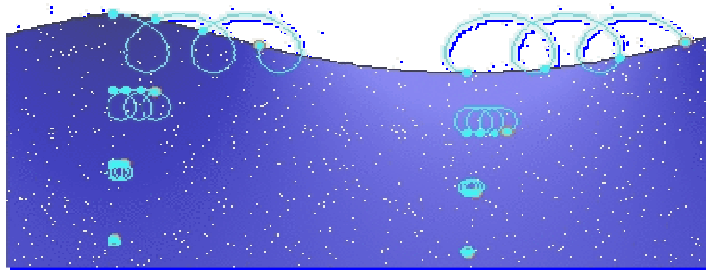


Рис. 4. Дрейф Стокса на глубокой воде

Распространение волны на глубокой воде происходит линейно по синусоидальному закону

$$\eta = a \cos(kx - \omega t), \quad (5)$$

где  $\eta$  – повышение свободной поверхности в направлении  $z$ ,  $a$  – амплитуда волны  $x$  – горизонтальная координата и направление распространения волны,  $z$  – вертикальная координата.

Горизонтальная компонента  $\overline{u_s}(z)$  скорости дрейфа Стокса для глубоководных волн составляет

$$\overline{u_s} \approx \omega k a^2 e^{2kz} = \frac{4\pi^2 a^2}{\lambda T} e^{4\pi z/\lambda}. \quad (6)$$

Как можно видеть, скорость дрейфа Стокса  $\overline{u_s}$  является нелинейной величиной с точки зрения амплитуды волны. Кроме того, скорость дрейфа



Стокса экспоненциально убывает с глубиной: на глубине, равной одной четвертой длины волны, ( $z = -\lambda/4$ ) – около 4% от значения на средней свободной поверхности ( $z = 0$ ).

Таким образом, поток может быть представлен при помощи потенциала скорости  $\varphi$ , удовлетворяющему уравнению Лапласа и следующему равенству

$$\varphi = \frac{\omega}{k} a e^{kz} \sin(kx - \omega t). \quad (7)$$

Для того чтобы получить нетривиальное решение поставленной задачи для реальных значений величин, длина волны и период волны не должны выбираться произвольно, но должны удовлетворять глубоководной дисперсии:  $\omega^2 = gk$ , где  $g$  – ускорение свободного падения. Горизонтальная и вертикальная составляющие ( $\xi_x$  и  $\xi_z$ ) лагранжевой позиции  $\xi$  равны:

$$\begin{aligned} \xi_x &= x + \int \frac{\partial \varphi}{\partial x} dt = x - a e^{kz} \sin(kx - \omega t) \\ \xi_z &= z + \int \frac{\partial \varphi}{\partial z} dt = z + a e^{kz} \cos(kx - \omega t) \end{aligned} \quad (8)$$

Горизонтальный компонент  $\overline{u_s}$  скорости дрейфа Стокса оценивается с помощью разложения в ряд Тейлора относительно  $x$  горизонтальной составляющей эйлеровой скорости  $u_x = \frac{\partial \xi_x}{\partial t}$  в позиции  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \overline{u_s} &= \overline{u_x(\xi, t)} - \overline{u_x(x, t)} = \overline{\left( u_x(x, t) + (\xi_x - x) \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial x} + \right.} \\ &\quad \left. + (\xi_z - z) \frac{\partial u_x(x, t)}{\partial z} + \dots \right)} - \overline{u_x(x, t)} \approx \\ &\approx \overline{(\xi_x - x) \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial x \partial t}} + \overline{(\xi_z - z) \frac{\partial^2 \xi_x}{\partial z \partial t}} = \\ &= \overline{(-a e^{kz} \sin(kx - \omega t))(-\omega k a e^{kz} \sin(kx - \omega t))} + \\ &+ \overline{(a e^{kz} \cos(kx - \omega t))(\omega k a e^{kz} \cos(kx - \omega t))} = \\ &= \overline{\omega k a^2 e^{2kz} (\sin^2(kx - \omega t) + \cos^2(kx - \omega t))} = \omega k a^2 e^{2kz}. \end{aligned} \quad (9)$$

### Моделирование волн с максимальной высотой

Максимальная крутизна периодических волн на глубокой воде составляет  $H/\lambda \approx 0,1412$ . Таким образом, максимальная высота волн составляет около одной седьмой от длины волны  $\lambda$ . Поверхностные гравитационные волны на максимальной высоте имеют острый гребень – с углом  $120^\circ$  (Стокс доказал этот факт в 1880 г и для случая волнения на конечной глубине).



Результаты более подробного изучения поведения волн с максимальной высотой вблизи остроугольного гребня были опубликованы М. А. Грантом в 1973 году. Существование подобных волн на глубокой воде было доказано Джоном Толандом в 1978 году.

Волны Стокса с максимальной высотой могут быть аппроксимированы следующим простым и точным представлением возвышения свободной поверхности  $\eta(x, t)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\eta}{\lambda} &= A \left( \cosh \left( \frac{x - ct}{\lambda} \right) - 1 \right), \\ A &= \frac{1}{\sqrt{3} \sinh \left( \frac{1}{2} \right)} \approx 1,108, \\ -\frac{1}{2} \lambda &\leq (x - ct) \leq \frac{1}{2} \lambda.\end{aligned}\tag{10}$$

Это приближение дает точность до 0,7% по сравнению с «точным» решением. Иногда используется другое, наименее точное приближение – движение жидкости на поверхности волны моделируется по аналогии с качанием маятника в часах.

### Граничные условия

Колебательный поток внутри жидкости поверхностных волн может быть описан с высокой точностью благодаря понятию потенциала потока. Исключение составляет лишь пограничный слой вблизи свободной поверхности и дна, где важное значение имеет вязкость. Скорость потока  $u$  может быть описана как градиент потенциала скорости  $\Phi$ :

$$u = \nabla \Phi\tag{11}$$

Предположим, что жидкость несжимаема. Тогда поле скоростей  $u$  не расходится, и потенциал скоростей  $\Phi$  удовлетворяет уравнению Лапласа внутри жидкости

$$\nabla^2 \Phi = 0\tag{12}$$

Ограниченный участок жидкости описывается при помощи трехмерной декартовой системы координат  $(x, y, z)$ , где  $x$  и  $y$  - горизонтальные координаты,  $z$  - вертикальная координата – с положительным  $Z$ -направлением в сторону, противоположную направлению гравитационного ускорения. Свободная поверхность определяется как  $Z = \eta(x, y, z)$ , а в нижней части участка жидкости:  $Z = -H(x, y)$ .

Граничные условия для свободной поверхности поверхностных гравитационных волн состоят из кинематических и динамических условий. Кинематические граничные условия гарантируют, что нормальная составляю-



щая скорости потока жидкости  $u = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^T$  на свободной поверхности равна нормальной составляющей скорости движения свободной поверхности

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (13)$$

Динамическая составляющая граничных условий заключается в следующем: без эффекта поверхностного натяжения атмосферное давление над свободной поверхностью жидкости равно давлению чуть ниже поверхности. Для нестационарного потенциального потока это означает, что уравнение Бернулли может быть использовано для моделирования свободной поверхности. В случае постоянного атмосферного давления динамические условия принимают вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |u|^2 + g \eta = 0 \quad (14)$$

Оба граничных условия содержат потенциал  $\Phi$ , а также высоту поверхности  $\eta$ . Получим динамические граничные условия относительно только потенциала  $\Phi$ . Для этого найдем материальную производную динамического граничного с использованием кинематических условий:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} |u|^2 + g \eta \right) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + u \cdot \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (|u|^2) + \frac{1}{2} u \cdot \nabla (|u|^2) &= 0 \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t} (|u|^2) + \frac{1}{2} u \cdot \nabla (|u|^2) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

В нижней части участка жидкости требуется обращение нормальной составляющей скорости потока в нуль:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) / \sqrt{1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)^2} = 0 \quad (16)$$

где  $n$  – координата компоненты в направлении, перпендикулярном к дну. Для волн над горизонталью дна средняя глубина  $h$  является граничным условием:  $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ .





### *Заключение*

Применение волновой теории Стокса для моделирования океанической поверхности является перспективным направлением исследований в данной области. Для повышения точности создаваемых моделей используются различные методы. Существует несколько соотношений между интегральными свойствами: кинетическая и потенциальная энергия, импульс горизонтальных волн и т.д. Рассмотренные проблемы моделирования волн представляют собой сложные задачи, как в теоретическом, так и в практическом смысле. Уточнение и применение существующих теорий, а также установление новых взаимосвязей и законов волновых процессов является важным направлением современных научных исследований.

### *Литература*

1. *Andrew D., McIntyre M.* An exact theory of nonlinear waves on a Lagrangian-mean flow. / *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 89. – Cambridge: Cambridge University Press, 1978.
2. *Bustard C., Thai N.* Hydrodynamic modeling / Supercomputing challenge final report. – Albuquerque, New Mexico: Supercomputing challenge Inc., 2008.
3. *Constantin A.* The trajectories of particles in Stokes waves / *Inventiones Mathematicae*. – Berlin: Springer Science+Business Media, 2006.
4. *Fenton J.* Nonlinear wave theories. / *The Sea - Ocean Engineering Science, Part A*, Vol. 9. – New York: Wiley & Sons Incorporated, 1990.